

Лекція 4

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Як і криволінійні, поверхневі інтеграли бувають двох типів: першого і другого роду. В обох випадках областю інтегрування є поверхня.

1. Задача про обчислення маси матеріальної поверхні, що приводить до поняття поверхневого інтеграла першого роду.

Розглянемо поверхню σ (рис. 4.1), на якій розподілена маса з

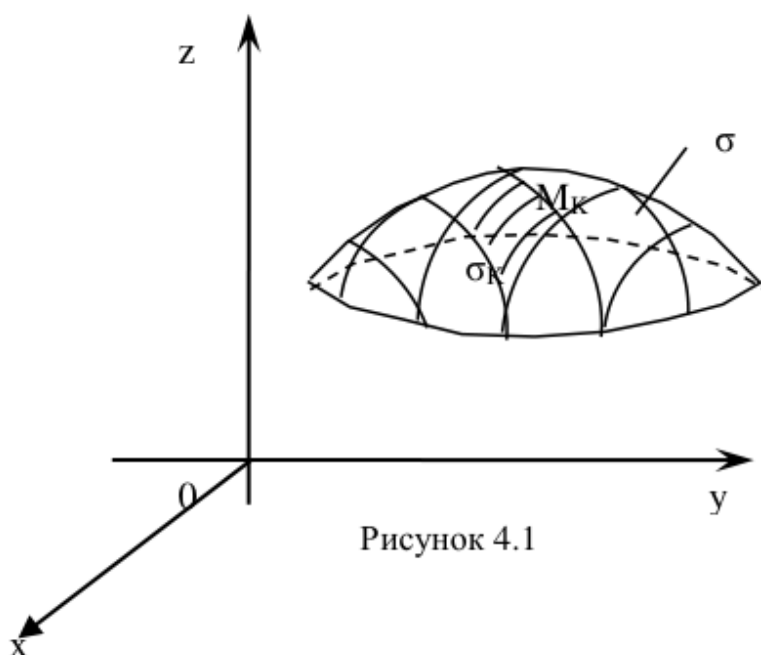


Рисунок 4.1

поверхневою густиною $\rho = \rho(x, y, z)$, де під поверхневою густиною ми розуміємо масу одиниці площі поверхні. Поставимо задачу про знаходження маси всієї поверхні.

Розіб'ємо поверхню довільним чином на n частин σ_k , площі яких

позначимо через $\Delta\sigma_k$. Якщо площа $\Delta\sigma_k$ мала, то значення поверхневої густини в точках області σ_k мало відрізняється від її значення в будь-якій точці $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \sigma_k$, тому маса σ_k наближено дорівнює

$$\Delta m_k \approx \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k$$

Маса всієї поверхні наближено виражається сумою мас частин розбиття:

$$m \approx \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k$$

Щоб отримати точне значення, перейдемо до границі, коли $\lambda \rightarrow 0$, де λ – найбільший із діаметрів частин σ_k . Отже,

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k \quad (4.1)$$

2. Означення та властивості поверхневого інтеграла першого роду.

Нехай на поверхні σ задана функція $u=f(x,y,z)$, до якої формально застосуємо алгоритм розв'язування попередньої задачі. Виконаємо такі операції :

1) Поверхню σ довільним чином розіб'ємо на n частин σ_k з площами $\Delta\sigma_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) і найбільший із діаметрів цих частин позначимо через λ .

2) На кожній частині σ_k виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, в якій функція набуває значення $f(x_k, y_k, z_k)$

3) Побудуємо суму

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k, \quad (4.2)$$

яка називається інтегральною сумою функції $u=f(x,y,z)$ по поверхні σ .

Означення Якщо при $\lambda \rightarrow 0$ існує границя інтегральної суми (4.2), яка не залежить від способу розбиття поверхні σ на частини $\Delta\sigma_k$ і від вибору точок M_k , то ця границя називається *поверхневим інтегралом першого роду* і позначається :

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k \quad (4.3)$$

Відмітимо без доведення, що границя інтегральної суми існує, якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна, а поверхня σ є гладкою (в кожній точці існує дотична площина) і обмеженою. В цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається *інтегровною* по поверхні σ , σ - областю інтегрування.

Означення поверхневого інтеграла першого роду по суті аналогічне означенню подвійного інтеграла. Тому властивості подвійних інтегралів без особливих змін поширюються на поверхневі інтеграли.

3. Обчислення поверхневих інтегралів першого роду. Нехай потрібно обчислити поверхневий інтеграл першого роду

$$I = \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$$

Тут σ - гладка поверхня, задана рівнянням $z=z(x, y)$, де $z(x, y)$ разом з похідними $z'_x(x, y)$ і $z'_y(x, y)$ неперервна в замкненій області D , яка є проекцією поверхні σ на площину xOy (рис. 4.2). Нехай функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ і, отже, інтегровна на цій поверхні. Виділимо на поверхні σ частину з площею $d\sigma$, на якій виберемо

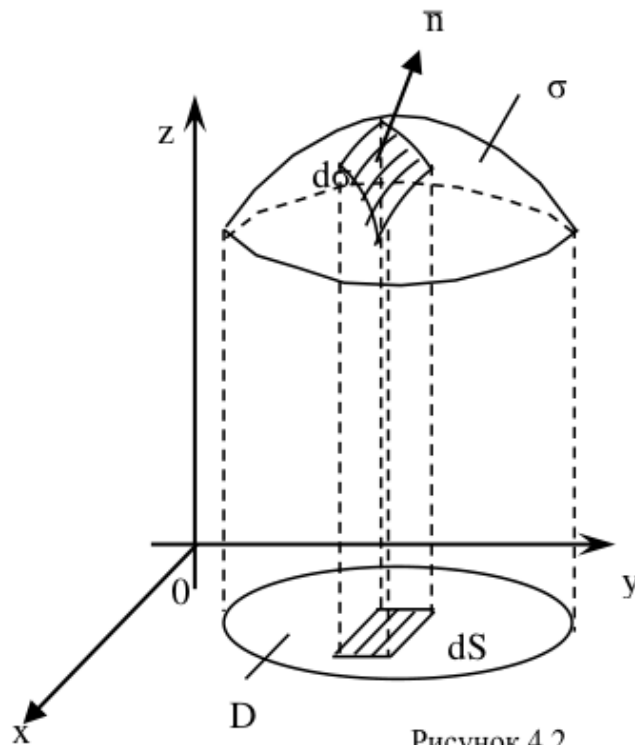


Рисунок 4.2

довільну точку і в цій точці встановимо нормаль $\vec{n}$ до поверхні, точніше, до дотичної площини, проведеної до поверхні у вибраній точці. Припустимо, що нормаль $\vec{n}$ утворює гострий кут γ з віссю Oz . Запишемо рівняння поверхні σ у вигляді :

$$F(x, y, z) = z - \varphi(x, y) = 0$$

. Тоді, як відомо, вектор нормалі $\vec{n}$ до цієї поверхні має координати :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

тобто $\vec{n} = \left\{ -\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1 \right\}$. Запишемо зв'язок площі частини $d\sigma$ з

площею ds її проекції на площину xOy :

$$d\sigma = \frac{ds}{\cos \gamma}, \text{ де } ds = dxdy, \cos \gamma = \frac{1}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}.$$

Отже,

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dxdy \quad (4.4)$$

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла першого роду можна звести до обчислення подвійного інтеграла по області D за такою схемою:

$$I = \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \left| \begin{array}{l} z = \varphi(x, y) \\ d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ \sigma \rightarrow D \end{array} \right| = \iint_D f[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (4.5)$$

Під записом $\sigma \rightarrow D$ тут і надалі розуміємо, що поверхня σ відображається в область D на площині xOy .

Приклад Обчислити $I = \iint_{\sigma} (3x + 4y + 2z) d\sigma$, де σ - частина площини $x + y + z = 2$, розміщена у першому октанті (рис. 4.3).

Розв'язування Запишемо рівняння площини σ у вигляді:

$$z = 2 - x - y, \text{ тоді } \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1, \quad d\sigma = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy.$$

За формулою (4.5) маємо

$$I = \left| \begin{array}{l} z = 2 - x - y \\ d\sigma = \sqrt{3} dx dy \\ \sigma \rightarrow D \end{array} \right| = \iint_D (3x + 4y + 4 - 2x - 2y) \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \iint_D (x + 2y + 4) dx dy$$

Тут область D - проекція площини σ на площину xOy (рис. 4.4). Тоді :

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{3} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x + 2y + 4) dy = \sqrt{3} \int_0^2 \left[(x + 4)y + 2 \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^{2-x} dx = \sqrt{3} \int_0^2 (12 - 6x) dx = \\ &= \sqrt{3} (12x - 3x^2) \Big|_0^2 = 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

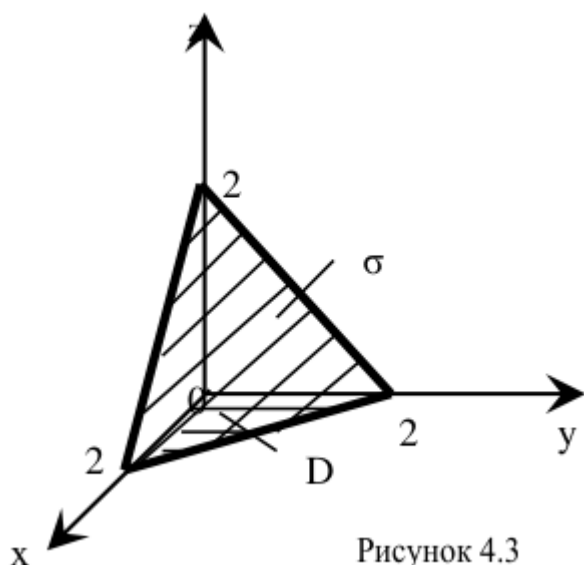


Рисунок 4.3

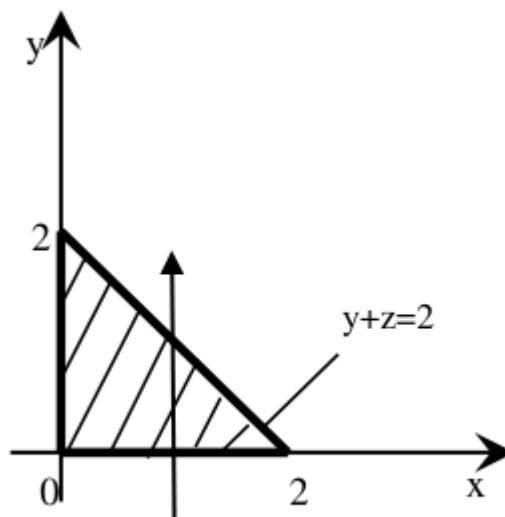


Рисунок 4.4

4. Застосування поверхневих інтегралів першого роду

1) Маса матеріальної пластини σ з поверхневою густиною $\rho = \rho(x, y, z)$:

$$m = \iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma \quad (4.6)$$

2) Площа поверхні σ

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma \quad (4.7)$$

3) Статичні моменти матеріальної поверхні σ відносно координатних площин

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iint_{\sigma} z\rho(x, y, z) d\sigma \\ M_{xz} &= \iint_{\sigma} y\rho(x, y, z) d\sigma \\ M_{yz} &= \iint_{\sigma} x\rho(x, y, z) d\sigma \end{aligned} \quad (4.8)$$

4) Координати центра мас $C(x_c, y_c, z_c)$ матеріальної поверхні з густиною $\rho = \rho(x, y, z)$

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} x\rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma} \\ y_c &= \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} y\rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma} \\ z_c &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} z\rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Якщо поверхня однорідна, тобто $\rho = \text{const}$, то формули (4.9) набудуть простішого вигляду

$$x_c = \frac{\iint_{\sigma} x d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma} ; \quad y_c = \frac{\iint_{\sigma} y d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma} ; \quad z_c = \frac{\iint_{\sigma} z d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma} \quad (4.10)$$

5) Моменти інерції матеріальної поверхні σ з густиною $\rho = \rho(x, y, z)$ відносно координатних осей і початку координат.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma \\ I_y &= \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma \\ I_z &= \iint_{\sigma} (y^2 + x^2) \rho(x, y, z) d\sigma \\ I_0 &= \iint_{\sigma} (y^2 + z^2 + x^2) \rho(x, y, z) d\sigma \end{aligned} \quad (4.11)$$

5. Поняття про двосторонні та односторонні поверхні

Нехай маємо поверхню σ (рис. 4.9). Виберемо на цій поверхні будь-який замкнений контур Γ і на ньому точку M , в якій встановимо

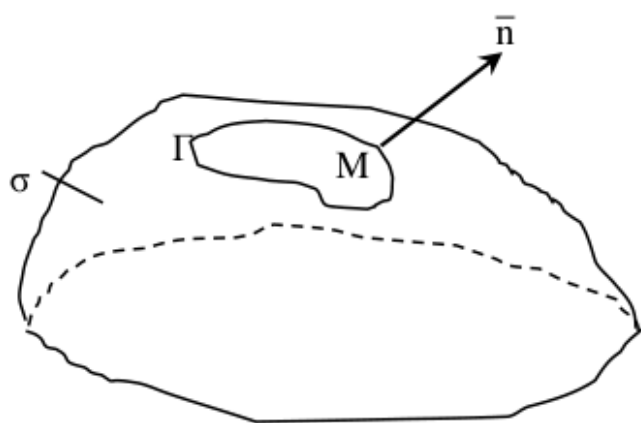


Рисунок 4.9

нормаль $\vec{n}$ до поверхні.

Означення Поверхня σ називається *двосторонньою* або *орієнтованою*, якщо після обходу будь-якого замкнутого контуру Γ , що лежить на поверхні і не має спільних точок з її границею, напрям нормалі $\vec{n}$ в точці M контуру не змінюється. В протилежному випадку поверхня називається *односторонньою*.

Прикладом односторонньої поверхні є лист Мьобіуса (рис. 4.10). Тут існують такі замкнені контури Γ , що після обходу по них нормаль

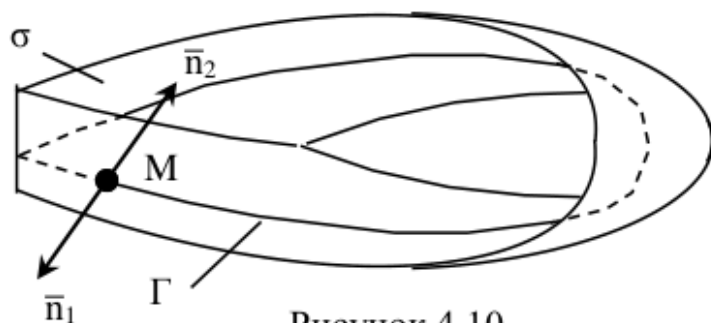


Рисунок 4.10

$\vec{n}_1$ до поверхні в точці M буде мати протилежний

напрямок $n_2 = -n_1$. В подальшому ми будемо розглядати лише двосторонні поверхні, до яких належать всі гладкі поверхні, що задаються рівнянням $z = \varphi(x, y)$. Орієнтація поверхні здійснюється за допомогою вибору нормалі до поверхні, що дозволяє розрізняти зовнішню та внутрішню сторони поверхні..

6. Задача про обчислення потоку рідини через поверхню, що приводить до поняття поверхневого інтеграла другого роду.

Нехай дана просторова область, заповнена рідиною, що рухається зі швидкістю $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, де $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$. Треба обчислити кількість рідини Π , що протікає за одиницю часу через задану поверхню σ .

Розіб'ємо цю поверхню на n частин σ_k ($k=1, 2, \dots, n$) з площами $\Delta\sigma_k$.

Якщо $\Delta\sigma_k$ малі, то можна вважати, що для всіх точок в частині σ_k швидкість стала і дорівнює швидкості в деякій точці $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \sigma_k$, а поверхні σ_k - плоскі.

Відомо, що кількість рідини, що протікає через частину σ_k за одиницю часу, дорівнює добутку проекції швидкості на вісь, яка визначається ортом нормалі до σ_k , на площу $\Delta\sigma_k$. Координатами орта нормалі є напрямні косинуси, тобто $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, а проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{n}$ є скалярний добуток: $\text{пр}_n \vec{a} = \vec{a}\vec{n}$. Отже :

$$\Delta\Pi_k \approx \vec{a}\vec{n}\Delta\sigma_k = [P(x_k, y_k, z_k)\cos\alpha + Q(x_k, y_k, z_k)\cos\beta + R(x_k, y_k, z_k)\cos\gamma]\Delta\sigma_k$$

Кількість рідини, що протікає через всю поверхню σ за одиницю часу, наближено виражається формулою:

$$\Pi \approx \sum_{k=1}^n [P(x_k, y_k, z_k)\cos\alpha + Q(x_k, y_k, z_k)\cos\beta + R(x_k, y_k, z_k)\cos\gamma]\Delta\sigma_k.$$

Точне значення цієї величини одержимо, якщо знайдемо границю суми, коли $\lambda \rightarrow 0$, де λ - найбільший з діаметрів частин σ_k :

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [P(x_k, y_k, z_k)\cos\alpha + Q(x_k, y_k, z_k)\cos\beta + R(x_k, y_k, z_k)\cos\gamma]\Delta\sigma_k \quad (4.12)$$

Добутки $\cos\alpha\Delta\sigma_k, \cos\beta\Delta\sigma_k, \cos\gamma\Delta\sigma_k$ в (4.12) є проєкціями поверхонь σ_k відповідно на координатні площини yOz, xOz, xOy . Позначимо їх через $(\Delta S_{yz})_k, (\Delta S_{xz})_k, (\Delta S_{xy})_k$, тобто

$$\cos\alpha\Delta\sigma = (\Delta S_{yz})_k, \cos\beta\Delta\sigma = (\Delta S_{xz})_k, \cos\gamma\Delta\sigma = (\Delta S_{xy})_k \quad (4.13)$$

Площі проєкцій беремо зі знаком плюс або мінус в залежності від того, який кут (гострий чи тупий) утворює нормаль $\vec{n}$ до поверхні з відповідною координатною віссю. З урахуванням (4.14):

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [P(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{yz})_k + Q(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xz})_k + R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k] \quad (4.14)$$

7. Означення та властивості поверхневого інтеграла другого роду.

Відійдемо від конкретного змісту попередньої задачі і перенесемо алгоритм її розв'язування на будь-яку функцію $R = R(x, y, z)$, визначену і неперервну на гладкій орієнтованій поверхні σ .

Виконаємо такі операції:

1) Розіб'ємо поверхню σ довільним чином на n частин σ_k ($k=1, 2, \dots, n$)

2) В кожній з частин σ_k виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, в якій функція R має значення $R = R(x_k, y_k, z_k)$

3) Побудуємо суму

$$\sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k, \quad (4.16)$$

яка називається інтегральною сумою для функції R по поверхні σ . Тут $(\Delta S_{xy})_k$ - величина проєкції σ_k на площину xOy , що дорівнює площі області, в яку проєктується σ_k на xOy , взятої із знаком плюс, якщо нормаль до поверхні в точці M_k утворює з віссю Oz гострий кут, і зі знаком мінус, якщо вказаний кут - тупий. Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей σ_k .

Означення Якщо при $\lambda \rightarrow 0$ існує границя інтегральної суми (4.16), яка не залежить від способу розбиття поверхні σ на частини σ_k і від вибору точок M_k , то ця границя називається *поверхневим інтегралом другого роду* від функції $R(x, y, z)$ по поверхні σ . Позначається:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k \quad (4.17)$$

Відмітимо, що ця границя існує, якщо двостороння поверхня σ є обмеженою і гладкою і функція $R(x, y, z)$ - неперервна на ній.

Аналогічно визначаються поверхневі інтеграли другого роду для функцій $Q = Q(x, y, z)$ і $P = P(x, y, z)$, неперервних на поверхні σ :

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q(x_k, y_k, z_k) (\Delta S_{xz})_k \quad (4.18)$$

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(x_k, y_k, z_k) (\Delta S_{xy})_k \quad (4.19)$$

Суму (4.17)-(4.19) називають загальним поверхневим інтегралом другого роду і позначають :

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma} P dy dz + \iint_{\sigma} Q dx dy + \iint_{\sigma} R dx dy \quad (4.20)$$

Зауваження Поверхневий інтеграл другого роду має ті ж властивості, що і поверхневий інтеграл першого роду, але на відміну від останнього при зміні сторони поверхні він змінює знак на протилежний.

8. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду.

Розглянемо поверхневий інтеграл другого роду $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$, де σ -гладка поверхня, задана рівнянням $z = \varphi(x, y)$. Припустимо, що поверхня σ взаємно-однозначно проектується в область D площини xOy . За означенням (4.17)

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k) (\Delta S_{xy})_k,$$

де $(\Delta S_{xy})_k$ - величина проекції області σ_k на площину xOy , тобто площа області, в яку проектується область σ_k на xOy , взята зі знаком плюс, якщо нормаль до поверхні в точці M_k утворює з віссю Oz гострий кут, і зі знаком мінус, якщо цей кут тупий.

Оскільки

$$\sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k = \sum_{k=1}^n R[x_k, y_k, \varphi(x_k, y_k)](\Delta S_{xy})_k,$$

то, переходячи до границі при $\lambda \rightarrow 0$, одержимо :

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_D R[x, y, \varphi(x, y)] dx dy \quad (4.21)$$

для зовнішньої сторони поверхні, тобто у випадку, коли $\cos \gamma > 0$, де γ - кут між нормаллю до поверхні і віссю Oz ;

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_D R[x, y, \varphi(x, y)] dx dy \quad (4.22)$$

для внутрішньої сторони поверхні, тобто у випадку, коли $\cos \gamma < 0$, (γ - тупий кут). Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли другого роду по координатах x, z і y, z (для функцій Q і P).

Таким чином, обчислення поверхневих інтегралів другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів.

Приклад Обчислити $I = \int_{\sigma} z dx dy + x dx dz + y dy dz$, де σ - частина

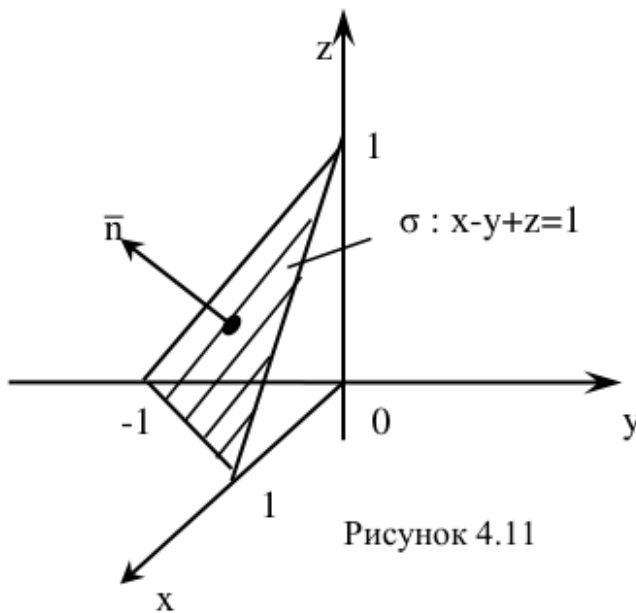


Рисунок 4.11

площини $x - y + z = 1$, вирізана координатними площинами. Орієнтація поверхні задається нормаллю $\bar{n}$ (рис. 4.11).

Розв'язування Запишемо цей інтеграл, як суму трьох інтегралів $I = I_1 + I_2 + I_3$, і

знайдемо кожний доданок окремо.

$$I_1 = \iint_{\sigma} z dx dy = \left| \begin{array}{l} \sigma : z = 1 - x + y \\ \sigma \rightarrow D_{xoy} \\ \cos \gamma > 0 \end{array} \right| = \iint_{D_{xoy}} (1 - x + y) dx dy.$$

Тут D_{xoy} - проекція поверхні σ на площину xOy (рис. 4.12). Обчислимо подвійний інтеграл :

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 [(1-x) + y] dy = \int_0^1 \left[(1-x)y + \frac{y^2}{2} \right]_{x-1}^0 dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}$$

$$I_2 = \iint_{\sigma} x dx dz = \left| \frac{\sigma \rightarrow D_{xoz}}{\cos \beta > 0} \right| = - \iint_{D_{xoz}} x dx dz$$

де D_{xoz} - проекція σ на площину xOz (рис.4.13)

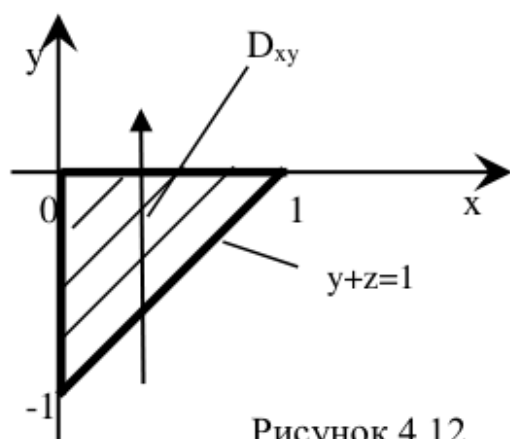
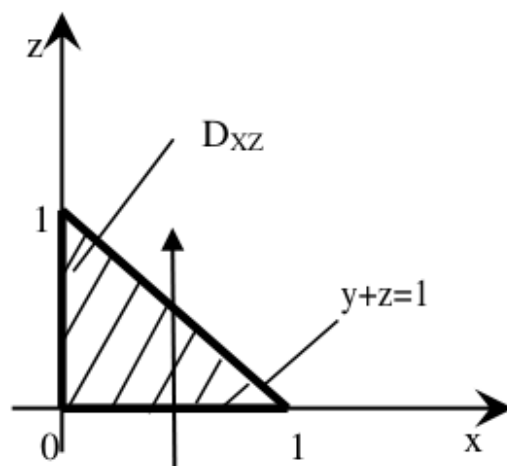


Рисунок 4.12



$$I_3 = \iint_{\sigma} y dy dz = \left| \frac{\sigma \rightarrow D_{yoz}}{\cos \alpha > 0} \right| = - \iint_{D_{yoz}} y dy dz$$

де D_{yoz} - проекція σ на площину yOz (рис.4.14)

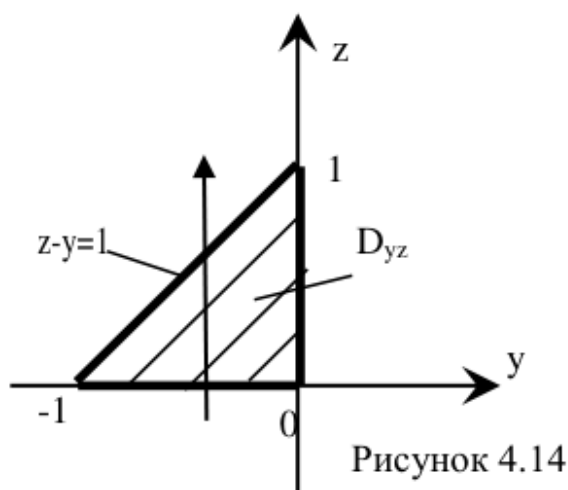


Рисунок 4.14

$$I_3 = \int_{-1}^0 y dy \int_0^{1+y} dz = \int_{-1}^0 y [z]_0^{1+y} dy =$$

$$= - \int_{-1}^0 (y - y^2) dy =$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{-1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6}$$

Отже, шуканий інтеграл

$$I = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$