

2 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

2.1 Криволінійний інтеграл I роду

Нехай на декартовій площині Oxy задана деяка неперервна крива AB , у кожній точці якої визначена функція $f(x; y)$ двох незалежних змінних x та y . Розіб'ємо задану дугу на n частин точками $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n = B$. На кожній з елементарних дуг $A_i A_{i+1}$ оберемо довільну точку $M_i(x_i; y_i)$. Обчислимо в цій точці значення функції $f(x; y)$, отримаємо величину $f(x_i; y_i)$. Складемо суму добутків значень $f(x_i; y_i)$ на довжину Δl_i елементарної дуги $A_i A_{i+1}$:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i; y_i) \Delta l_i.$$

Знайдемо границю цієї суми за умови, що довжина найбільшої із дуг прагне до нуля, а їх кількість $n \rightarrow \infty$. Якщо функція $f(x; y)$ неперервна в усіх точках дуги AB , то ця границя існує й не залежить ні від способу розбиття дуги AB на частини, ні від вибору точок $M_i(x_i; y_i)$ на кожній із частин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i; y_i) \Delta l_i.$$

Означення 2.1 Границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i; y_i) \Delta l_i$ називають криволінійним інтегралом першого роду:

$$\int_{(AB)} f(x; y) dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i; y_i) \Delta l_i.$$

Зауваження 2.1 Криволінійний інтеграл I роду не залежить від напрямку обходу кривої AB , тобто

$$\int_{(AB)} f(x; y) dl = \int_{(BA)} f(x; y) dl.$$

2.2 Обчислення криволінійного інтеграла I роду.

Якщо крива AB задана явним рівнянням $y = g(x)$, $x \in [a; b]$, то

$$\int_{(AB)} f(x; y) dl = \int_a^b f(x; g(x)) \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx. \quad (2.1)$$

Приклад 2.1 Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_{AB} dl$, де

AB – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(1; 2)$.

Розв’язання. Знайдемо рівняння вказаного відрізка (як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, де $0 \leq x \leq 1$):

$$(AB): \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x.$$

Тобто $g(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Для того, щоб скористатися формулою (2.1), знайдемо похідну функції $g(x)$:

$$g'(x) = (2x)' = 2.$$

Тоді отримуємо:

$$\int_{AB} dl = \int_0^1 \sqrt{1 + 2^2} dx = \sqrt{5} \int_0^1 dx = \sqrt{5} \cdot x \Big|_0^1 = \sqrt{5}.$$

Відповідь. $\sqrt{5}$.

Приклад 2.2 Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_{AB} (x^5 + 8xy) dl$, де AB – дуга кривої $4y = x^4$ між точками з абсцисами $x = 0$ та $x = 1$.

Розв’язання. У даному випадку крива інтегрування задана явно, причому $g(x) = \frac{x^4}{4}$. Тоді

$$g'(x) = \left(\frac{x^4}{4} \right)' = x^3.$$

Підставляючи ці дані у формулу (2.1), маємо:

$$\int_{AB} (x^5 + 8xy) dl = \int_0^1 \left(x^5 + 8 \cdot x \cdot \frac{x^4}{4} \right) \cdot \sqrt{1 + (x^3)^2} dx = \int_0^1 (x^5 + 2x^5) \cdot \sqrt{1 + x^6} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 3x^5 \sqrt{1+x^6} dx \left\| \begin{array}{l} 1+x^6 = t^2 \\ 6x^5 dx = 2tdt \\ 3x^5 dx = tdt \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2} \end{array} \right\| = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2} \cdot tdt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \\
&= \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} (\sqrt{2}^3 - 1) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.
\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Якщо крива задана *параметрично* рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

а параметр t змінюється на дузі AB від $t_1 = \alpha$ до $t_2 = \beta$, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою:

$$\int_{(AB)} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t); \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (2.2)$$

Зауваження 2.2 Аналогічна формула має місце й у тривимірному випадку: якщо просторова крива задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \xi(t), \end{cases}$$

то криволінійний інтеграл I роду дорівнює:

$$\int_{(AB)} f(x; y; z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t); \psi(t); \xi(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (2.3)$$

Приклад 2.3 Обчислити криволінійний інтеграл I роду $\int_{(AB)} (2x + 4y - 4z + 7)dl$, де AB – це відрізок прямої між точками $M_1(8; 9; 3)$ та $M_2(6; 10; 5)$.

Розв’язання. Складемо рівняння прямої M_1M_2 за координатами заданих точок M_1 та M_2 :

$$(M_1M_2): \frac{x-6}{8-6} = \frac{y-10}{9-10} = \frac{z-5}{3-5} \Rightarrow \frac{x-6}{2} = \frac{y-10}{-1} = \frac{z-5}{-2}.$$

Параметризуємо ці рівняння:

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-10}{-1} = \frac{z-5}{-2} = t \Rightarrow (M_1M_2): \begin{cases} x = 2t + 6, \\ y = -t + 10, \\ z = -2t + 5. \end{cases}$$

Знайдемо межі зміни параметра t , для чого використаємо координати точок M_1 та M_2 :

$$2t_1 + 6 = 8 \Rightarrow t_1 = 1$$

до

$$2t_2 + 6 = 6 \Rightarrow t_2 = 0.$$

Враховуючи зауваження 2.1, маємо, що $0 \leq t \leq 1$. Знайдемо значення похідних функцій $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (2t + 6)' = 2, \\ y'(t) &= (-t + 10)' = -1, \\ z'(t) &= (-2t + 5)' = -2. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} (2x + 4y - 4z + 7)dl &= \int_0^1 (2 \cdot (2t + 6) + 4 \cdot (-t + 10) - 4 \cdot (-2t + 5) + 7) \times \\ &\times \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} dt = \int_0^1 (4t + 12 - 4t + 40 + 8t - 20 + 7) \cdot \sqrt{9} dt = \end{aligned}$$

$$= 3 \int_0^1 (8t + 39) dt = 3 \cdot \left(\frac{8t^2}{2} + 39t \right) \Big|_0^1 = 3 \cdot (4 + 39) = 129.$$

Відповідь. 129.

Якщо крива AB задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою:

$$\int_{(AB)} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)} d\varphi. \quad (2.4)$$

Приклад 2.4 Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int (x + y) dl$, де AB – частина лемніскати $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, що знаходиться в першому координатному куті.

Розв'язання. Зобразимо задану лемніскату, її графік наведено на

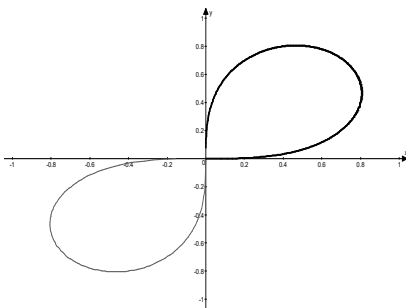


Рис. 2.1

рисунок 2.1. Полярний кут φ в першій чверті змінюється в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Оскільки $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, то

$$\rho' = (a\sqrt{\sin 2\varphi})' = \frac{a \cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},$$

тому отримуємо:

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} = \sqrt{(a\sqrt{\sin 2\varphi})^2 + \left(\frac{a \cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \right)^2} = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$$

Підставляємо отримані значення у формулу (2.4):

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} (x + y) dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \cdot \frac{a d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho(\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sqrt{\sin 2\varphi}(\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = a^2 (\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2. \end{aligned}$$

Відповідь. $2a^2$.

2.3 Застосування криволінійного інтеграла I роду

2.3.1 Обчислення довжин кривих. Довжина дуги кривої AB дорівнює

$$l = \int_{(AB)} dl.$$

Приклад 2.5 Знайти довжину дуги кривої (AB) :
$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t, \\ y = e^{-t} \sin t, \\ z = e^{-t}, \end{cases} \text{ де}$$

$$0 \leq t < \infty.$$

Розв'язання. Довжина дуги $l = \int_{(AB)} dl$. Оскільки крива AB задана параметрично, то, згідно з формулою (2.3), маємо:

$$l = \int_{(AB)} dl = \int_0^{\infty} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Обчислимо вказані похідні та знайдемо значення кореня:

$$x'(t) = (e^{-t} \cos t)' = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t),$$

$$y'(t) = (e^{-t} \sin t)' = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t = -e^{-t}(\sin t - \cos t),$$

$$z'(t) = (e^{-t})' = -e^{-t};$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} &= \sqrt{(-e^{-t}(\cos t + \sin t))^2 + (-e^{-t}(\sin t - \cos t))^2 + (-e^{-t})^2} = \\ &= e^{-t} \sqrt{\cos^2 t + 2 \sin t \cos t + \sin^2 t + \sin^2 t - 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + 1} = \\ &= e^{-t} \sqrt{2 + 1} = e^{-t} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Тоді обчислюємо невластний інтеграл першого роду:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-t} \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-t} dt = \sqrt{3} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-e^{-t} \right) \Big|_0^a = -\sqrt{3} \lim_{a \rightarrow \infty} (e^{-a} - e^0) = \\ &= -\sqrt{3} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^a} - 1 \right) = -\sqrt{3} \cdot (0 - 1) = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Відповідь. $l = \sqrt{3}$.

2.3.2 Знаходження маси матеріальної кривої. Якщо в кожній точці кривої AB лінійна густина γ є функцією координат цієї точки, тобто $\gamma = \gamma(x; y)$, то маса цієї кривої дорівнює криволінійному інтегралу першого роду від густини:

$$m = \int_{(AB)} \gamma(x; y) dl.$$

Приклад 2.6 Знайти масу кривої $AB: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} (a \geq b > 0, t \in [0; 2\pi])$,

якщо лінійна густина її в точці $(x; y)$ дорівнює $\gamma(x; y) = |y|$.

Розв'язання. Обчислюємо масу кривої AB за формулою:

$$m = \int_{(AB)} \gamma(x; y) dl,$$

тобто

$$m = \int_{(AB)} |y| dl.$$

Оскільки крива задана параметрично, то за формулою (2.2) отримуємо:

$$m = \int_0^{2\pi} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Знайдемо $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x'(t) = -a \sin t, \\ y'(t) = b \cos t, \end{cases} &\Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 (1 - \sin^2 t)} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 - b^2 \sin^2 t} = \\ &= \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$m = \int_0^{2\pi} |b \sin t| \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}} dt = b \sqrt{a^2 - b^2} \int_0^{2\pi} |\sin t| \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}} dt.$$

Оскільки інтеграл від періодичної функції по довільному відрізку, довжина якого дорівнює періоду функції, не залежить від вибору відрізка інтегрування, то можемо записати, що

$$m = b\sqrt{a^2 - b^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}} dt.$$

Підінтегральна функція парна, інтеграл має симетричні межі інтегрування, тому

$$\begin{aligned} m &= 2b\sqrt{a^2 - b^2} \int_0^{\pi} |\sin t| \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}} dt = 2b\sqrt{a^2 - b^2} \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}} dt = \\ &= 2b\sqrt{a^2 - b^2} \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{1 - \cos^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}} dt = \left\| \begin{array}{l} \cos t = z \\ -\sin t dt = dz \\ \sin t dt = -dz \\ t = 0 \Rightarrow z = 1 \\ t = \pi \Rightarrow z = -1 \end{array} \right\| = \\ &= 2b\sqrt{a^2 - b^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2 + \frac{b^2}{a^2 - b^2}} dz = 4b\sqrt{a^2 - b^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - z^2} dz = \\ &= 4b\sqrt{a^2 - b^2} \left(\frac{a^2}{2(a^2 - b^2)} \arcsin \frac{z\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + \frac{z}{2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - z^2} \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= 4b\sqrt{a^2 - b^2} \left(\frac{a^2}{2(a^2 - b^2)} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \right) = \\ &= \frac{2a^2b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + 2b^2. \end{aligned}$$

Відповідь. $m = \frac{2a^2b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + 2b^2.$

2.3.3 Статичні моменти та моменти інерції. Якщо маса тіла розподілена неперервно вздовж дуги кривої AB з густиною $\gamma = \gamma(x; y)$ в кожній точці вказаної кривої, то *статичні моменти* S_x та S_y дуги відносно координатних осей Ox та Oy відповідно дорівнюють:

$$S_x = \int_{(AB)} y \gamma(x; y) dl, \quad S_y = \int_{(AB)} x \gamma(x; y) dl.$$

Приклад 2.7 Знайти статичні моменти S_x та S_y дуги C астроїди

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($x, y \geq 0$) з одиничною густиною відносно координатних осей.

Розв'язання. Дуга астроїди зображена на рисунку 3.2. Параметризуємо криву:

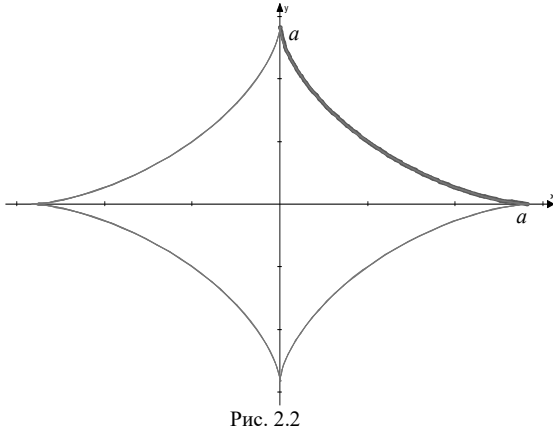


Рис. 2.2

Тоді

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} x'_t &= 3a \cos^2 t (-\sin t), \\ y'_t &= 3a \sin^2 t \cos t. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} &= \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \\ &= 3a \sin t \cos t. \end{aligned}$$

Отже, маємо, що статичний момент S_x відносно осі абсцис, враховуючи формулу (2.2), дорівнює:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_{(AB)} y dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt \left\| \begin{array}{l} \sin t = z \\ \cos t dt = dz \\ t = 0 \Rightarrow z = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 1 \end{array} \right\| = \\ &= 3a^2 \int_0^1 z^4 dz = 3a^2 \cdot \frac{z^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3a^2}{5}. \end{aligned}$$

Статичний момент S_y відносно осі Oy дорівнює:

$$\begin{aligned} S_y &= \int_{(AB)} x dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt \left\| \begin{array}{l} \cos t = z \\ -\sin t dt = dz \\ \sin t dt = -dz \\ t = 0 \Rightarrow z = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 0 \end{array} \right\| = \end{aligned}$$

$$= 3a^2 \int_1^0 z^4 (-dz) = 3a^2 \int_0^1 z^4 dz = 3a^2 \cdot \frac{z^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3a^2}{5}.$$

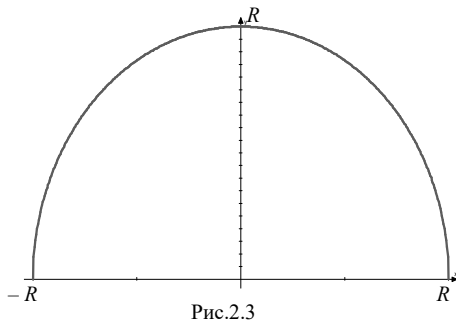
Відповідь. $S_x = S_y = \frac{3a^2}{5}.$

Моменти інерції дуги кривої AB з густиною $\gamma = \gamma(x; y)$ відносно координатних осей дорівнюють:

$$I_x = \int_{(AB)} y^2 \gamma(x; y) dl, \quad I_y = \int_{(AB)} x^2 \gamma(x; y) dl.$$

Приклад 2.8 Зайти момент інерції однорідного півкола $x^2 + y^2 = R^2$ з одиничною густиною, розташованого в верхній півплощині, відносно осі Ox .

Розв'язання. Зобразимо задане півколо (рис. 2.3). Шуканий момент інерції



$$I_x = \int_{(AB)} y^2 dl.$$

З рівняння кривої знаходимо, що $y^2 = R^2 - x^2$, тобто $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$. Півколо знаходиться в верхній півплощині, де $y \geq 0$, тоді остаточно маємо, що $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, звідки

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Згідно з формулою (2.1), маємо, що шуканий момент інерції

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-R}^R (R^2 - x^2) \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = \int_{-R}^R (R^2 - x^2) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= 2 \int_0^R (R^2 - x^2) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2R \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \\ &= 2R \left(\frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \right) \Big|_0^R = R^3 \cdot \arcsin 1 = \frac{\pi R^3}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь. $I_x = \frac{\pi R^3}{2}.$

2.3.4 Координати центра маси матеріальної кривої. Нехай задана крива AB та розподіл маси вздовж вказаної кривої є неперервною функцією густини $\gamma = \gamma(x; y)$. Тоді координати центра маси кривої визначаються наступними формулами:

$$x_C = \frac{S_y}{m}, \quad y_C = \frac{S_x}{m}.$$

Приклад 2.9 Визначити центр маси дуги циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad (\gamma(x; y) = 1).$$

Розв'язання. Нехай точка $M(x_C; y_C)$ – центр маси дуги циклоїди, тоді, згідно з формулами центра маси, маємо, що

$$x_C = \frac{S_y}{m} = \frac{\int_{(AB)} x dl}{\int_{(AB)} dl}, \quad y_C = \frac{S_x}{m} = \frac{\int_{(AB)} y dl}{\int_{(AB)} dl}.$$

Оскільки крива задана параметрично, то для знаходження вказаних криволінійних інтегралів застосовуємо формулу (2.2). Отже,

$$\begin{aligned} m &= \int_{(AB)} dl = \int_0^\pi \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^\pi \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 4a \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^\pi = -4a \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 4a; \\ S_x &= \int_{(AB)} y dl = \int_0^\pi a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a^2 \int_0^\pi \left(\sin \frac{t}{2} - \cos t \sin \frac{t}{2} \right) dt = \\ &= 2a^2 \left[\int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) dt \right] = 2a^2 \left(-2 \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^\pi = \\ &= 2a^2 \left[-3 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) + \frac{1}{3} \left(\cos \frac{3\pi}{2} - \cos 0 \right) \right] = 6a^2 - \frac{2a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}; \\ S_y &= \int_{(AB)} x dl = \int_0^\pi a(t - \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a^2 \int_0^\pi \left(t \sin \frac{t}{2} - \sin t \sin \frac{t}{2} \right) dt = \end{aligned}$$

$$= 2a^2 \left(\int_0^{\pi} t \sin \frac{t}{2} dt - 2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt \right).$$

Обчислимо кожний з отриманих інтегралів окремо. Перший інтеграл знаходимо інтегруванням частинами:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi} t \sin \frac{t}{2} dt \left\| \begin{array}{l} u = t \quad dv = \sin \frac{t}{2} dt \\ du = dt \quad v = -2 \cos \frac{t}{2} \end{array} \right\| = \\ &= -2t \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt = 4 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = 4. \end{aligned}$$

Другий інтеграл знаходимо за допомогою методу заміни змінної:

$$I_2 = -2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt \left\| \begin{array}{l} \sin \frac{t}{2} = z \\ \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} dt = dz \\ \cos \frac{t}{2} dt = 2z \\ t = 0 \Rightarrow z = 0 \\ t = \pi \Rightarrow z = 1 \end{array} \right\| = -4 \int_0^1 z^2 dz = -\frac{4}{3} z^3 \Big|_0^1 = -\frac{4}{3}.$$

Тоді

$$S_y = 2a^2(I_1 + I_2) = 2a^2 \left(4 - \frac{4}{3} \right) = 2a^2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16a^2}{3}.$$

Таким чином, отримуємо:

$$x_C = y_C = \frac{\frac{16a^2}{3}}{4a} = \frac{4a}{3}.$$

Відповідь. $x_C = y_C = \frac{4a}{3}.$