

1.5 Поняття потрійного інтеграла

Поняття потрійного інтеграла вводиться аналогічно поняттю подвійного інтеграла.

Нехай функція $u = f(x; y; z)$ визначена в обмеженій замкненій області Ω , що належить тривимірному простору з визначеною декартовою системою координат $Oxyz$. Розіб'ємо задану область на n частин Ω_i , які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють відповідно $\Delta V_i, i = \overline{1; n}$. У кожній такій елементарній області візьмемо довільну точку $P_i(x_i; y_i; z_i)$ та утворимо суму $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta V_i$, яка називається **інтегральною сумою для функції** $u = f(x; y; z)$ по області Ω .

Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(\Omega_i)$ – найбільший з діаметрів. Під **діаметром області** розуміють максимальну відстань між її точками.

Означення 1.6 Якщо існує границя $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta V_i$, яка не залежить від способу розбиття області Ω на елементарні області Ω_i та вибору в них точок P_i , то ця границя називається **потрійним інтегралом по області** Ω і позначається

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dV \quad \text{або} \quad \iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz.$$

Нехай Ω – замкнена просторова область, обмежена знизу та зверху поверхнями $z = \varphi_1(x; y)$ та $z = \varphi_2(x; y)$ відповідно ($\varphi_2(x; y) \geq \varphi_1(x; y)$), а з боків – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz (рис. 1.16). Змінні x та y змінюються в плоскій області D , що є проекцією просторової області Ω на координатну площину Oxy .

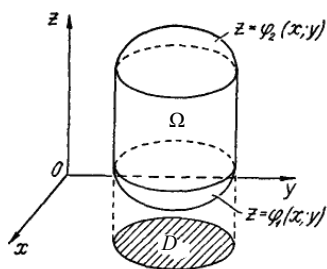


Рис. 1.16

У прямокутній декартовій системі координат елемент об'єму dv обчислюється за формулою:

$$dv = dx dy dz.$$

Для вказаної області Ω потрійний інтеграл обчислюється наступним чином:

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x; y; z) dz. \quad (1.6)$$

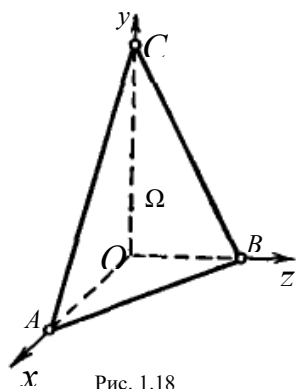


Рис. 1.18

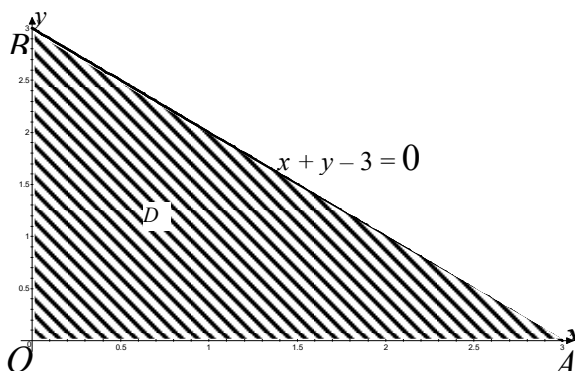


Рис. 1.19

Внутрішній інтеграл

$$\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x; y; z) dz \quad (1.7)$$

обчислюється за змінною z , а x та y у цьому випадку вважаються сталими. Результатом інтегрування є функція змінних x та y — $F(x; y)$. Отже, обчислення потрібного інтегралу (1.6) зводиться до обчислення подвійного інтегралу $\iint_D F(x; y) dx dy$ (після того як було знайдено визначений інтеграл (1.7)), методи обчислення якого були наведені вище.

Зауваження 1.7 Порядок інтегрування в потрібному інтегралі (1.1) може бути змінений, тобто внутрішній інтеграл може інтегруватися як за змінною x , так і за змінною y .

Приклад 1.7 Обчислити потрібний інтеграл $I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz$, де область Ω — це тетраедр, який обмежено площиною $2x + 2y + z - 6 = 0$ та координатними площинами.

Розв'язання. Обчислення інтеграла почнемо з того, що зобразимо задану область Ω . Заданий тетраедр знизу обмежений координатною площиною Oxy , рівняння якої $z = 0$, зверху площиною $2x + 2y + z - 6 = 0$, а з боків координатними площинами Oxz ($y = 0$) та Oyz ($x = 0$) (рис. 1.18).

З рівняння $2x + 2y + z - 6 = 0$ площини знаходимо, що $z = 6 - 2x - 2y$. Таким чином, можна зробити висновок, що в області Ω змінна z змінюється від 0 до $6 - 2x - 2y$, тобто

$$0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y.$$

Для знаходження меж для змінних x та y спроектуємо просторову область Ω на площину Oxy . Проекцією на площині буде трикутник AOB

(рис. 1.19), який обмежено координатними прямими та прямою AB . Знайдемо рівняння прямої AB . Для цього розв'яжемо систему:

$$(AB): \begin{cases} 2x + 2y + z - 6 = 0, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - x.$$

Отже, область D , що є проекцією області Ω , визначається нерівностями:

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 3 - x. \end{cases}$$

Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{6-2x-2y} x dz = \int_0^3 x dx \int_0^{3-x} z \Big|_0^{6-2x-2y} dy = \int_0^3 x dx \int_0^{3-x} (6 - 2x - 2y) dy = \\ &= \int_0^3 x \cdot (6y - 2xy - y^2) \Big|_0^{3-x} dx = \int_0^3 x (6(3-x) - 2x(3-x) - (3-x)^2) dx = \\ &= \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

1.6 Заміна змінної у потрійному інтегралі

Заміну змінної у потрійному інтегралі виконують за наступним правилом: якщо обмежена замкнена область G взаємно однозначно відображається на область G^* за допомогою неперервно диференційовних функцій $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ і при цьому визначник Якобі (якобіан) J у області G^*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а функція $f(x, y, z)$ є неперервною у G , то виконується рівність:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J| du dv dw. \quad (1.8)$$

На практиці найчастіше зустрічаються циліндричні та сферичні координати. У випадку **циліндричних координат** положення точки $P(x, y, z)$ у тривимірному просторі визначається координатами ρ, φ, z , де ρ, φ – полярні координати проекції точки $P(x, y, z)$ на площину Oxy , z – апліката точки P . При переході від декартових координат x, y, z до циліндричних координат ρ, φ, z , пов'язаних з x, y, z співвідношеннями

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z, \\ (0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty), \end{aligned}$$

якобіан перетворення $J = -\rho$.

З формули (1.8) отримуємо формулу переходу від декартових до циліндричних координат у потрійному інтегралі:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho d\rho d\varphi dz \quad (1.9)$$

У **сферичних координатах** положення точки $P(x, y, z)$ у просторі визначається трьома числами r, φ, θ , r – довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OP}$ точки P , φ – кут між додатним напрямом осі Ox та проекцією радіус-вектора $\overrightarrow{OP}$ на площину Oxy , θ – кут між віссю Oz декартової системи координат та радіус-вектором $\overrightarrow{OP}$.

Сферичні координати r, φ, θ пов'язані з декартовими координатами формулами

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= r \cos \theta, \\ \text{де } 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Для сферичних координат $J = r^2 \sin \theta$, тому формула переходу до сферичних координат у потрійному інтегралі має вигляд:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \quad (1.10)$$

Вибір системи координат для обчислення потрійного інтеграла залежить від області інтегрування та підінтегральної функції.

Приклад 1.8 Обчислити $\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$, де тіло T обмежене циліндром $x^2+y^2=2x$ та площинами $y=0$ ($y \geq 0$), $z=0$, $z=2$.

Розв'язання. Введемо циліндричні координати $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. У цій системі координат $x^2+y^2 = \rho^2$, рівняння кола, що лежить у основі циліндра, набуває вигляду: $\rho = 2 \cos \varphi$. За формулою (1.9) маємо:

$$\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2} dx dy dz = \iiint_{T^*} \rho^2 z d\rho d\varphi dz,$$

де область T^* визначається нерівностями $0 \leq z \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$.

Перейшовши до повторного інтегралу, отримуємо:

$$\begin{aligned} \iiint_{T^*} \rho^2 z d\rho d\varphi dz &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \int_0^2 z dz = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{16}{3} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Приклад 1.9 Обчислити $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$, де область інтегрування T – куля $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Розв'язання. Перейдемо до сферичних координат $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. Оскільки підінтегральна функція $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$, а область інтегрування у сферичних координатах визначається нерівностями $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, то, за формулою (1.10), отримуємо:

$$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\frac{\pi}{2} \cos \theta \Big|_0^\pi = \pi.$$

1.7 Застосування потрійного інтеграла до задач геометрії та механіки

Обчислення об'ємів тіл. Об'єм тіла, обмеженого просторовою областю Ω , обчислюється за формулою:

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz.$$

Приклад 1.10 Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ та $x^2 + y^2 = 2 - z$.

Розв'язання. Зобразимо область, яку обмежують задані поверхні. Для цього спочатку рівняння першої поверхні зведемо до канонічного вигляду, виділивши повний квадрат за змінною z :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

Отримали канонічне рівняння сфери з центром у точці $O_1(0; 0; 1)$ та радіуса 1. Друге рівняння $x^2 + y^2 = 2 - z$ визначає параболоїд обертання. Зобразимо ці дві поверхні в одній системі координат (рис. 1.20, а).

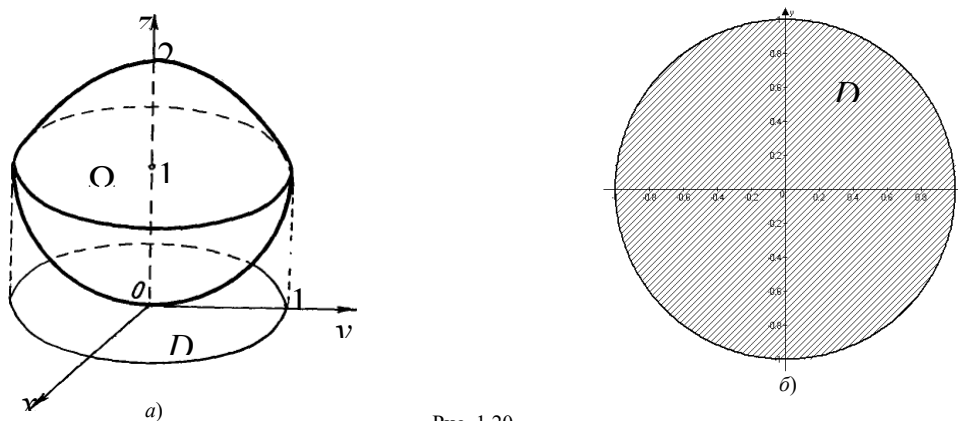


Рис. 1.20

Знайдемо лінію, яка є перетином заданих поверхонь. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 - z \end{cases} \Rightarrow 2 - z + z^2 - 2z = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1, \\ z_2 = 2. \end{cases}$$

Оскільки при $z = 2$ отримаємо вершину параболоїда $x^2 + y^2 = 2 - z$, то лінія перетину поверхонь знаходиться на висоті $z = 1$. Тоді рівняння шуканої лінії – $x^2 + y^2 = 1, z = 1$. На площину Oxy отримане коло проектується в коло $x^2 + y^2 = 1$, а все тіло Ω в область D – круг, що обмежений вказаним колом (рис. 1.20, б).

У заданій області Ω змінна z змінюється від сфери до параболоїда. Виразимо z з рівнянь цих поверхонь. З рівняння сфери $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ знаходимо:

$$(z-1)^2 = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow z-1 = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Оскільки область обмежена нижньою півсферою, то $z-1 = -\sqrt{1-x^2-y^2}$,

$$z = 1 - \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

З рівняння параболоїда отримаємо, що

$$z = 2 - x^2 - y^2.$$

Отже, в області Ω : $1 - \sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.

Знаходимо об'єм заданого тіла:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)} dz = \iint_D \left[2 - (x^2 + y^2) - 1 + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right] dx dy = \\ &= \iint_D \left[1 - (x^2 + y^2) + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Оскільки область D є кругом, а підінтегральна функція містить суму $x^2 + y^2$, то для обчислення подвійного інтеграла доцільно буде перейти в ПСК

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

У цьому випадку область D : $\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$ а елемент площі $dx dy = \rho d\rho d\varphi$. Таким чином, отримаємо:

$$V = \iint_D \left[1 - \rho^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \right] \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho - \rho^3 + \rho\sqrt{1 - \rho^2} \right) d\rho \left\| \begin{array}{l} 1 - \rho^2 = t^2 \\ -2\rho d\rho = 2tdt \\ \rho d\rho = -tdt \\ \rho = 0 \Rightarrow t = 1 \\ \rho = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 - \int_1^0 t^2 dt \right] = (2\pi - 0) \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{t^3}{3} \Big|_1^0 \right] = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \\
&= 2\pi \cdot \frac{7}{12} = \frac{7\pi}{6} \text{ (куб. од.)}.
\end{aligned}$$

Маса неоднорідного тіла. Якщо тіло є неоднорідним з густиною $\gamma = \gamma(x; y; z)$, то його маса m обчислюється за формулою:

$$m = \iiint_{\Omega} \gamma(x; y; z) dx dy dz.$$

Зауваження 1.8 Якщо тіло, що розглядається, є однорідним з одиничною густиною, то остання формула набуває вигляду:

$$m = \iiint_{\Omega} dx dy dz = V.$$

Приклад 1.11 Обчислити масу куба $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ з густиною $\gamma(x; y; z) = x + 2y + 3z$.

Розв'язання. Зобразимо заданий куб (рис. 1.21). Шукана маса:

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + 2y + 3z) dz = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(xz + 2yz + \frac{3z^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + 2y + \frac{3}{2} \right) dy = \int_0^1 \left(xy + y^2 + \frac{3y}{2} \right) \Big|_0^1 dx = \\
&= \int_0^1 \left(x + 1 + \frac{3}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{5}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3.
\end{aligned}$$

Статичні моменти тіла відносно координатних площин. Нехай задано деяке тіло з густиною $\gamma = \gamma(x; y; z)$. Тоді статичні моменти цього тіла відносно координатних площин Oxy , Oxz та Oyz обчислюються відповідно за формулами:

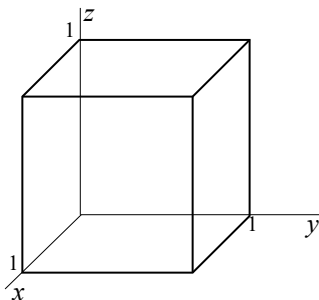


Рис. 1.21

$$\begin{aligned}
S_{xy} &= \iiint_{\Omega} z \gamma(x; y; z) dx dy dz; \quad S_{xz} = \iiint_{\Omega} y \gamma(x; y; z) dx dy dz; \\
S_{yz} &= \iiint_{\Omega} x \gamma(x; y; z) dx dy dz.
\end{aligned}$$

Приклад 1.12 Обчислити статичні моменти куба із прикладу 1.11 відносно координатних площин.

Розв'язання. Згідно з наведеними вище формулами, статичний момент відносно площини Oxy :

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iiint_{\Omega} z(x+2y+3z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 z(x+2y+3z) dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x \cdot \frac{z^2}{2} + yz^2 + z^3 \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + y + 1 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_0^1 dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо статичні моменти S_{xz} , S_{yz} відносно координатних площин Oxz та Oyz відповідно:

$$\begin{aligned} S_{xz} &= \iiint_{\Omega} y(x+2y+3z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 y(x+2y+3z) dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(xyz + 2y^2z + \frac{3yz^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(xy + 2y^2 + \frac{3y}{2} \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3} + \frac{3y^2}{4} \right) \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{17}{12} \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{17x}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{17}{12} = \frac{5}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{yz} &= \iiint_{\Omega} x(x+2y+3z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 x(x+2y+3z) dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x^2z + 2xyz + \frac{3xz^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x^2 + 2xy + \frac{3x}{2} \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(x^2y + xy^2 + \frac{3xy}{2} \right) \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + x + \frac{3x}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{5x}{2} \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{4} = \frac{19}{12}. \end{aligned}$$

Відповідь: $S_{xy} = \frac{7}{4}$, $S_{xz} = \frac{5}{3}$, $S_{yz} = \frac{19}{12}$.

Координати центра маси. Координати точки $M(x_C; y_C; z_C)$ – центра маси деякого тіла обчислюються за формулами:

$$x_C = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{S_{xy}}{m},$$

де S_{xz} , S_{yz} , S_{xy} – статичні моменти відносно координатних площин (див. 1.7.3); m – маса тіла (див. 1.7.2).

Приклад 1.13 Визначити координати центру маси однорідного тіла, обмеженого площинами $x + y + z = 2a$, $x = a$, $y = a$ та координатними площинами.

Розв’язання. Зобразимо задане тіло (рис. 1.22, а). Воно обмежене відповідно площинами $x + y + z = 2a$, $x = a$, $y = a$, $x = 0$, $y = 0$ та $z = 0$. Проекцією тіла на площину Oxy буде область D – квадрат, який зображено на рисунку 1.22, б.

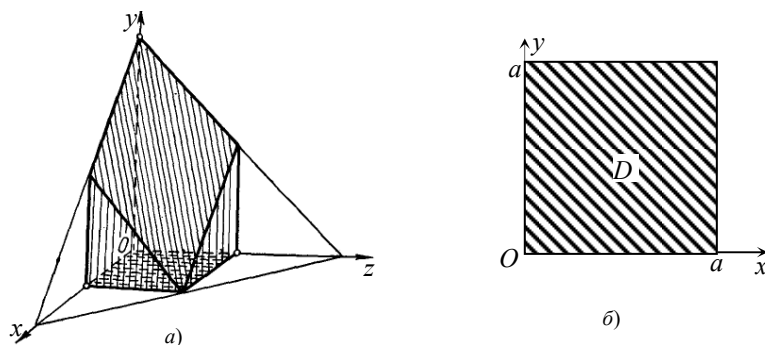


Рис. 1.22

Оскільки за умовою тіло однорідне, то його густина $\gamma = \text{const}$. Вона скорочується у формулах для обчислення координат центру маси. В області Ω , що обмежує тіло, змінна z змінюється від 0 до $2a - x - y$. Область D визначається нерівностями:

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq a. \end{cases}$$

Тоді маса заданого тіла

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\Omega} 1 \cdot dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{2a-x-y} dz = \int_0^a dx \int_0^a (2a - x - y) dy = \\ &= \int_0^a \left(2ay - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^a dx = \int_0^a \left(2a^2 - ax - \frac{a^2}{2} \right) dx = \int_0^a \left(\frac{3a^2}{2} - ax \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{3a^3}{2} - \frac{a^3}{2} = a^3.$$

Обчислюємо статичні моменти тіла відносно координатних площин:

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{2a-x-y} z dz = \int_0^a dx \int_0^a \frac{(2a-x-y)^2}{2} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a dx \int_0^a (y-2a+x)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(y-2a+x)^3}{3} \Big|_0^a dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^a [(x-a)^3 - (x-2a)^3] dx = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{(x-a)^4}{4} - \frac{(x-2a)^4}{4} \right] \Big|_0^a = \frac{1}{24} (0 - a^4 - (a^4 - 16a^4)) = \\ &= \frac{14a^4}{24} = \frac{7a^4}{12}; \\ S_{xz} &= \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^a y dy \int_0^{2a-x-y} dz = \int_0^a dx \int_0^a y(2a-x-y) dy = \\ &= \int_0^a \left(ay^2 - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a dx = \int_0^a \left(a^3 - \frac{a^2x}{2} - \frac{a^3}{3} \right) dx = \int_0^a \left(\frac{2a^3}{3} - \frac{a^2x}{2} \right) dx = \\ &= \left(\frac{2a^3x}{3} - \frac{a^2x^2}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{2a^4}{3} - \frac{a^4}{4} = \frac{5a^4}{12}; \\ S_{yz} &= \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^{2a-x-y} dz = \\ &= \int_0^a x dx \int_0^a (2a-x-y) dy = - \int_0^a x dx \int_0^a (y-2a+x) dy = - \int_0^a x \cdot \frac{(y-2a+x)^2}{2} \Big|_0^a dx = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^a x [(x-a)^2 - (x-2a)^2] dx = \frac{1}{2} \int_0^a x \cdot (3a^2 - 2ax) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{3a^2x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3a^4}{2} - \frac{a^4}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5a^4}{6} = \frac{5a^4}{12}. \end{aligned}$$

Отже, шукані координати центра маси:

$$x_C = \frac{\frac{5a^4}{12}}{a^3} = \frac{5a}{12}, \quad y_C = \frac{\frac{5a^4}{12}}{a^3} = \frac{5a}{12}, \quad z_C = \frac{\frac{7a^4}{12}}{a^3} = \frac{7a}{12}.$$

Моменти інерції тіла відносно координатних площин. Нехай задано деяке тіло з густиною $\gamma = \gamma(x; y; z)$, яке обмежене областю Ω . Тоді моменти інерції цього тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_{\Omega} z^2 \gamma(x; y; z) dx dy dz; \quad M_{xz} = \iiint_{\Omega} y^2 \gamma(x; y; z) dx dy dz; \\ M_{yz} &= \iiint_{\Omega} x^2 \gamma(x; y; z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Приклад 1.14 Знайти моменти інерції відносно координатних площин однорідного тіла з густиною $\gamma=1$, якщо область Ω , що його обмежує, задається наступними нерівностями:

$$\Omega: \begin{cases} \frac{y^2}{2a} \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ -a \leq y \leq a, \\ 0 \leq z \leq \frac{x^2}{2a}. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо момент інерції відносно координатної площини Oxy :

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_{-a}^a dy \int_{y^2/(2a)}^{a/2} dx \int_0^{x^2/(2a)} z^2 dz = \int_{-a}^a dy \int_{y^2/(2a)}^{a/2} \frac{z^3}{3} \Big|_0^{x^2/(2a)} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-a}^a dy \int_{y^2/(2a)}^{a/2} \frac{x^6}{8a^3} dx = \frac{1}{24a^3} \int_{-a}^a \frac{x^7}{7} \Big|_{\frac{y^2}{2a}}^{\frac{a}{2}} dy = \frac{1}{168a^3} \int_{-a}^a \left(\frac{a^7}{128} - \frac{y^{14}}{128a^7} \right) dy = \\ &= \frac{1}{168a^3} \left(\frac{a^7 y}{128} - \frac{y^{15}}{1920a^7} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{1}{168a^3} \left[\frac{a^8}{128} - \frac{a^{15}}{1920a^7} - \left(-\frac{a^8}{128} + \frac{a^{15}}{1920a^7} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{168a^3} \left[\frac{a^8}{128} - \frac{a^8}{1920} \right] = \frac{2}{168a^3} \cdot \frac{7a^8}{960} = \frac{a^5}{11520}. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо моменти інерції відносно площин Oxz та Oyz :

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \int_{-a}^a y^2 dy \int_{y^2/(2a)}^{a/2} dx \int_0^{x^2/(2a)} dz = \int_{-a}^a y^2 dy \int_{y^2/(2a)}^{a/2} \frac{x^2}{2a} dx = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a y^2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{y^2/(2a)}^{a/2} dy = \frac{1}{6a} \int_{-a}^a y^2 \left(\frac{a^3}{8} - \frac{y^6}{8a^3} \right) dy = \frac{1}{48a} \int_{-a}^a \left(\frac{a^3 y^3}{3} - \frac{y^9}{9a^3} \right) dy = \\ &= \frac{1}{48a} \left[\frac{a^6}{3} - \frac{a^9}{9a^3} - \left(-\frac{a^6}{3} + \frac{a^9}{9a^3} \right) \right] = \frac{2}{48a} \cdot \left(\frac{a^6}{3} - \frac{a^6}{9} \right) = \frac{a^5}{108}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_{-a}^a dy \int_{y^2/(2a)}^{a/2} x^2 dx \int_0^{x^2/(2a)} dz = \int_{-a}^a dy \int_{y^2/(2a)}^{a/2} x^2 \cdot \frac{x^2}{2a} dx = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{x^5}{5} \Big|_{y^2/(2a)}^{a/2} dy = \frac{1}{10a} \int_{-a}^a \left(\frac{a^5}{32} - \frac{y^{10}}{32a^5} \right) dy = \frac{1}{320a} \left(a^5 y - \frac{y^{11}}{11a^5} \right) \Big|_{-a}^a = \\ &= \frac{1}{320a} \left[a^6 - \frac{a^6}{11} - \left(-a^6 + \frac{a^6}{11} \right) \right] = \frac{1}{160a} \left[a^6 - \frac{a^6}{11} \right] = \frac{a^5}{176}. \end{aligned}$$

Відповідь: $M_{xy} = \frac{a^5}{11520}$, $M_{xz} = \frac{a^5}{108}$, $M_{yz} = \frac{a^5}{176}$.

Моменти інерції відносно координатних осей. Для тіла з густиною $\gamma = \gamma(x; y; z)$ моменти інерції відносно осей координат обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} M_x &= \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \gamma(x; y; z) dx dy dz, \quad M_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \gamma(x; y; z) dx dy dz, \\ M_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \gamma(x; y; z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Зауваження 1.9 Порівнюючи формули (1.11) та (1.12) моментів інерції тіла відносно координатних площин та осей можна зробити висновок, що

$$M_x = M_{xy} + M_{xz}, \quad M_y = M_{xy} + M_{yz}, \quad M_z = M_{xz} + M_{yz}.$$

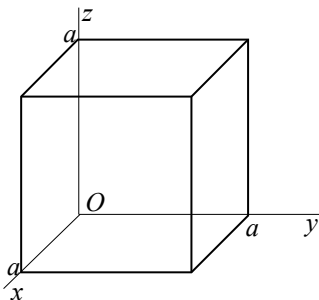


Рис. 1.23

Приклад 1.15 Визначити момент інерції M_z однорідного куба з густиною $\gamma = 1$ та зі стороною a відносно одного з його ребер.

Розв'язання. Введемо в кубі, що розглядається, ПДСК, як показано на рисунку 1.23. Початок системи

координат помістимо в одну із вершин куба, а осі координат направимо вздовж трьох взаємно перпендикулярних ребер.

Знайдемо момент інерції заданого куба відносно осі Oz . Область Ω , за якою буде обчислюватися потрібний інтеграл, має вигляд:

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq a, \\ 0 \leq z \leq a. \end{cases}$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned} M_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy \int_0^a dz = \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a dx \cdot z \Big|_0^a = \\ &= \int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx \cdot a = a \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3 x}{3} \right) \Big|_0^a = a \cdot \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) = \frac{2a^5}{3}. \end{aligned}$$

Момент інерції відносно початку координат. Момент інерції тіла з густиною $\gamma = \gamma(x; y; z)$, обмеженого деякою просторовою областю Ω , відносно початку координат обчислюється за формулою:

$$M_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Зауваження 1.10 Момент інерції тіла відносно початку координат можна виразити через моменти тіла відносно координатних площин наступним чином:

$$M_0 = M_{xy} + M_{xz} + M_{yz}.$$

Приклад 1.16 Обчислити момент інерції відносно початку координат однорідного куба із прикладу 1.15.

Розв'язання. Шуканий момент інерції

$$\begin{aligned} M_0 &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2) dz = \\ &= \int_0^a dx \int_0^a \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^a dy = \int_0^a dx \int_0^a \left(ax^2 + ay^2 + \frac{a^3}{3} \right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a \left(ax^2y + \frac{ay^3}{3} + \frac{a^3y}{3} \right) \bigg|_0^a dx = \int_0^a \left(a^2x^2 + \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) dx = \int_0^a \left(a^2x^2 + \frac{2a^4}{3} \right) dx = \\
&= \left(\frac{a^2x^3}{3} + \frac{2a^4x}{3} \right) \bigg|_0^a = \frac{a^5}{3} + \frac{2a^5}{3} = a^5.
\end{aligned}$$