

2.4 Криволінійний інтеграл II роду та його властивості

Нехай у кожній точці деякої дуги AB плоскої кривої L визначена функція двох незалежних змінних $P(x; y)$. Точками $A_0 = A; A_1; A_2; \dots; A_n = B$ розіб'ємо дугу AB на n частинних дуг, на кожній із яких оберемо довільну точку $M_i(x_i; y_i)$. Значення функції $P(x; y)$ в обраних точках – $P(x_i; y_i)$ – помножимо на величину $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, що є проекцією частинної дуги $A_i A_{i+1}$ на вісь абсцис: $P(x_i; y_i) \Delta x_i$.

Якщо функція $P(x; y)$ неперервна в усіх точках заданої дуги AB , то існує границя суми всіх побудованих добутків $\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i) \Delta x_i$ при $\Delta x_i \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i) \Delta x_i.$$

Ця границя не залежить ні від способу розбиття дуги AB на частинні дуги, ні від вибору точок M_i на цих дугах.

Означення 2.2 Границя $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i) \Delta x_i$ називається **криволінійним інтегралом II роду від функції $P(x; y)$ по дузі AB** і позначається наступним чином:

$$\int_{(AB)} P(x; y) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i) \Delta x_i.$$

Якщо значення функції $P(x; y)$ в точці $M_i(x_i; y_i)$ – $P(x_i; y_i)$ – помножити на Δy_i , тобто на проекцію елементарної дуги $A_i A_{i+1}$ на вісь ординат Oy , то отримаємо добуток $P(x_i; y_i) \Delta y_i$.

Означення 2.3 Границя суми таких добутків за умови, що усі Δy_i прагнуть до нуля, називається **криволінійним інтегралом II роду**:

$$\int_{(AB)} P(x; y) dy = \lim_{\Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i; y_i) \Delta y_i.$$

У випадку, коли на дузі AB задано дві неперервні функції $P(x; y)$ та $Q(x; y)$, то можна розглянути криволінійні інтеграли $\int_{(AB)} P(x; y)dx$ та $\int_{(AB)} Q(x; y)dy$.

Означення 2.4 Суму вказаних вище інтегралів

$$\int_{(AB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy \quad (2.5)$$

будемо називати **криволінійним інтегралом другого роду** за умови, що обидва інтеграла $\int_{(AB)} P(x; y)dx$ та $\int_{(AB)} Q(x; y)dy$ обчислюються за одним і тим же напрямком.

Зауваження 2.3 Якщо крива AB є замкненою, то криволінійний інтеграл II роду визначається аналогічно. В цьому випадку потрібно обов'язково вказувати напрямок інтегрування, причому додатним напрямком обходу контуру вважається той, при якому область, що обмежує контур, залишається зліва. Криволінійний інтеграл по замкнутому контуру позначається наступним чином:

$$\oint_{(AB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy,$$

при цьому на колі, що знаходиться на значку інтеграла, вказується стрілкою напрям обходу.

Наведемо основні властивості криволінійного інтеграла II роду.

1. При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює знак:

$$\int_{(AB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = - \int_{(BA)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy.$$

2. Якщо точка C – внутрішня точка на дузі AB , то криволінійний інтеграл II роду можна представити у вигляді наступної суми:

$$\int_{(AB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{(AC)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy + \int_{(CB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy.$$

2.5 Обчислення криволінійного інтеграла II роду

Обчислення криволінійного інтеграла II роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

Якщо крива AB задана явним рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_{(AB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_a^b [P(x; f(x)) + Q(x; f(x)) \cdot f'(x)]dx.$$

Приклад 2.10 Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $I = \int_{(L)} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, де L – ламана OAB , причому $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(4; 2)$.

Розв’язання. Криву інтегрування L можна розбити на дві (рис. 2.4): OA та AB . Тоді, згідно з властивостями криволінійного інтегралу другого роду, маємо:

$$I = \int_{(OA)} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy + \int_{(AB)} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy.$$

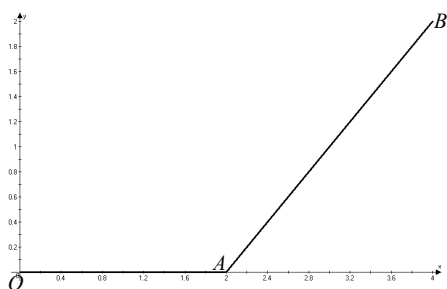


Рис. 2.4

Рівняння відрізка OA : $y = 0$ ($0 \leq x \leq 2$), тобто у цьому випадку $f(x) = 0$, а тоді $f'(x) = 0$.

Запишемо рівняння AB як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$(AB): \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = x - 2.$$

Рівняння відрізка AB має вигляд:

$$AB: y = x - 2 \quad (2 \leq x \leq 4).$$

У цьому випадку $f(x) = x - 2 \Rightarrow f'(x) = 1$.

Отже,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 [(x-0)^2 + (x+0)^2 \cdot 0] dx + \int_2^4 [(x-(x-2))^2 + (x+(x-2))^2 \cdot 1] dx = \\ &= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (4 + (2x-2)^2) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + 4 \int_2^4 dx + 4 \int_2^4 (x-1)^2 dx = \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} + 4x \Big|_2^4 + 4 \cdot \left. \frac{(x-1)^3}{3} \right|_2^4 = \frac{8}{3} + 4 \cdot (4-2) + \frac{4}{3} \cdot ((4-1)^3 - (2-1)^3) = \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3} + 8 + \frac{4}{3} \cdot (27 - 1) = \frac{32}{3} + \frac{104}{3} = \frac{136}{3}.$$

Відповідь. $I = \frac{136}{3}$.

Якщо крива інтегрування AB задана *параметрично*:

$$(AB): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то криволінійний інтеграл II роду дорівнює:

$$\int_{(AB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t); \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t); \psi(t)) \cdot \psi'(t)] dt.$$

Зауваження 2.4 Аналогічні формули мають місце й у тривимірному випадку. Якщо крива інтегрування AB задана *параметрично* рівняннями

$$(AB): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \xi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то:

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t); \psi(t); \xi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t); \psi(t); \xi(t)) \cdot \psi'(t) + R(\varphi(t); \psi(t); \xi(t)) \cdot \xi'(t)] dt. \end{aligned}$$

Приклад 2.11 Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $I = \int_{(AB)} y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz$, де AB – відрізок прямої від точки $A(1; 0; 2)$ до точки $B(3; 1; 4)$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння прямої AB :

$$(AB): \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t, \\ z = 2t + 2. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\varphi(t) = 2t + 1 \Rightarrow \varphi'(t) = 2,$$

$$\begin{aligned}\psi(t) = t &\Rightarrow \psi'(t) = 1, \\ \xi(t) = 2t + 2 &\Rightarrow \xi'(t) = 2.\end{aligned}$$

При переміщенні від точки A до точки B параметр t змінюється від $t = y_A = 0$ до $t = y_B = 1$. Отже,

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \left[t^2 \cdot 2 + ((2t+1)^2 + 2t+2) \cdot 1 + (2t+1+t+(2t+2)^2) \cdot 2 \right] dt = \\ &= \int_0^1 (2t^2 + 4t^2 + 6t + 3 + 8t^2 + 22t + 10) dt = \int_0^1 (14t^2 + 28t + 13) dt = \\ &= \left(\frac{14t^3}{3} + \frac{28t^2}{2} + 13t \right) \Big|_0^1 = \frac{14}{3} + 14 + 13 = \frac{95}{3}.\end{aligned}$$

Відповідь. $I = \frac{95}{3}$.

2.6 Умова незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

У загальному випадку при одному й тому ж підінтегральному виразі значення криволінійного інтеграла другого роду залежить від кривої (від її форми), за якою він знаходиться, та від координат початкової та кінцевої точок.

Означення 2.5 Криволінійний інтеграл другого роду

$\int_{(AB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ називають **інтегралом, що не залежить від шляху**

інтегрування AB , якщо його значення не залежить від вигляду цієї кривої.

Теорема 2.1 Якщо функції $P(x; y)$ та $Q(x; y)$ визначені та неперервні

разом зі своїми частинними похідними першого порядку $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у деякій

замкненій обмеженій однозв'язній області D , то для того щоб криволінійний інтеграл II роду (2.5) не залежав від шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб у всіх точках цієї області виконувалась рівність:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Приклад 2.12 З'ясувати, чи залежить криволінійний інтеграл

$I = \int_{(AB)} (6xy + 4y^2 + 5y)dx + (3x^2 + 8xy + 5x)dy$ від шляху інтегрування.

Розв'язання. Заданий криволінійний інтеграл не буде залежати від шляху інтегрування, якщо буде виконуватися умова (2.6). Для перевірки вказаної умови знайдемо частинні похідні функцій $P(x; y) = 6xy + 4y^2 + 5y$ та $Q(x; y) = 3x^2 + 8xy + 5x$ за змінними y та x відповідно:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x + 8y + 5,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 8y + 5.$$

Порівнюючи отримані вирази, робимо висновок, що

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

а тому заданий криволінійний інтеграл від шляху інтегрування не залежить.

Відповідь. Криволінійний інтеграл I не залежить від шляху інтегрування.

Зауваження 2.5 Умова (2.6) є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ був повним диференціалом деякої однозначної функції. Тому, щоб криволінійний інтеграл другого роду (2.5) не залежав від шляху інтегрування AB , а лише від його меж, необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз $P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ був повним диференціалом деякої функції.

Зауваження 2.6 Якщо виконується умова (2.6), то криволінійний інтеграл другого роду (2.5), що обчислюється за довільним замкненим контуром, дорівнює нулю:

$$\oint_{(AB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0 \text{ за умови, що } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Приклад 2.13 Перевірити, чи буде криволінійний інтеграл другого роду $I = \oint_{(AB)} (x^2 + y^2)(x dx + y dy)$ по замкненому контуру AB дорівнювати нулю.

Підтвердити отриманий висновок безпосереднім інтегруванням по довільному замкненому контуру.

Розв'язання. Перевіримо спочатку виконання умови (2.6). У нашому випадку

$$P(x; y) = (x^2 + y^2)x = x^3 + xy^2,$$

$$Q(x; y) = (x^2 + y^2)y = x^2y + y^3.$$

Тоді

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 + 2xy = 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy + 0 = 2xy.$$

Тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, а тоді заданий криволінійний інтеграл другого роду I , що обчислюється по замкнутому контуру AB , дорівнює нулю.

Тепер безпосередньо обчислимо цей інтеграл по довільному замкненому контуру. У якості такого контуру оберемо, наприклад, коло одиничного радіусу з центром у початку координат: $x^2 + y^2 = 1$.

Параметризуємо криву:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0; 2\pi].$$

Тоді

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \cos t &\Rightarrow \varphi'(t) = -\sin t, \\ \psi(t) = \sin t &\Rightarrow \psi'(t) = \cos t. \end{aligned}$$

Тобто

$$\begin{aligned} I &= \oint_{(AB)} (x^2 + y^2)(x dx + y dy) = \oint_{(AB)} (x^3 + xy^2) dx + (x^2 y + y^3) dy = \\ &= \int_0^{2\pi} [(\cos^3 t + \cos t \sin^2 t) \cdot (-\sin t) + (\cos^2 t \sin t + \sin^3 t) \cdot \cos t] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t + \sin t \cos^3 t + \sin^3 t \cos t] dt = \int_0^{2\pi} 0 \cdot dt = 0. \end{aligned}$$

Відповідь. Заданий криволінійний інтеграл I , що обчислюється по замкненому контуру, дорівнює нулю.

Зауваження 2.7 Якщо криволінійний інтеграл II роду (2.5) не залежить від шляху інтегрування, то використовується позначення

$$\oint_{(AB)} P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \int_{(x_A; y_A)}^{(x_B; y_B)} P(x; y) dx + Q(x; y) dy.$$

Тут $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ – координати початкової та кінцевої точок шляху інтегрування відповідно, а у якості шляху інтегрування у цьому випадку зазвичай обирається найпростіший шлях – відрізок прямої, що сполучає вказані точки.

2.7 Відновлення функції за її повним диференціалом

Розглянемо задачу відновлення функції $z = z(x; y)$, якщо задано її повний диференціал $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = P(x; y) dx + Q(x; y) dy$.

Вираз $dz = P(x; y) dx + Q(x; y) dy$ є повним диференціалом деякої функції $z(x, y)$, якщо виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Приклад 2.14 Знайти функцію $z(x; y)$, якщо
 $dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$.

Розв'язання. Уведемо позначення. Нехай

$$P(x; y) = x^2 + 2xy - y^2, Q(x; y) = x^2 - 2xy - y^2,$$

тоді

$$dz = P(x; y)dx + Q(x; y)dy. \quad (2.7)$$

Перевіримо виконання рівності (2.6):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y.$$

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то права частина виразу (2.7) є повним диференціалом

функції $z(x; y)$, а криволінійний інтеграл $\int_{(AB)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$

не залежить від шляху інтегрування.

Інтегруємо (2.7):

$$\int_{(AB)} dz = \int_{(AB)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$$

Інтегрування будемо здійснювати по ламаній ACB (рис. 2.5):

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} dz = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy + \int_{(CB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy.$$

На відрітку AC маємо:

$$x(y) = f(y) = x_0, y_0 \leq y \leq y, \\ f'(y) = 0.$$

На відрітку CB маємо:

$$y = f(x) = y, x_0 \leq x \leq x, \\ f'(x) = 0.$$

Тоді

$$z \Big|_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} = \int_{y_0}^y [P(x_0; y) \cdot 0 + Q(x_0; y)]dy + \int_{x_0}^x [P(x; y) + Q(x; y) \cdot 0]dx.$$

Оскільки

$$z \Big|_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} = z(x; y) - z(x_0; y_0),$$

то, позначивши $z(x_0; y_0) = C = \text{const}$, отримаємо, що

$$z(x; y) = \int_{x_0}^x P(x; y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0; y)dy + C.$$

Підставивши замість $P(x; z)$ та $Q(x; y)$ їх вирази та прийнявши, що $x_0 = y_0 = 0$, маємо:

$$\begin{aligned} z(x; y) &= \int_0^x (x^2 + 2xy - y^2) dx + \int_0^y (-y^2) dy + C = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 \right) \Big|_0^x - \frac{y^3}{3} \Big|_0^y + C = \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Зробимо перевірку. Оскільки повний диференціал функції має вигляд $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, то потрібно показати, що $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x; y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x; y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C \right) = x^2 + 2xy - y^2 = P(x; y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C \right) = x^2 - 2xy - y^2 = Q(x; y).$$

Отже, $dz = P(x; y)dx + Q(x; y)dy$.

Відповідь. $z(x; y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C.$

2.8 Зв'язок криволінійного інтеграла другого роду з подвійним інтегралом. Формула Гріна

Криволінійний інтеграл по замкненому контуру L , який обмежує однозв'язну область D , може бути зведений до подвійного інтеграла по області D .

Якщо функції $P(x; y)$ та $Q(x; y)$, а також їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$

неперервні в області D та на контурі L , який її обмежує таким чином, що обхід контуру є додатнім, тобто область D залишається зліва, то має місце **формула Гріна**:

$$\oint_{(L)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Деякі криволінійні інтеграли по замкненому контуру зручно обчислювати, зводячи їх до подвійного інтеграла.

Приклад 2.15 За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл $I = \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left(xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) dy$, де L – це контур прямокутника з вершинами $A(3; 2)$, $B(6; 2)$, $C(6; 4)$ та $F(3; 4)$.

Розв'язання. Зобразимо контур L (рис. 2.6), вказавши додатній напрямок обходу, щоб область D , яка обмежена цим контуром, залишалася зліва. Визначимо нерівності, що задають область D .

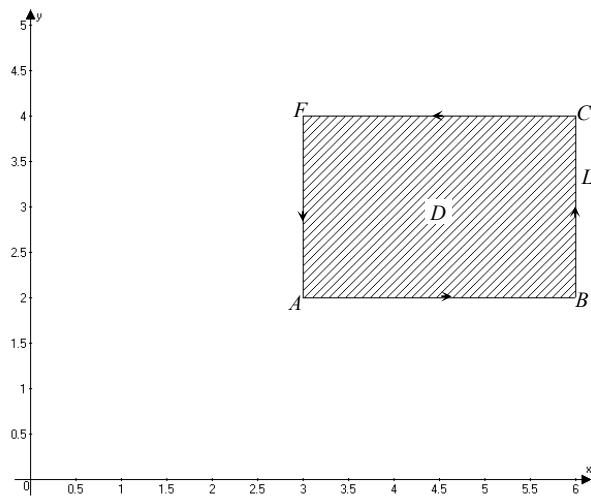


Рис. 2.6

З рисунка робимо висновок, що

$$D: \begin{cases} 3 \leq x \leq 6, \\ 2 \leq y \leq 4. \end{cases}$$

У даному інтегралі $P(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Q(x; y) = y \left(xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right)$,

тоді частинні похідні

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[y \left(xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) \right] = y^2 + y \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x \right) = y^2 + y \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

За формулою Гріна маємо:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy = \iint_D y^2 dx dy = \\ &= \int_3^6 dx \int_2^4 y^2 dy = x \left[\frac{y^3}{3} \right]_2^4 = (6-3) \cdot \frac{4^3 - 2^3}{3} = 3 \cdot \frac{56}{3} = 56. \end{aligned}$$

Відповідь. $I = 56$.

2.9 Застосування криволінійного інтеграла другого роду до обчислення площ

Площа S плоскої фігури D , обмеженої кусочно-гладкою кривою L , обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \oint_{(L)} xdy - ydx.$$

Інтегрування за контуром L ведеться в додатному напрямку, тобто так, щоб область D залишалася зліва.

Зауваження 2.8 Підінтегральний вираз достатньо легко запам'ятати, якщо його записати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = xdy - ydx.$$

Зауваження 2.9 Для обчислення площі також можна використовувати одну з наступних формул:

$$S = - \oint_{(L)} ydx \text{ або } S = \oint_{(L)} xdy.$$

Приклад 2.16 За допомогою криволінійного інтеграла II роду обчислити площу фігури, що обмежена еліпсом $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi.$

Розв'язання. Зобразимо область, площу якої потрібно обчислити (рис. 2.7). Використовуючи другу формулу із зауваження 2.9, отримаємо, що шукана площа

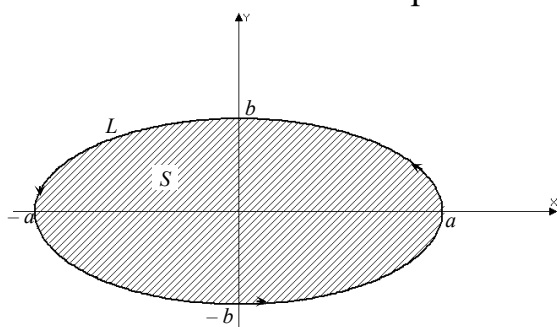


Рис. 2.7

$$S = \oint_{(L)} xdy.$$

Враховуючи те, що крива L задана параметрично, отримаємо:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \\ &= ab \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \frac{ab}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{ab}{2} (2\pi + 0 - 0 - 0) = \pi ab \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Відповідь. $S = \pi ab$ кв. од.

Відповідь. $I = 3a^4.$