

Контрольна робота №3

Варіант 11

1. (8 балів) Яка з умов гарантує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Сумою якого ряду є функція $\ln x$?

а) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$; б) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$;
в) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$; г) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \dots$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Які з наведених нижче формул є правильними ?

1) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ (D - проекція V на площину Oxy);

2) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dx \int_c^d dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$;

3) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_k^l dz \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dx \int_{\varphi_1(x, z)}^{\varphi_2(x, z)} f(x, y, z) dy$;

4) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dy dz \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y, z) dx$ (D - проекція V на площину Oyz).

а) 1 і 4; б) тільки 3; в) 1 і 3; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$, то для обчислення криволінійного інтеграла першого роду має місце формула:

а) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) x'(y) dy$; б) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) (1 + x'^2(y)) dy$;

в) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy$; г) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) dy$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Формула Стокса встановлює зв'язок між:

а) криволінійними і поверхневими інтегралами;
б) криволінійними і потрійними інтегралами;
в) подвійними і криволінійними інтегралами;
г) подвійними і потрійними інтегралами; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n+1)^2}$; розбіжними є:

а) 1 і 3; б) тільки 2; в) 2 і 3; г) 1 і 2; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos^2 \frac{\pi}{2n}$; 1) збіжний умовно;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; 2) розбіжний;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{n}$; 3) збіжний абсолютно.

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-1, 2-3, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$.

а) $(-e-3; e-3)$; б) $[-e; e]$; в) $[-e-3; e-3]$; г) $[-e; e-3]$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 10-й член розкладу в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -2$ функції $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7}$.

а) $\frac{(x+2)^{20}}{3^{21}}$; б) $-\frac{(x+2)^{18}}{3^{10}}$; в) $-\frac{(x+2)^{20}}{3^{21}}$; г) $-\frac{(x+2)^{20}}{3^{19}}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = xy - y^2$, $y(0) = 0,2$.

а) $y = 0,2 + 3x - 0,5x^2 + \dots$; б) $y = 0,2 - 0,04x + 0,108x^2 + \dots$;

в) $y = 0,2 + 14x - 0,5x^2 + \dots$; г) $y = 3 - 2x + \frac{1}{5}x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Змінити порядок інтегрування: $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

а) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$; б) $\int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$; в) $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$;

г) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 f(x, y) dx$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V x dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq x + y$.

а) $\frac{28}{3}$; б) $\frac{3}{28}$; в) $\frac{4}{30}$; г) $\frac{23}{7}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – ламана ABC, що з'єднує точки A(-2;0), B(0;4), C(2;0).

а) $-\frac{64}{3}$; б) $\frac{64}{3}$; в) $\frac{8}{3}$; г) $-\frac{4}{3}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

а) 1,5; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 2; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Знайти модуль r та аргумент φ комплексного числа $z = \frac{2}{\sqrt{3} + i}$.

а) $r = 2, \varphi = -\frac{\pi}{6}$; б) $r = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}$; в) $r = 1, \varphi = -\frac{\pi}{6}$; г) $r = 2, \varphi = -\frac{\pi}{3}$; д) інша відповідь.

Варіант 12

1. (8 балів) Яка з умов гарантує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$;

в) $\int_1^{100} f(x) dx < 1$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = 0$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Сумою якого ряду є функція $\ln(1-x)$?

а) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$; б) $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$;

в) $-x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \dots$; г) $x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Які з наведених нижче формул є правильними ?

1) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dz \int_{\varphi_1(x, z)}^{\varphi_2(x, z)} f(x, y, z) dy$ (D - проекція V на площину Oxz);

2) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_k^l dz \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dy \int_{\varphi_1(y, z)}^{\varphi_2(y, z)} f(x, y, z) dx$;

3) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dy \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$;

4) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} f(x, y, z) dz$ (D - проекція V на площину Oxy).

а) 1 і 4; б) тільки 1; в) 2 і 3; г) 2 і 4; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Координати центра ваги матеріальної поверхні σ , поверхнева густина якої $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходяться за формулами (m - маса поверхні):

а) $x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x y z \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x z \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x y \gamma d\sigma$;

б) $x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x^2 \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y^2 \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z^2 \gamma d\sigma$;

в) $x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z \gamma d\sigma$;

г) $x_c = \frac{1}{m^2} \iint_{\sigma} x^2 \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m^2} \iint_{\sigma} y^2 \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m^2} \iint_{\sigma} z^2 \gamma d\sigma$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Робота сили $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої L дорівнює:

а) $\int_L (P + Q + R) dl$; б) $\int_L P dx + Q dy + R dz$; в) $\int_L P dy + Q dz + R dx$;

$$\text{г) } \int_L P^2 dx + Q^2 dy + R^2 dz; \quad \text{д) інша відповідь.}$$

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \ln(n+1)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot e^n}; \quad \text{розбіжними є:}$$

а) тільки 1; б) тільки 2; в) 1 і 2; г) 1 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n+1)}{3^n + 1}; \quad 1) \text{ розбіжний;}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}; \quad 2) \text{ збіжний абсолютно;}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{3n-1}{2n+3}\right); \quad 3) \text{ збіжний умовно.}$$

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-3, 2-1, 3-2; в) 1-3, 2-2, 3-1; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

а) $(-\infty; 1)$; б) $[-1; 1)$; в) $(0; \infty)$; г) $(-\infty; \infty)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 5-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \sin x^2$.

$$\text{а) } -\frac{x^{14}}{7!}; \quad \text{б) } -\frac{x^{22}}{11!}; \quad \text{в) } \frac{x^{18}}{9!}; \quad \text{г) } \frac{x^{10}}{5!}; \quad \text{д) інша відповідь.}$$

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = 2x^2 - xy$, $y(0) = 0$.

$$\text{а) } y = \frac{4x^3}{3!} - \frac{16x^5}{5!} + \frac{96x^7}{7!} + \dots; \quad \text{б) } y = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}x + \frac{x^7}{7!} + \dots;$$

$$\text{в) } y = 4x^3 + 16x^5 + 20x^7 + \dots; \quad \text{г) } y = 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + \dots; \quad \text{д) інша відповідь.}$$

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy^2 dx dy$, якщо D обмежена лініями $y = 0$, $x = 1$, $y = -\sqrt{x}$.

$$\text{а) } 1; \quad \text{б) } \frac{2}{3}; \quad \text{в) } \frac{3}{2}; \quad \text{г) } \frac{2}{21}; \quad \text{д) інша відповідь.}$$

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V (27 + 54y^3) dx dy dz$, якщо V обмежена поверхнями $x = 1$, $y = x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = \sqrt{xy}$.

$$\text{а) } -\frac{2}{31}; \quad \text{б) } \frac{2}{31}; \quad \text{в) } 8; \quad \text{г) } -\frac{31}{2}; \quad \text{д) інша відповідь.}$$

13. (6 балів) Обчислити $\int_L y dx + x dy$, де L – дуга параболи $y = \sqrt{x}$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

$$\text{а) } 1; \quad \text{б) } 2; \quad \text{в) } 3; \quad \text{г) } 4; \quad \text{д) інша відповідь.}$$

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

$$\text{а) } 1,5; \quad \text{б) } \frac{1}{2}; \quad \text{в) } 1; \quad \text{г) } 2; \quad \text{д) інша відповідь.}$$

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{3+i}{2+4i}$ в алгебраїчній формі.

$$\text{а) } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; \quad \text{б) } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i; \quad \text{в) } \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i; \quad \text{г) } \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i; \quad \text{д) інша відповідь.}$$

Варіант 13

1. (8 балів) Одночасну збіжність чи розбіжність двох рядів з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ гарантує виконання

умови:

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = r$, $0 < r < +\infty$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$;
д) інша відповідь.

2. (8 балів) Сумою якого ряду є функція $\frac{1}{1+x}$?

- а) $1+x+x^2+x^3+\dots$; б) $1-x+x^2-x^3+\dots$;
в) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+\dots$; г) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Якщо m і M - відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D , а S - площа цієї області, то має місце оцінка подвійного інтеграла:

- а) $\frac{S}{M} \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \frac{S}{m}$; б) $mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS$;
в) $\frac{m}{S} \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \frac{M}{S}$; г) $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq (M-m)S$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то для обчислення криволінійного інтеграла першого роду має місце формула:

- а) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1+y'^2(x)} dx$;
б) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) dx$; в) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) y'(x) dx$;
г) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1+y^2(x)} dx$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між:

- а) поверхневими інтегралами першого і другого роду;
б) подвійними і поверхневими інтегралами;
в) криволінійними і поверхневими інтегралами;
г) потрійними і поверхневими інтегралами; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n+1)^2}$; розбіжними є:
а) 1 і 3; б) тільки 2; в) 2 і 3; г) 1 і 2; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\ln \frac{n}{n+1} \right)^n$; 1) збіжний умовно;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$; 2) розбіжний;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5^n - 1}{5^n + 2^n}$; 3) збіжний абсолютно.

а) 1-1, 2-3, 3-2; б) 1-2, 2-1, 3-3; в) 1-3, 2-2, 3-1; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

а) $[1; 5)$; б) $[-3; 3]$; в) $(-1; 4)$; г) $(1; 5]$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 5-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = e^{3x}$.

а) $-\frac{3^6 x^6}{6!}$; б) $\frac{3^5 x^5}{5!}$; в) $\frac{x^5}{5!}$; г) $\frac{3^4 x^4}{4!}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = 2 \sin x + xy$, $y(0) = 0$.

а) $y = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{11}{360}x^6 + \dots$; б) $y = x^2 + 4x^4 + 6x^6 + \dots$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \dots$; г) $y = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D y \sin x dx dy$, якщо D – прямокутник $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$.

а) 1; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V 63(1 + 2\sqrt{y}) dx dy dz$, якщо V обмежена поверхнями $x=1$, $y=x$, $y=0$, $z=0$, $z=\sqrt{xy}$.

а) 32; б) 63; в) 1; г) 0; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L xy dl$, де L – контур трикутника з вершинами $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y=0$, $y=\sqrt{4-x^2}$.

а) 8π ; б) 4π ; в) 16π ; г) 2π ; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{5+i}{4-2i}$ в алгебраїчній формі.

а) $\frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$; б) $\frac{7}{10} - \frac{9}{10}i$; в) $\frac{9}{10} - \frac{7}{10}i$; г) $\frac{11}{10} + \frac{3}{10}i$; д) інша відповідь.

Варіант 14

1. (8 балів) Якщо для двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ виконується $0 \leq a_n \leq b_n$ для всіх $n \geq n_0$, то:

а) із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно;

в) із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

г) розбіжність одного з рядів не залежить від розбіжності іншого; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Встановити відповідність між функціями та рядами Маклорена:

1) e^x ; 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

2) $\cos x$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

3) $\cosh x$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-1, 2-3, 3-2; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Які з наведених нижче формул є правильними ?

1) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_a^b f(x, y) dx$; 2) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dy$;

3) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$; 4) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx$.

а) 2 і 3; б) 1 і 4; в) 3 і 4; г) тільки 4; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Які з наведених нижче рівностей справедливі для криволінійного інтеграла першого роду ?

1) $\int_{AB} f(x, y) dl = - \int_{BA} f(x, y) dl$; 2) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$;

3) $\int_{ACB} f(x, y) dl = \int_{AC} f(x, y) dl + \int_{CB} f(x, y) dl$; 4) $\int_{AB} Cf(x, y) dl = |C| \int_{AB} f(x, y) dl$;

а) 1 і 3; б) 2 і 3; в) 1, 3 і 4; г) тільки 2; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Циркуляція вектора $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + \vec{Q}(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ вздовж замкнутого контура L знаходиться за формулою:

а) $\mathcal{U} = \oint_L P dy + Q dz + R dx$; б) $\mathcal{U} = \oint_L (P + Q + R) dl$; в) $\mathcal{U} = \oint_L \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz$;

г) $\mathcal{U} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n(n-1)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}$; збіжними є:

а) 1 і 2; б) всі; в) 1 і 3; г) тільки 1; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{2n^2 + 3}$; 1) розбіжний;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$; 2) збіжний умовно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+3)}{\ln(n+4)}$; 3) збіжний абсолютно.

а) 1-3, 2-1, 3-2; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-2, 2-1, 3-3; г) 1-3, 2-2, 3-1; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

а) $(-1; 1)$; б) $(-1; 1]$; в) $(-2; 2)$; г) $[-2; 2)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Користуючись розкладом в ряд Маклорена функції $f(x) = \ln(1-x-6x^2)$, знайти $f^{(5)}(0)$.

а) $211 \cdot 4!$; б) $5!$; в) $-211 \cdot 4!$; г) $-4!$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = xe^x + 2y^2$, $y(0) = 0$.

а) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \dots$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \dots$; г) $y = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, якщо D обмежена лініями $y^2 = x$, $x = 1$.

а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{105}{88}$; в) $\frac{88}{105}$; г) 0; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V \left(\frac{10}{3}x + \frac{5}{3} \right) dx dy dz$, якщо V обмежена поверхнями

$x=1$, $y=9x$, $y=0$, $z=0$, $z=\sqrt{xy}$.

а) 0; б) 5; в) $\frac{1}{5}$; г) 25; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки A(-1;0) і B(0;1).

а) $\sqrt{2}$; б) $-5\sqrt{2}$; в) $5\sqrt{2}$; г) 5; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = \cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

а) 1,5; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 2; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{5-2i}{3-i}$ в алгебраїчній формі.

а) $\frac{13}{10} - \frac{1}{10}i$; б) $\frac{1}{10} + \frac{13}{10}i$; в) $\frac{17}{10} + \frac{1}{10}i$; г) $\frac{17}{10} - \frac{1}{10}i$; д) інша відповідь.

Варіант 15

1. (8 балів) Яка з умов гарантує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Сумою якого ряду є функція $\frac{1}{1+x}$?

- а) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$; б) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$;
в) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \dots$; г) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Якщо поверхня σ задана рівнянням $z = f(x, y)$ і проєктується на площину Oxy в область D , то її площа S знаходиться за формулою:

- а) $S = \iint_D \sqrt{f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy$; б) $S = \iint_D \sqrt{1 + f^2(x, y)} dx dy$;
в) $S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy$; г) $S = \iint_D (f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)) dx dy$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Координати центра ваги плоскої матеріальної кривої AB , лінійна густина якої $\gamma = \gamma(x, y)$, знаходяться за формулами:

- а) $x_c = \frac{\int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl}{\int_{AB} \gamma(x, y) dl}$, $y_c = \frac{\int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl}{\int_{AB} \gamma(x, y) dl}$; б) $x_c = \frac{\int_{AB} x \gamma(x, y) dl}{\int_{AB} \gamma(x, y) dl}$, $y_c = \frac{\int_{AB} y \gamma(x, y) dl}{\int_{AB} \gamma(x, y) dl}$;
в) $x_c = \frac{\int_{AB} x \gamma(x, y) dl}{\int_{AB} dl}$, $y_c = \frac{\int_{AB} y \gamma(x, y) dl}{\int_{AB} dl}$; г) $x_c = \frac{\int_{AB} y \gamma(x, y) dl}{\int_{AB} \gamma(x, y) dl}$, $y_c = \frac{\int_{AB} x \gamma(x, y) dl}{\int_{AB} \gamma(x, y) dl}$;
д) інша відповідь.

5. (8 балів) Векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається соленоїдальним, якщо:

- а) $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$; б) $P + Q + R = 0$; в) $\text{div } \vec{F} = 0$; г) $\text{grad } \vec{F} = \vec{0}$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!}$; збіжними є:

- а) тільки 1; б) всі; в) 1 і 3; г) 1 і 2; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}$; 1) збіжний абсолютно;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+2}}$; 2) розбіжний;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(n+1)}$; 3) збіжний умовно.
а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-3, 2-1, 3-2; в) 1-2, 2-3, 3-1; г) 1-1, 2-2, 3-3; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$.

- а) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 3-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \cos \frac{2x^3}{3}$.

- а) $\frac{2^8 x^{24}}{3^8 \cdot 8!}$; б) $-\frac{2^6 x^{18}}{3^6 \cdot 6!}$; в) $\frac{2^4 x^{12}}{3^4 \cdot 4!}$; г) $-\frac{2^2 x^6}{3^2 \cdot 2!}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = 2y^2 + ye^x$, $y(0) = \frac{1}{3}$.

- а) $y = \frac{1}{3} + \frac{5}{9}x + \frac{22}{27}x^2 + \dots$; б) $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x^2 + \dots$;
в) $y = \frac{1}{3} + 5x + 7x^2 + \dots$; г) $y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{4}x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D (x+y) dx dy$, якщо D – трикутник з вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;0)$.

- а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 0; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V x dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $2 \leq x \leq 3$, $2 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq x+y$.

- а) $\frac{15}{12}$; б) $\frac{151}{12}$; в) $\frac{51}{12}$; г) $\frac{12}{15}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_{AB} (x-y) dl$, де AB – відрізок прямої $y=2x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

- а) $\sqrt{5}$; б) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) 5; г) -5; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x$, $y = 3x$, $x = 1$.

- а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) 4; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Обчислити $(1 - \sqrt{3}i)^9$.

- а) $512i$; б) -512 ; в) $-512i$; г) 512 ; д) інша відповідь.

Варіант 16

1. (8 балів) Яка з умов гарантує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Степеневим рядом загального вигляду називається ряд виду:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - x_0)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^{x-x_0}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) За якою формулою можна обчислити площу плоскої фігури D ?

а) $\iint_D x dx dy$; б) $\iint_D y dx dy$; в) $\iint_D xy dx dy$; г) $\iint_D dx dy$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то для обчислення криволінійного інтеграла першого роду має місце формула:

а) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$;
 б) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) dx$; в) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) y'(x) dx$;
 г) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y^2(x)} dx$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Формула Стокса встановлює зв'язок між:

- а) криволінійними і поверхневими інтегралами;
 б) криволінійними і потрійними інтегралами;
 в) подвійними і криволінійними інтегралами;
 г) подвійними і потрійними інтегралами; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n + n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^3 + 1}{2n^3} \right)$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n$; збіжними є:
 а) 1 і 2; б) 1 і 3; в) тільки 1; г) тільки 2; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{n^n}$; 1) збіжний умовно;
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; 2) збіжний абсолютно;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{4n+3}}$; 3) розбіжний.
 а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-1, 2-3, 3-2; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

а) $(-\infty; \infty)$; б) $(-1; 1)$; в) $[-2; 2]$; г) $(-2; 2)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 4-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \cos 5x$.

а) $-\frac{5^6 x^6}{6!}$; б) $\frac{5^8 x^8}{8!}$; в) $\frac{x^4}{4!}$; г) $-\frac{5^8 x^8}{8!}$; д) інша відповідь.

(6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші
 $y' = 2y^2 + ye^x$, $y(0) = \frac{1}{3}$.

а) $y = \frac{1}{3} + \frac{5}{9}x + \frac{22}{27}x^2 + \dots$; б) $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x^2 + \dots$;

в) $y = \frac{1}{3} + 5x + 7x^2 + \dots$; г) $y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{4}x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy dx dy$, якщо D обмежена лініями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

а) $-\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{12}$; г) $\frac{1}{10}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V x dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $2 \leq x \leq 3$, $2 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq x + y$.

а) $\frac{15}{12}$; б) $\frac{151}{12}$; в) $\frac{51}{12}$; г) $\frac{12}{15}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – верхня половина еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, яку проходять за годинниковою стрілкою.

а) $\frac{4ab}{3}$; б) $\frac{4a^2b}{3}$; в) $\frac{4a b^2}{3}$; г) $\frac{4a^2b^2}{3}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена заданою лінією: $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) π ; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Знайти модуль r та аргумент φ комплексного числа $z = \frac{4}{1 - i\sqrt{3}}$.

а) $r = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; б) $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$; в) $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; г) $r = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$; д) інша відповідь.

Варіант 17

1. (8 балів) Якщо для двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ виконується $0 \leq a_n \leq b_n$ для всіх $n \geq n_0$, то:

а) із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

б) із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

в) обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно;

г) збіжність одного з цих рядів не залежить від збіжності іншого; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Встановити відповідність між функціями та рядами Маклорена:

1) $\ln(1+x)$;

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$;

2) $\frac{1}{1+x}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$;

3) $\frac{1}{1-x}$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

а) 1-2, 2-3, 3-1; б) 1-1, 2-2, 3-3; в) 1-2, 2-1, 3-3; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Маса тіла V , густина якого $\gamma = \gamma(x, y, z)$, обчислюється за формулою:

а) $m = \iiint_V xyz \gamma(x, y, z) dx dy dz$; б) $m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz$;

в) $m = \iiint_V (x+y+z) \gamma(x, y, z) dx dy dz$; г) $m = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Довжина кривої AB обчислюється за формулою:

а) $L = \int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl$; б) $L = \pi \int_{AB} dl$; в) $L = \int_{AB} dl$; г) $L = \frac{1}{2} \int_{AB} (x^2 + y^2) dl$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Формула Стокса має вид ($P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$, L - замкнений контур, що обмежує поверхню σ):

а) $\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$;

б) $\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dy$;

в) $\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$;

г) $\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dy$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!}$; збіжними є:

а) тільки 1; б) всі; в) 1 і 3; г) 1 і 2; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2 + 3}{2n^2 + 5n + 7}$; 1) розбіжний;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^n(n+1)}$; 2) збіжний абсолютно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; 3) збіжний умовно.

а) 1-3, 2-2, 3-1; б) 1-2, 2-1, 3-3; в) 1-1, 2-2, 3-3; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

а) $[-2; 0]$; б) $(2; 4)$; в) $(-2; 0)$; г) $(-1; 0)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 5-й член розкладу в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 1$ функції $f(x) = e^x$.

а) $e \frac{(x-1)^5}{5!}$; б) $e \frac{(x-1)^3}{3!}$; в) $-e \frac{(x-1)^5}{5!}$; г) $e \frac{(x-1)^4}{4!}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$; б) $y = 1 + 3x - \frac{1}{3}x^2 + \dots$;

в) $y = 1 - 2x + \frac{1}{4}x^2 + \dots$; г) $y = 1 + 3x + 5x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D (x+y) dx dy$, якщо D – трикутник з вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;0)$.

а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 0; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V xy dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 2x+y$.

а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{35}{12}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{11}{12}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L y dx + \frac{x}{y} dy$, де L – дуга кривої $y = e^{-x}$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(-1;e)$.

а) $\frac{1}{2} - e$; б) $-\frac{1}{2} + e$; в) $\frac{e}{2} - 1$; г) $\frac{1}{2} + e$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x$, $y = 3x$, $x = 1$.

а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) 4; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Обчислити $(-\sqrt{3} - i)^6$.

а) 64; б) -64; в) $64i$; г) $-64i$; д) інша відповідь.

Варіант 18

1. (8 балів) Яка з умов гарантує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Встановити відповідність між функціями та рядами Маклорена:

- 1) $\sin x$; 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;
2) $\operatorname{sh} x$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;
3) $\operatorname{arctg} x$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

- а) 1-1, 2-3, 3-2; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-1, 2-2, 3-3; г) 1-3, 2-2, 3-1; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Координати центра ваги тіла V , густина якого $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходяться за формулами (m - маса тіла):

- а) $x_c = \frac{\iiint_V x^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}$, $y_c = \frac{\iiint_V y^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}$, $z_c = \frac{\iiint_V z^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}$;
б) $x_c = \frac{\iiint_V yz \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}$, $y_c = \frac{\iiint_V xz \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}$, $z_c = \frac{\iiint_V xy \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}$;
в) $x_c = \frac{\iiint_V x \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}$, $y_c = \frac{\iiint_V y \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}$, $z_c = \frac{\iiint_V z \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}$;
г) $x_c = \frac{\iiint_V xy \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m^2}$, $y_c = \frac{\iiint_V y \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m^2}$, $z_c = \frac{\iiint_V z \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m^2}$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то для обчислення криволінійного інтеграла другого роду має місце формула:

- а) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt$;
б) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) + Q(x(t), y(t))] dt$;
в) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) + Q(x(t), y(t))] x'(t) y'(t) dt$;
г) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) + Q(x(t), y(t))] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Циркуляція вектора $\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ вздовж замкнутого контура L знаходиться за формулою:

- а) $\mathcal{U} = \oint_L P dy + Q dz + R dx$; б) $\mathcal{U} = \oint_L (P + Q + R) dl$; в) $\mathcal{U} = \oint_L \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz$;
г) $\mathcal{U} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+7}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n \cdot n!}$; збіжними є:

а) всі; б) тільки 3; в) 1 і 2; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{n}{2n+1}$; 1) збіжний умовно;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; 2) збіжний абсолютно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n(n+1)}}{4^n}$; 3) розбіжний.

а) 1-1, 2-3, 3-2; б) 1-3, 2-2, 3-1; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$.

а) $(2; 8]$; б) $(2; 8)$; в) $[2; 8)$; г) $(2; 5]$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Користуючись розкладом в ряд Маклорена функції $f(x) = \ln(1-x-6x^2)$, знайти $f^{(5)}(0)$.

а) $211 \cdot 4!$; б) $5!$; в) $-211 \cdot 4!$; г) $-4!$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = xy + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + x + 2x^2 + \dots$; б) $y = 1 - 2x - \frac{1}{3}x^2 + \dots$;

в) $y = 2 - x + 2x^2 + \dots$; г) $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D x dx dy$, якщо D задана нерівностями: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V (x+y) dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $-(x+y) \leq z \leq 0$.

а) $-\frac{7}{6}$; б) $\frac{6}{7}$; в) $-\frac{6}{7}$; г) 0; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – дуга параболи $y = 4 - x^2$, що знаходиться у верхній півплощині і яку проходять за годинниковою стрілкою.

а) $\frac{512}{15}$; б) $-\frac{512}{15}$; в) 0; г) 80; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

а) 18; б) 20; в) 16; г) 14; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Знайти модуль r та аргумент φ комплексного числа $z = -\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$.

а) $r = 2$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; б) $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; в) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; г) $r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; д) інша відповідь.

Варіант 19

1. (8 балів) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ розбігається, якщо:

- а) $p > 1$; б) $p = 2$; в) $p \leq 1$; г) $p \geq 2$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Встановити відповідність між функціями та рядами Маклорена:

1) $\ln(1+x)$;

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

2) $\ln(1-x)$;

2) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

3) $\arctg x$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

- а) 1-3, 2-1, 3-2; б) 1-3, 2-2, 3-1; в) 1-2, 2-1, 3-3; г) 1-1, 2-2, 3-3; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Які з наведених нижче формул є правильними ?

1) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dz \int_{\psi_1(x, z)}^{\psi_2(x, z)} f(x, y, z) dy$ (D - проекція V на площину Oxz);

2) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_k^l dz \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dy \int_{\psi_1(y, z)}^{\psi_2(y, z)} f(x, y, z) dx$;

3) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dy \int_a^b dx \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$;

4) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} f(x, y, z) dz$ (D - проекція V на площину Oxy).

- а) 1 і 4; б) тільки 1; в) 2 і 3; г) 2 і 4; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Маса матеріальної поверхні σ , поверхнева густина якої $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходиться за формулою:

а) $m = \iint_{\sigma} x \gamma(x, y, z) d\sigma$; б) $m = \iint_{\sigma} y \gamma(x, y, z) d\sigma$;

в) $m = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma$; г) $m = \iint_{\sigma} x y z \gamma(x, y, z) d\sigma$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Циркуляція вектора $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ вздовж замкнутого контура L знаходиться за формулою:

а) $\mathcal{U} = \oint_L P dy + Q dz + R dx$; б) $\mathcal{U} = \oint_L (P + Q + R) dl$; в) $\mathcal{U} = \oint_L \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz$;

г) $\mathcal{U} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^5$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; збіжними є:

- а) тільки 2; б) 2 і 3; в) 1 і 3; г) тільки 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n\sqrt{n+1}}$;

1) збіжний умовно;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$; 2) збіжний абсолютно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n + 5}$; 3) розбіжний.

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-1, 2-2, 3-3; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

а) $[1; 5]$; б) $[-3; 3]$; в) $(-1; 4)$; г) $(1; 5]$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 4-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \frac{2}{1-3x^2}$.

а) $-2 \cdot 3^3 \cdot x^6$; б) $2 \cdot 3^4 \cdot x^8$; в) $2 \cdot x^6$; г) $2 \cdot 3^3 \cdot x^6$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \dots$; б) $y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$;

в) $y = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{6}{5}x^2 + \dots$; г) $y = 1 + x + 3x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D (x+y) dx dy$, якщо D – трикутник з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$.

а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 1; г) 0; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V xy dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3x + y$.

а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{8}{3}$; г) $\frac{8}{5}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L y(x-y) dx + x dy$, де L – дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

а) $-\frac{16}{5}$; б) $-\frac{14}{5}$; в) $-\frac{11}{5}$; г) $\frac{64}{5}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

а) 1,5; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 2; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Знайти модуль r та аргумент φ комплексного числа $z = -\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$.

а) $r = 2$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; б) $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; в) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; г) $r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; д) інша відповідь.

Варіант 20

1. (8 балів) Які з наведених нижче тверджень правильні?

- 1) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж збіжний.
- 2) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж розбіжний.
- 3) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може збігатись.
- 4) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ теж збіжний.

а) 1 і 4; б) 2 і 4; в) 1 і 3; г) 1 і 2; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Яка функція є сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$?

а) $\sin x$; б) $\cos x$; в) $\sinh x$; г) $\arctg x$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Моменти інерції відносно координатних площин тіла V , густина якого $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходяться за формулами:

а) $I_{xy} = \iiint_V z^2 \gamma dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V x^2 \gamma dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V y^2 \gamma dx dy dz$;

б) $I_{xy} = \iiint_V x^2 y^2 \gamma dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V y^2 z^2 \gamma dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V z^2 x^2 \gamma dx dy dz$;

в) $I_{xy} = \iiint_V z^2 \gamma^2 dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V x^2 \gamma^2 dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V y^2 \gamma^2 dx dy dz$;

г) $I_{xy} = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \gamma dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} \gamma dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V \sqrt{z^2 + x^2} \gamma dx dy dz$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Момент інерції відносно початку координат матеріальної поверхні σ , поверхнева густина якої $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходиться за формулою:

а) $I_0 = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma d\sigma$; б) $I_0 = \iint_{\sigma} (x + y + z) \gamma d\sigma$;

в) $I_0 = \iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gamma d\sigma$; г) $I_0 = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma^2 d\sigma$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Дивергенцією векторного поля $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається:

а) вектор $\overline{\text{div}} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z} \vec{k}$; б) скаляр $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}$;

в) вектор $\overline{\text{div}} \vec{F} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \vec{k}$;

г) скаляр $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \ln(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot e^n}$; розбіжними є:

а) тільки 1; б) тільки 2; в) 1 і 2; г) 1 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\sin n}{e^n}; \quad 1) \text{ збіжний умовно};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\ln(n+1)}; \quad 2) \text{ розбіжний};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n-1}{2^n+1}; \quad 3) \text{ збіжний абсолютно.}$$

а) 1-1, 2-3, 3-2; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-3, 2-2, 3-1; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

а) $[-2; 8)$; б) $(2; 8)$; в) $(-3; 5]$; г) $(3; 8]$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 5-й член розкладу в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 1$ функції $f(x) = e^x$.

а) $e \frac{(x-1)^5}{5!}$; б) $e \frac{(x-1)^3}{3!}$; в) $-e \frac{(x-1)^5}{5!}$; г) $e \frac{(x-1)^4}{4!}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$.

а) $y = x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots$; б) $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$;

в) $y = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$; г) $y = 3x + 12x^2 - 7x^3 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy^2 dx dy$, якщо D обмежена лініями $y = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{x}$.

а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{21}$; г) $\frac{3}{2}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V x dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq x + y$.

а) $\frac{55}{12}$; б) $\frac{12}{55}$; в) $\frac{23}{4}$; г) $\frac{23}{7}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L x dl$, де L – частина параболи $x = 2\sqrt{y}$, $0 \leq y \leq 2$.

а) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{4}{3}(3\sqrt{3}-1)$; в) $\frac{3}{4}(2\sqrt{2}-1)$; г) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = 0$, $x = 0$, $y = 1 - x$.

а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) $\frac{3}{2}$; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{5-2i}{3-i}$ в алгебраїчній формі.

а) $\frac{13}{10} - \frac{1}{10}i$; б) $\frac{1}{10} + \frac{13}{10}i$; в) $\frac{17}{10} + \frac{1}{10}i$; г) $\frac{17}{10} - \frac{1}{10}i$; д) інша відповідь.

Варіант 21

1. (8 балів) Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ виконання умови $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

- а) є необхідним для розбіжності; б) є достатнім для розбіжності;
в) є необхідним і достатнім для розбіжності;
г) означає, що сума ряду відмінна від нуля; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Яка функція є сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$?

- а) e^x ; б) $\sin x$; в) $\sinh x$; г) $\cosh x$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Потрійний інтеграл $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ в сферичних координатах ρ, φ, θ набуває виду:

- а) $I = \iiint_{V^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$;
б) $I = \iiint_{V^*} f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$;
в) $I = \iiint_{V^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho d\varphi d\theta$;
г) $I = \iiint_{V^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) d\rho d\varphi d\theta$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то для обчислення криволінійного інтеграла другого роду має місце формула:

- а) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))] dx$;
б) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx$;
в) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))] y'(x) dx$;
г) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'^2(x)] dx$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Дивергенцією векторного поля $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається:

- а) вектор $\overline{\text{div}} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z} \vec{k}$; б) скаляр $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}$;
в) вектор $\overline{\text{div}} \vec{F} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \vec{k}$;
г) скаляр $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$; збіжними є:

- а) 1 і 2; б) тільки 1; в) тільки 2; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$; 1) розбіжний;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2}}$; 2) збіжний абсолютно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^{n+1}}$; 3) збіжний умовно.

а) 1-1, 2-3, 3-2; б) 1-3, 2-1, 3-2; в) 1-2, 2-1, 3-3; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

а) $(-3; 3)$; б) $[3; 5]$; в) $(-3; 4)$; г) $(-5; 4]$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 4-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \cos 5x$.

а) $-\frac{5^6 x^6}{6!}$; б) $\frac{5^8 x^8}{8!}$; в) $\frac{x^4}{4!}$; г) $-\frac{5^8 x^8}{8!}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = xy - y^2$, $y(0) = 0,2$.

а) $y = 0,2 + 3x - 0,5x^2 + \dots$; б) $y = 0,2 - 0,04x + 0,108x^2 + \dots$;

в) $y = 0,2 + 14x - 0,5x^2 + \dots$; г) $y = 3 - 2x + \frac{1}{5}x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Змінити порядок інтегрування: $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$.

а) $\int_{-1}^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx$; б) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx$;

в) $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$; г) $\int_0^1 dy \int_{y-1}^0 f(x, y) dx$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V 63(1+2\sqrt{y}) dx dy dz$, якщо V обмежена поверхнями $x=1$, $y=x$, $y=0$, $z=0$, $z=\sqrt{xy}$.

а) 32; б) 63; в) 1; г) 0; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L x dy$, де L – контур трикутника, що обмежений осями координат і прямою $x+y=2$, який проходять проти годинникової стрілки.

а) -2; б) 2; в) $\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{2}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y=x$, $y=5x$, $x=1$.

а) 1; б) 4; в) 2; г) 3; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{5-2i}{3-i}$ в алгебраїчній формі.

а) $\frac{13}{10} - \frac{1}{10}i$; б) $\frac{1}{10} + \frac{13}{10}i$; в) $\frac{17}{10} + \frac{1}{10}i$; г) $\frac{17}{10} - \frac{1}{10}i$; д) інша відповідь.

Варіант 22

1. (8 балів) Сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($|q| < 1$) дорівнює:

- а) $\frac{a}{1+q}$; б) $a(1-q)$; в) $\frac{a}{1-q}$; г) $\frac{a}{1-|q|}$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Встановити відповідність між функціями та рядами Маклорена:

1) $\ln(1+x)$; 1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$;

2) $\frac{1}{1+x}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$;

3) $\frac{1}{1-x}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

а) 1-2, 2-3, 3-1; б) 1-1, 2-2, 3-3; в) 1-2, 2-1, 3-3; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Маса матеріальної пластини, яка займає область D на площині і поверхнева густина якої $\gamma = \gamma(x, y)$, обчислюється за формулою:

а) $m = \iint_D xy\gamma(x, y) dx dy$; б) $m = \iint_D (x+y)\gamma(x, y) dx dy$;

в) $m = \iint_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y) dx dy$; г) $m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Формула Гріна встановлює зв'язок між:

- а) криволінійними інтегралами першого і другого роду;
б) подвійними і криволінійними інтегралами;
в) криволінійними і поверхневими інтегралами;
г) подвійними і потрійними інтегралами; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається соленоїдальним, якщо:

- а) $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$; б) $P + Q + R = 0$; в) $\text{div } \vec{F} = 0$; г) $\text{grad } \vec{F} = \vec{0}$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+7}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n \cdot n!}$; збіжними є:

- а) всі; б) тільки 3; в) 1 і 2; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{2n^2 + 3}$; 1) розбіжний;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lg \frac{1}{n\sqrt{n}}$; 2) збіжний умовно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+3)}{\ln(n+4)}$; 3) збіжний абсолютно.

а) 1-3, 2-1, 3-2; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-2, 2-1, 3-3; г) 1-3, 2-2, 3-1; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневому ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \ln n}$.

- а) $(-2; 2)$; б) $[-3; 3)$; в) $(-3; 3)$; г) $(-2; 2]$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 5-й член розкладу в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -2$ функції $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

а) $-(x+2)^3$; б) $-(x+2)^5$; в) $(x+2)^5$; г) $(x+2)^4$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$; б) $y = 1 + 3x - \frac{1}{3}x^2 + \dots$;

в) $y = 1 - 2x + \frac{1}{4}x^2 + \dots$; г) $y = 1 + 3x + 5x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D (x+y) dx dy$, якщо D – прямокутник $5 \leq x \leq 10$, $2 \leq y \leq 4$.

а) 10; б) 100; в) 105; г) 0; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V xy dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $-(x^2 + y^2) \leq z \leq 0$.

а) $\frac{1}{42}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{9}{24}$; г) $\frac{3}{4}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L xy dl$, де L – частина параболи $x = y^2$, $0 \leq y \leq 1$.

а) $25\sqrt{5} + 1$; б) $\frac{25\sqrt{5} - 1}{120}$; в) $\frac{\sqrt{5} - 1}{12}$; г) $\frac{25\sqrt{5} + 1}{120}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$.

а) 24π ; б) 20π ; в) 12π ; г) 8π ; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{1-2i}{3+i}$ в алгебраїчній формі.

а) $\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$; б) $\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$; в) $-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$; г) $\frac{3}{10} + \frac{7}{10}i$; д) інша відповідь.