

Контрольна робота №3

Варіант 23

1. (8 балів) Яка з умов гарантує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$;

в) $\int_1^{100} f(x) dx < 1$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = 0$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Встановити відповідність між функціями та рядами Маклорена:

1) $\sin x$; 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

2) $\operatorname{sh} x$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

3) $\operatorname{arctg} x$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

а) 1-1, 2-3, 3-2; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-1, 2-2, 3-3; г) 1-3, 2-2, 3-1; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Які з наведених нижче тверджень справедливі для подвійного інтеграла ?

1) Якщо в області D функція $f(x, y) \geq 0$, то $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$;

2) Якщо область $D = D_1 \cup D_2$, причому D_1 і D_2 не мають спільних внутрішніх точок, то $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$;

3) Для довільних обмежених замкнених областей D_1 і D_2 справедлива рівність $\iint_{D_1 \cap D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy \cdot \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$;

4) $\iint_D x dx dy = S$, де S - площа області D .

а) 1, 2 і 4; б) 1, 2 і 3; в) 1 і 2; г) всі; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду. Якщо α і β - кути, які складає напрямна дотична до кривої AB з осями відповідно Ox і Oy , то має місце рівність:

а) $\int_{AB} P(x, y) \cos \alpha dx + Q(x, y) \cos \beta dy = \int_{AB} (P(x, y) + Q(x, y)) dl$;

б) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} (P(x, y) \cos \beta + Q(x, y) \cos \alpha) dl$;

в) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} (P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta) dl$;

г) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} (P(x, y) \sin \alpha + Q(x, y) \sin \beta) dl$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Робота сили $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої L дорівнює:

а) $\int_L (P+Q+R) dl$; б) $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$; в) $\int_L Pdy + Qdz + Rdx$;
 г) $\int_L P^2 dx + Q^2 dy + R^2 dz$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^5+2}}\right)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n\sqrt{n}}$; збіжними є:
 а) всі; б) тільки 2; в) 1 і 2; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$; 1) розбіжний;
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$; 2) збіжний умовно;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{5n+3}$; 3) збіжний абсолютно.
 а) 1-3, 2-2, 3-1; б) 1-1, 2-2, 3-3; в) 1-2, 2-3, 3-3; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

а) $(-1; 1)$; б) $(-1; 1]$; в) $(-2; 2)$; г) $[-2; 2)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 3-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

а) $-x^5$; б) x^4 ; в) x^6 ; г) $-x^4$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \dots$; б) $y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$;

в) $y = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{6}{5}x^2 + \dots$; г) $y = 1 + x + 3x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D x dx dy$, якщо D задана нерівностями: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V (x+y) dx dy dz$, якщо V обмежена поверхнями

$x=1$, $y=x$, $y=0$, $z=0$, $z=30x^2+60y^2$.

а) 6; б) 10; в) 16; г) 1,6; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L xy dx$, де L – дуга синусоїди від точки A(π ; 0) до точки B(0; 0).

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\pi$; в) 2π ; г) $\pi+1$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y=0$, $y=\sqrt{4-x^2}$.

а) 8π ; б) 4π ; в) 16π ; г) 2π ; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{1-2i}{3+i}$ в алгебраїчній формі.

а) $\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$; б) $\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$; в) $-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$; г) $\frac{3}{10} + \frac{7}{10}i$; д) інша відповідь.

Варіант 24

1. (8 балів) Яка з умов гарантує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Яка функція є сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($-1 < x \leq 1$) ?

а) $\frac{1}{1-x}$; б) $\ln(1+x)$; в) e^x ; г) $\arctg x$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Моменти інерції відносно координатних осей тіла V , густина якого $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходяться за формулами:

а) $I_x = \iiint_V x^2 \gamma dx dy dz$, $I_y = \iiint_V y^2 \gamma dx dy dz$, $I_z = \iiint_V z^2 \gamma dx dy dz$;

б) $I_x = \iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} \gamma dx dy dz$, $I_y = \iiint_V \sqrt{x^2 + z^2} \gamma dx dy dz$, $I_z = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \gamma dx dy dz$;

в) $I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma^2 dx dy dz$, $I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma^2 dx dy dz$, $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma^2 dx dy dz$;

г) $I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma dx dy dz$, $I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma dx dy dz$, $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma dx dy dz$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то для обчислення криволінійного інтеграла другого роду має місце формула:

а) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt$;

б) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) + Q(x(t), y(t))] dt$;

в) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) + Q(x(t), y(t))] x'(t) y'(t) dt$;

г) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) + Q(x(t), y(t))] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Ротором векторного поля $\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ називається:

а) вектор $\overrightarrow{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$;

б) вектор $\overrightarrow{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \vec{k}$;

в) вектор $\overrightarrow{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \vec{k}$;

г) скаляр $rot \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \ln(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot e^n}$; розбіжними є:

а) тільки 1; б) тільки 2; в) 1 і 2; г) 1 і 3; д) інша відповідь.

6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos^2 \frac{\pi}{2n}$; 1) збіжний умовно;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; 2) розбіжний;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{n}$; 3) збіжний абсолютно.

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-1, 2-3, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

а) $(-1; 1)$; б) $[-1; 1)$; в) $[-2; 2)$; г) $(-2; 2)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 4-й член розкладу в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 3$ функції $f(x) = \frac{1}{2x+5}$.

а) $\left(\frac{2}{11}\right)^4 (x-3)^4$; б) $-\frac{2^3}{11^4} (x-3)^3$; в) $\frac{2^4}{11^5} (x-3)^4$; г) $\left(\frac{2}{11}\right)^3 (x-3)^3$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = x^2 y^2 + 1$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \dots$; б) $y = 3x - \frac{1}{3}x^2 + x^3 + \dots$;

в) $y = 1 + x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$; г) $y = 1 - 2x + \frac{1}{5}x^3 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Змінити порядок інтегрування: $\int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.

а) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$; б) $\int_0^1 dx \int_{-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$;

в) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$; г) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V \sqrt{x} \cos y dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq x^2 + 1$.

а) $\frac{21}{20}$; б) $\frac{20}{21}$; в) $\frac{1}{20}$; г) 20; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L xy dl$, де L – частина параболи $x = y^2$, $0 \leq y \leq 1$.

а) $25\sqrt{5} + 1$; б) $\frac{25\sqrt{5} - 1}{120}$; в) $\frac{\sqrt{5} - 1}{12}$; г) $\frac{25\sqrt{5} + 1}{120}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x$, $y = 3x$, $x = 1$.

а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) 4; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Знайти модуль r та аргумент φ комплексного числа $z = \frac{-2}{\sqrt{3} - i}$.

а) $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$; б) $r = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$; в) $r = 1$, $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$; г) $r = 1$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$; д) інша відповідь.

Варіант 25

1. (8 балів) Яка з умов гарантує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Яка функція є сумою ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ($-1 < x < 1$) ?

а) $\frac{1}{1-x}$; б) $\arctg x$; в) $\ln(1+x)$; г) $\frac{1}{1+x}$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Моменти інерції відносно координатних площин тіла V , густина якого $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходяться за формулами:

а) $I_{xy} = \iiint_V z^2 \gamma dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V x^2 \gamma dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V y^2 \gamma dx dy dz$;
 б) $I_{xy} = \iiint_V x^2 y^2 \gamma dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V y^2 z^2 \gamma dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V z^2 x^2 \gamma dx dy dz$;
 в) $I_{xy} = \iiint_V z^2 \gamma^2 dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V x^2 \gamma^2 dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V y^2 \gamma^2 dx dy dz$;
 г) $I_{xy} = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \gamma dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} \gamma dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V \sqrt{z^2 + x^2} \gamma dx dy dz$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то для обчислення криволінійного інтеграла першого роду має місце формула:

а) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) x'(t) y'(t) dt$; б) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) dt$;
 в) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} dt$;
 г) $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між:

- а) поверхневими інтегралами першого і другого роду;
 б) подвійними і поверхневими інтегралами;
 в) криволінійними і поверхневими інтегралами;
 г) потрійними і поверхневими інтегралами; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{3}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{n^2}$; збіжними є:

- а) тільки 2; б) 2 і 3; в) тільки 1; г) 1 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; 1) розбіжний;
 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n}$; 2) збіжний умовно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{2n+3} \right)^n$; 3) збіжний абсолютно.

а) 1-3, 2-1, 3-2; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-3, 2-2, 3-1; г) 1-1, 2-3, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$.

а) $(-\infty; \infty)$; б) $(-e; e)$; в) $[-1; 1)$; г) $[-1; \infty)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 4-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \cos 5x$.

а) $-\frac{5^6 x^6}{6!}$; б) $\frac{5^8 x^8}{8!}$; в) $\frac{x^4}{4!}$; г) $-\frac{5^8 x^8}{8!}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = ye^x$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + x + x^2 + \dots$; б) $y = 3 + 4x + 5x^2 + \dots$;

в) $y = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$; г) $y = 1 + 3x + 4x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy^2 dx dy$, якщо D обмежена лініями $y = 0$, $x = 1$, $y = -\sqrt{x}$.

а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{2}{21}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V x dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq x + y$.

а) $\frac{55}{12}$; б) $\frac{12}{55}$; в) $\frac{23}{4}$; г) $\frac{23}{7}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L (x+y) dy$, де L – контур трикутника, що обмежений осями координат і прямою $x + y = 2$ який проходять проти годинникової стрілки.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y^2 = x$, $x = 1$.

а) 1; б) $\frac{5}{3}$; в) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{1}{3}$; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Знайти модуль r та аргумент φ комплексного числа $z = -\frac{2\sqrt{2}}{1-i}$.

а) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; б) $r = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; в) $r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$; г) $r = 2$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$; д) інша відповідь.

Варіант 26

1. (8 балів) Яка з умов гарантує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?
 а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$; д) інша відповідь.
2. (8 балів) Яка функція є сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$?
 а) e^x ; б) $\sin x$; в) $\sinh x$; г) $\cosh x$; д) інша відповідь.
3. (8 балів) Якщо m і M - відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D , а S - площа цієї області, то має місце оцінка подвійного інтеграла:
 а) $\frac{S}{M} \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \frac{S}{m}$; б) $mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS$;
 в) $\frac{m}{S} \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \frac{M}{S}$; г) $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq (M - m)S$; д) інша відповідь.
4. (8 балів) Інтеграл $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ не залежить від форми шляху інтегрування, якщо виконана умова:
 а) $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$; б) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$; в) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$; г) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; д) інша відповідь.
5. (8 балів) Формула Стокса встановлює зв'язок між:
 а) криволінійними і поверхневими інтегралами;
 б) криволінійними і потрійними інтегралами;
 в) подвійними і криволінійними інтегралами;
 г) подвійними і потрійними інтегралами; д) інша відповідь.
6. (6 балів) З поданих нижче рядів
 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^5+2}}\right)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n\sqrt{n}}$; збіжними є:
 а) всі; б) тільки 2; в) 1 і 2; г) 2 і 3; д) інша відповідь.
7. (6 балів) Встановити відповідність:
 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{n}{2n+1}$; 1) збіжний умовно;
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; 2) збіжний абсолютно;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n(n+1)}}{4^n}$; 3) розбіжний.
 а) 1-1, 2-3, 3-2; б) 1-3, 2-2, 3-1; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.
8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n} (x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.
 а) $\left[-\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right]$; б) $\left(0; \frac{15}{4}\right)$; в) $\left(-\frac{5}{4}; \frac{13}{4}\right)$; г) $\left(\frac{7}{4}; \frac{13}{4}\right)$; д) інша відповідь.
9. (6 балів) Знайти 6-й член розкладу в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 1$ функції $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

а) $(x-1)^8$; б) $(x-1)^{12}$; в) $-(x-1)^{10}$; г) $-(x-1)^x$; д) інша відповідь.

(6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = xy + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + x + 2x^2 + \dots$; б) $y = 1 - 2x - \frac{1}{3}x^2 + \dots$;

в) $y = 2 - x + 2x^2 + \dots$; г) $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy^2 dx dy$, якщо D обмежена лініями $y = 0$, $x = 1$, $y = -\sqrt{x}$.

а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{2}{21}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V (27 + 54y^3) dx dy dz$, якщо V обмежена поверхнями $x = 1$, $y = x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = \sqrt{xy}$.

а) $-\frac{2}{31}$; б) $\frac{2}{31}$; в) 8; г) $-\frac{31}{2}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L y(x-y) dx + x dy$, де L – дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

а) 1; б) $\frac{31}{30}$; в) $\frac{1}{30}$; г) $\frac{30}{31}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

а) 1; б) 4; в) 2; г) 3; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{2+i}{1-2i}$ в алгебраїчній формі.

а) $\frac{1}{5} + \frac{4}{5}i$; б) i ; в) $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$; г) $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}i$; д) інша відповідь.

Варіант 27

1. (8 балів) Яка з умов гарантує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Степеневим рядом загального вигляду називається ряд виду:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - x_0)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^{x-x_0}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Які з наведених нижче формул не можуть бути правильними ?

1) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dz \int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x, y, z) dy$;

2) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dz \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dy$;

3) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dx \int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x, y, z) dz$;

4) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x, y, z) dx$.

а) тільки 3; б) 1 і 2; в) 2 і 4; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду. Якщо α і β - кути, які складає напрямна дотична до кривої AB з осями відповідно Ox і Oy , то має місце рівність:

а) $\int_{AB} P(x, y) \cos \alpha dx + Q(x, y) \cos \beta dy = \int_{AB} (P(x, y) + Q(x, y)) dl$;

б) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} (P(x, y) \cos \beta + Q(x, y) \cos \alpha) dl$;

в) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} (P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta) dl$;

г) $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} (P(x, y) \sin \alpha + Q(x, y) \sin \beta) dl$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається соленоїдальним, якщо:

а) $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$; б) $P + Q + R = 0$; в) $\text{div } \vec{F} = 0$; г) $\text{grad } \vec{F} = \vec{0}$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{n+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n + 5)}$; розбіжними є:

а) 2 і 3; б) тільки 2; в) всі; г) 1 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2 + 3}{2n^2 + 5n + 7}$; 1) розбіжний;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^n(n+1)}$; 2) збіжний абсолютно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$; 3) збіжний умовно.

а) 1-3, 2-2, 3-1; б) 1-2, 2-1, 3-3; в) 1-1, 2-2, 3-3; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

а) $(-\infty; \infty)$; б) $(-1; 1)$; в) $[-2; 2]$; г) $(-2; 2)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 4-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = 5^{2x}$.

а) $\frac{2^4 \ln^4 5}{4!} x^4$; б) $\frac{\ln^4 5}{4!} x^4$; в) $\frac{2^3 \ln^3 5}{3!} x^3$; г) $\frac{2^4}{4!} x^4$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = x^2 y^2 + \sin x$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

а) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{13} x^3 + \dots$; б) $y = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} x^2 - \frac{1}{7} x^3 + \dots$;

в) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^3 + \dots$; г) $y = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} x^2 + 7x^3 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy dx dy$, якщо D обмежена лініями $y = x^2$, $y = x$.

а) $\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{24}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V y dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $-(x^2 + y^2) \leq z \leq 0$.

а) 3; б) $\frac{12}{55}$; в) 2; г) 0; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – відрізок прямої від точки $A(-2;0)$ до точки $B(2;0)$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x^2 - 2x$, $y = x$.

а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{9}{2}$; в) 4; г) 1; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Обчислити $(2 + 2i)^6$.

а) $-512i$; б) 512; в) $-512i$; г) $512i$; д) інша відповідь.

Варіант 28

1. (8 балів) Яка з умов гарантує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Степеневим рядом загального вигляду називається ряд виду:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - x_0)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^{x-x_0}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Середнім значенням функції $f(x, y)$ в області D називається величина (S - площа області D):

а) $S \iint_D f(x, y) dx dy$; б) $\frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy$;
в) $\frac{1}{S^2} \iint_D f(x, y) dx dy$; г) $\frac{1}{\sqrt{S}} \iint_D f(x, y) dx dy$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Координати центра ваги матеріальної поверхні σ , поверхнева густина якої $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходяться за формулами (m - маса поверхні):

а) $x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} yz \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} xz \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} xy \gamma d\sigma$;

б) $x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x^2 \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y^2 \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z^2 \gamma d\sigma$;

в) $x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} xy \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z \gamma d\sigma$;

г) $x_c = \frac{1}{m^2} \iint_{\sigma} x^2 \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m^2} \iint_{\sigma} y^2 \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m^2} \iint_{\sigma} z^2 \gamma d\sigma$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається соленоїдальним, якщо:

а) $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$; б) $P + Q + R = 0$; в) $\text{div } \vec{F} = 0$; г) $\text{grad } \vec{F} = \vec{0}$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$; розбіжними є:

а) 2 і 3; б) всі; в) тільки 2; г) 1 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{n^n}$; 1) збіжний умовно;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arctg \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; 2) збіжний абсолютно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{4n+3}}$; 3) розбіжний.

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-1, 2-3, 3-2; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$.

а) $(-1; 1)$; б) $[-1; 1)$; в) $[-2; 2]$; г) $[-2; 2)$; д) інша відповідь.

(6 балів) Знайти 5-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

а) x^4 ; б) $-x^5$; в) $\frac{x^4}{4}$; г) $-\frac{x^5}{5}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = e^{3x} + 2xy^2$; $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + x + \frac{5}{3}x^2 + \dots$; б) $y = 1 + \frac{1}{3}x + 2x^2 + \dots$;

в) $y = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + \dots$; г) $y = 2 + 3x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy^2 dx dy$, якщо D обмежена лініями $y = x^2$, $y = x$.

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{40}$; в) $\frac{1}{40}$; г) $\frac{1}{8}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V y dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $-(x^2 + y^2) \leq z \leq 0$.

а) 3; б) $\frac{12}{55}$; в) 2; г) 0; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L xy dx$, де L – дуга синусоїди від точки $A(\pi; 0)$ до точки $B(0; 0)$.

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\pi$; в) 2π ; г) $\pi + 1$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

а) 18; б) 20; в) 16; г) 14; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Обчислити $(\sqrt{3} - i)^9$.

а) $512i$; б) 512; в) $-512i$; г) $-512i$; д) інша відповідь.

Варіант 29

1. (8 балів) Яка з умов гарантує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$;

в) $\int_1^{100} f(x) dx < 1$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = 0$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Яка функція є сумою ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$?

а) $\cos x$; б) e^x ; в) $\cosh x$; г) $\operatorname{arctg} x$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Якщо m і M - відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D , а S - площа цієї області, то має місце оцінка подвійного інтеграла:

а) $\frac{S}{M} \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \frac{S}{m}$; б) $mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS$;

в) $\frac{m}{S} \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \frac{M}{S}$; г) $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq (M - m)S$; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Моменти інерції відносно координатних осей матеріальної поверхні σ , поверхнева густина якої $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходяться за формулами:

а) $I_x = \iint_{\sigma} (y+z) \gamma d\sigma$, $I_y = \iint_{\sigma} (x+z) \gamma d\sigma$, $I_z = \iint_{\sigma} (x+y) \gamma d\sigma$;

б) $I_x = \iint_{\sigma} x^2 \gamma d\sigma$, $I_y = \iint_{\sigma} y^2 \gamma d\sigma$, $I_z = \iint_{\sigma} z^2 \gamma d\sigma$;

в) $I_x = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma d\sigma$, $I_y = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \gamma d\sigma$, $I_z = \iint_{\sigma} (z^2 + x^2) \gamma d\sigma$;

г) $I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \gamma d\sigma$, $I_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \gamma d\sigma$, $I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma d\sigma$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Дивергенцією векторного поля $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається:

а) вектор $\overline{\operatorname{div}} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z} \vec{k}$; б) скаляр $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}$;

в) вектор $\overline{\operatorname{div}} \vec{F} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \vec{k}$;

г) скаляр $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^{n-1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{((n+1)^3 - 1) \ln(n+1)}$; збіжними є:

а) тільки 1; б) 1 і 3; в) 2 і 3; г) 1 і 2; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-1}{n(2n+1)}; \quad 1) \text{ збіжний умовно};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n+1)^n}; \quad 2) \text{ розбіжний};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(\frac{n+2}{3n+5}\right); \quad 3) \text{ збіжний абсолютно.}$$

а) 1-2, 2-3, 3-1; б) 1-1, 2-2, 3-3; в) 1-1, 2-3, 3-2; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

а) $(-4; 2)$; б) $[-4; -2]$; в) $(4; 0)$; г) $(-3; 1)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 5-й член розкладу в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -2$ функції $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

а) $-(x+2)^3$; б) $-(x+2)^5$; в) $(x+2)^5$; г) $(x+2)^4$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = e^{3x} + 2xy^2$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + x + \frac{5}{3}x^2 + \dots$; б) $y = 1 + \frac{1}{3}x + 2x^2 + \dots$;

в) $y = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + \dots$; г) $y = 2 + 3x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D x dx dy$, якщо D задана нерівностями: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V xy dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 2x + y$.

а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{35}{12}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{11}{12}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – верхня половина еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, яку проходять за годинниковою стрілкою.

а) $\frac{4ab}{3}$; б) $\frac{4a^2b}{3}$; в) $\frac{4a b^2}{3}$; г) $\frac{4a^2b^2}{3}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) 1; г) 2; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Обчислити $(2 + 2i)^6$.

а) $-512i$; б) 512; в) $-512i$; г) $512i$; д) інша відповідь.

Варіант 30

1. (8 балів) Якщо для двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ виконується $0 \leq a_n \leq b_n$ для всіх $n \geq n_0$, то:

- а) із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
 б) із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
 в) обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно;
 г) збіжність одного з цих рядів не залежить від збіжності іншого; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Сумою якого ряду є функція $\frac{1}{1+x}$?

- а) $1+x+x^2+x^3+\dots$; б) $1-x+x^2-x^3+\dots$;
 в) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+\dots$; г) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Які з наведених нижче формул не можуть бути правильними ?

- 1) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$;
 2) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dy \int_c^d dx \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$;
 3) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$;
 4) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y, z) dz$.

- а) тільки 2; б) 2 і 4; в) 3 і 4; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Координати центра ваги матеріальної поверхні σ , поверхнева густина якої $\gamma = \gamma(x, y, z)$, знаходяться за формулами (m - маса поверхні):

- а) $x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} yz \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} xz \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} xy \gamma d\sigma$;
 б) $x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x^2 \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y^2 \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z^2 \gamma d\sigma$;
 в) $x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z \gamma d\sigma$;
 г) $x_c = \frac{1}{m^2} \iint_{\sigma} x^2 \gamma d\sigma$, $y_c = \frac{1}{m^2} \iint_{\sigma} y^2 \gamma d\sigma$, $z_c = \frac{1}{m^2} \iint_{\sigma} z^2 \gamma d\sigma$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між:

- а) поверхневими інтегралами першого і другого роду;
 б) подвійними і поверхневими інтегралами;
 в) криволінійними і поверхневими інтегралами;
 г) потрійними і поверхневими інтегралами; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{n+3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n + 5)}; \quad \text{розбіжними є:}$$

а) 2 і 3; б) тільки 2; в) всі; г) 1 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos^2 \frac{\pi}{2n}; \quad 1) \text{ збіжний умовно;}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}; \quad 2) \text{ розбіжний;}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[4]{2}}{n}; \quad 3) \text{ збіжний абсолютно.}$$

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-1, 2-3, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

а) $(-\infty; \infty)$; б) $(-\infty; 0]$; в) $[0; \infty)$; г) 0; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 3-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \ln(2x^3)$.

$$а) \frac{2^4 x^{12}}{4!}; \quad б) -\frac{2^3 x^{18}}{3!}; \quad в) \frac{2^6 x^{18}}{6!}; \quad г) \frac{x^{16}}{4!}; \quad д) \text{ інша відповідь.}$$

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = 2x + y^2 + e^x$, $y(0) = 1$.

$$а) y = 1 + x + 2x^2 + \dots; \quad б) y = 2 - 3x - 5x^2 + \dots;$$

$$в) y = 1 + 2x + 4x^2 + \dots; \quad г) y = 1 + 2x + 3,5x^2 + \dots; \quad д) \text{ інша відповідь.}$$

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy^2 dx dy$, якщо D обмежена лініями $y = x^2$, $y = x$.

$$а) \frac{1}{3}; \quad б) \frac{3}{40}; \quad в) \frac{1}{40}; \quad г) \frac{1}{8}; \quad д) \text{ інша відповідь.}$$

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V x \cos y dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq 1 - x^2$.

$$а) -\frac{1}{4}; \quad б) \frac{1}{4}; \quad в) 4; \quad г) -4; \quad д) \text{ інша відповідь.}$$

13. (6 балів) Обчислити $\int_L xy dl$, де L – частина параболи $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$а) 25\sqrt{5} + 1; \quad б) \frac{25\sqrt{5} - 1}{12}; \quad в) \frac{\sqrt{5} - 1}{12}; \quad г) \frac{25\sqrt{5} + 1}{120}; \quad д) \text{ інша відповідь.}$$

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x^2$, $y = x$.

$$а) \frac{1}{6}; \quad б) \frac{1}{2}; \quad в) \frac{1}{4}; \quad г) \frac{1}{12}; \quad д) \text{ інша відповідь.}$$

15. (6 балів) Обчислити $(1 - \sqrt{3}i)^9$.

$$а) -512i; \quad б) 512; \quad в) 512i; \quad г) -512; \quad д) \text{ інша відповідь.}$$

Варіант 31

1. (8 балів) Яка з умов гарантує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Яка функція є сумою ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$?

- а) $\cos x$; б) e^x ; в) $\cosh x$; г) $\operatorname{arctg} x$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Координати центра ваги матеріальної пластини, яка займає область D на площині і поверхнева густина якої $\gamma = \gamma(x, y)$, знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned} \text{а) } x_c &= \frac{\iint_D x \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}; & \text{б) } x_c &= \frac{\iint_D x \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}; \\ \text{в) } x_c &= \frac{\iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}; & \text{г) } x_c &= \frac{\iint_D x \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}; \end{aligned}$$

д) інша відповідь.

4. (8 балів) Моменти інерції відносно координатних осей і відносно початку координат плоскої матеріальної кривої AB , лінійна густина якої $\gamma = \gamma(x, y)$, знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned} \text{а) } I_x &= \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl; \\ \text{б) } I_x &= \int_{AB} y \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int_{AB} x \gamma(x, y) dl, \quad I_0 = \int_{AB} (x + y) \gamma(x, y) dl; \\ \text{в) } I_x &= \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl; \\ \text{г) } I_x &= \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_0 = \int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} \gamma(x, y) dl; & \text{д) інша відповідь.} \end{aligned}$$

5. (8 балів) Формула Стокса встановлює зв'язок між:

- а) криволінійними і поверхневими інтегралами;
б) криволінійними і потрійними інтегралами;
в) подвійними і криволінійними інтегралами;
г) подвійними і потрійними інтегралами; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+7}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n \cdot n!}; \quad \text{збіжними є:}$$

- а) всі; б) тільки 3; в) 1 і 2; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n\sqrt{n+1}}; & \quad 1) \text{ збіжний умовно;} \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}; & \quad 2) \text{ збіжний абсолютною;} \end{aligned}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n + 5}$; 3) розбіжний.

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-1, 2-2, 3-3; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

а) $[-2; 0]$; б) $(2; 4)$; в) $(-2; 0)$; г) $(-1; 0)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 5-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = 2^{-x^3}$.

а) $-\frac{\ln^3 2}{3!} x^6$; б) $-\frac{\ln^5 2}{5!} x^{10}$; в) $-\frac{\ln^4 2}{4!} x^8$; г) $\frac{\ln^4 2}{4!} x^8$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = x - 2y^2$, $y(0) = 0,5$.

а) $y = 0,5 - 0,25x + 0,125x^2 + \dots$; б) $y = 1 - 2x + 3x^2 + \dots$;
в) $y = 0,5 - 0,5x + 2x^2 + \dots$; г) $y = 0,5 - 0,5x + x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Змінити порядок інтегрування: $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy$.

а) $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx$; б) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$;
в) $\int_0^1 dy \int_1^{y^2} f(x, y) dx$; г) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V 63(1 + 2\sqrt{y}) dx dy dz$, якщо V обмежена поверхнями $x=1$, $y=x$, $y=0$, $z=0$, $z=\sqrt{xy}$.

а) 32; б) 63; в) 1; г) 0; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L (x+y) dl$, де L – контур трикутника з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$.

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2\sqrt{2}$; в) $2+\sqrt{2}$; г) $2-\sqrt{2}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

а) 1,5; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 2; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Обчислити $(2+2i)^6$.

а) $-512i$; б) 512; в) $-512i$; г) $512i$; д) інша відповідь.

Варіант 32

1. (8 балів) Сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($|q| < 1$) дорівнює:

- а) $\frac{a}{1+q}$; б) $a(1-q)$; в) $\frac{a}{1-q}$; г) $\frac{a}{1-|q|}$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Яка функція є сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ($-1 \leq x \leq 1$) ?

- а) $\ln(1+x)$; б) $\frac{1}{1+x}$; в) $\arctg x$; г) $\sin x$; д) інша відповідь

3. (8 балів) Які з наведених нижче рівностей справедливі для потрійного інтеграла?

1) $\iiint_V (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \pm \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz$;

2) $\iiint_V f(x, y, z) \cdot g(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \cdot \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz$;

3) $\iiint_V \frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} dx dy dz = \frac{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V g(x, y, z) dx dy dz}$;

4) $\iiint_V Cf(x, y, z) dx dy dz = C \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ ($C = const$).

- а) 1 і 2; б) тільки 4; в) 1 і 4; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Які з наведених нижче рівностей справедливі для криволінійного інтеграла першого роду ?

1) $\int_{AB} Cf(x, y) dl = C \int_{AB} f(x, y) dl$;

2) $\int_{AB} f(x, y) dl = - \int_{BA} f(x, y) dl$;

3) $\int_{AB} f(x, y) \cdot g(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl \cdot \int_{AB} g(x, y) dl$;

4) $\int_{AB} (f(x, y) \pm g(x, y)) dl = \int_{AB} f(x, y) dl \pm \int_{AB} g(x, y) dl$.

- а) 3 і 4; б) 1, 2, і 4; в) тільки 1; г) 1 і 4; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Потік вектора $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ через поверхню σ знаходиться за формулою:

а) $\Pi = \iint_{\sigma} P dx dy + Q dy dz + R dz dx$; б) $\Pi = \iint_{\sigma} (P + Q + R) d\sigma$; в) $\Pi = \iint_{\sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$;

г) $\Pi = \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x} dy dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dz dx + \frac{\partial R}{\partial z} dx dy$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(3n)}$; розбіжними є:

- а) 1 і 2; б) 1 і 3; в) 2 і 3; г) тільки 1; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2 + 3}{2n^2 + 5n + 7}$; 1) розбіжний;

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^n(n+1)};$$

2) збіжний абсолютно;

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right);$$

3) збіжний умовно.

а) 1-3, 2-2, 3-1; б) 1-2, 2-1, 3-3; в) 1-1, 2-2, 3-3; г) 1-2, 2-3, 3-1; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n} (x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

а) $\left[-\frac{5}{4}; \frac{7}{4} \right]$; б) $\left(0; \frac{15}{4} \right)$; в) $\left(-\frac{5}{4}; \frac{13}{4} \right)$; г) $\left(\frac{7}{4}; \frac{13}{4} \right]$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 4-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$.

а) $\frac{3^5 x^4}{3!}$; б) $\frac{3^9 x^8}{9!}$; в) $-\frac{3^7 x^6}{7!}$; г) $-\frac{3^7 x^7}{7!}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = xy - y^2$, $y(0) = 0,2$.

а) $y = 0,2 + 3x - 0,5x^2 + \dots$; б) $y = 0,2 - 0,04x + 0,108x^2 + \dots$;
в) $y = 0,2 + 14x - 0,5x^2 + \dots$; г) $y = 3 - 2x + \frac{1}{5}x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy^2 dx dy$, якщо D обмежена лініями $y = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{x}$.

а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{21}$; г) $\frac{3}{2}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V xy dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 2x + y$.

а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{35}{12}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{11}{12}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;-2)$ і $B(4;0)$.

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5} \ln 2$; в) $\ln 2$; г) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x^2$, $y = -x$.

а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 0,5; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Знайти модуль r та аргумент φ комплексного числа $z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

а) $r = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; б) $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; в) $r = 4$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$; г) $r = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$; д) інша відповідь.

Варіант 33

1. (8 балів) Яка з умов гарантує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ може бути знайдений за формулою:

а) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$; б) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; в) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|}$; г) $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) 7.2.11. Які з наведених нижче формул не можуть бути правильними ?

$$1) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy \int_a^b f(x, y) dx; \quad 2) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dx \int_c^d f(x, y) dy;$$

$$3) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy; \quad 4) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

а) 1, 2 і 3; б) 1, 2 і 4; в) 1 і 3; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Формула Гріна має вид ($P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, L - замкнений контур, що обмежує область D і обходить її в додатному напрямі):

$$а) \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy; \quad б) \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy;$$

$$в) \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy; \quad г) \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx - Q dy; \quad д) інша відповідь.$$

5. (8 балів) Циркуляція вектора $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ вздовж замкнутого контура L знаходиться за формулою:

$$а) \mathcal{U} = \oint_L P dy + Q dz + R dx; \quad б) \mathcal{U} = \oint_L (P + Q + R) dl; \quad в) \mathcal{U} = \oint_L \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz;$$

$$г) \mathcal{U} = \oint_L P dx + Q dy + R dz; \quad д) інша відповідь.$$

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2 \frac{1}{n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2}; \quad \text{збіжними є:}$$

а) 1 і 3; б) тільки 2; в) 2 і 3; г) тільки 1; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n\sqrt{n+1}}; \quad 1) \text{ збіжний умовно;}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}; \quad 2) \text{ збіжний абсолютно;}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n + 5}; \quad 3) \text{ розбіжний.}$$

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-1, 2-2, 3-3; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{2n} (2x-3)^{2n-1}$.

а) $(-1,5; 1,5)$; б) $[-1; 3]$; в) $(-1; 1)$; г) $(1,45; 1,55)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 4-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$.

а) $\frac{x^4}{2^4 \cdot 4!}$; б) $-\frac{x^3}{2^3 \cdot 3!}$; в) $\frac{x^4}{4!}$; г) $-\frac{x^3}{3!}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = y \cos x + 2 \cos y$, $y(0) = 0$.

а) $y = 3x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \dots$; б) $y = x - x^2 + 4x^3 + \dots$;

в) $y = \frac{1}{2}x + 2x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \dots$; г) $y = 2x + x^2 - x^3 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D y \sin x dx dy$, якщо D – прямокутник $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$.

а) 1; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V (1+2x^3) dx dy dz$, якщо V обмежена поверхнями $x=1$, $y=9x$, $y=0$, $z=0$, $z=\sqrt{y}$.

а) 12; б) -2,7; в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{7}{2}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L (x+y) dy$, де L – контур трикутника, що обмежений осями координат і прямою $x+y=1$, який проходять проти годинникової стрілки.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.

а) 6π ; б) 6; в) 3π ; г) 8π ; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Знайти модуль r та аргумент φ комплексного числа $z = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}$.

а) $r=4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; б) $r=2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$; в) $r=2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; г) $r=2$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$; д) інша відповідь.

Варіант 34

1. (8 балів) Яка з умов гарантує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) ?

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; б) $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$;

в) $\int_1^{100} f(x) dx < 1$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = 0$, $f(x)$ - неперервна, спадна, $a_n = f(n)$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Сумою якого ряду є функція $\sin x$?

а) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$; б) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$;

в) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$; г) $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Які з наведених нижче формул не можуть бути правильними ?

1) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$;

2) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dy \int_c^d dx \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$;

3) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$;

4) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y, z) dz$.

а) тільки 2; б) 2 і 4; в) 3 і 4; г) 2 і 3; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Моменти інерції відносно координатних осей і відносно початку координат плоскої матеріальної кривої AB , лінійна густина якої $\gamma = \gamma(x, y)$, знаходяться за формулами:

а) $I_x = \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl$, $I_y = \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl$, $I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl$;

б) $I_x = \int_{AB} y \gamma(x, y) dl$, $I_y = \int_{AB} x \gamma(x, y) dl$, $I_0 = \int_{AB} (x + y) \gamma(x, y) dl$;

в) $I_x = \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl$, $I_y = \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl$, $I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl$;

г) $I_x = \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl$, $I_y = \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl$, $I_0 = \int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} \gamma(x, y) dl$; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Робота сили $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої L дорівнює:

а) $\int_L (P + Q + R) dl$; б) $\int_L P dx + Q dy + R dz$; в) $\int_L P dy + Q dz + R dx$;

г) $\int_L P^2 dx + Q^2 dy + R^2 dz$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n-1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{((n+1)^3 - 1) \ln(n+1)}$; збіжними є:
а) тільки 1; б) 1 і 3; в) 2 і 3; г) 1 і 2; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos^2 \frac{\pi}{2n}$; 1) збіжний умовно;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; 2) розбіжний;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{2}}{n}$; 3) збіжний абсолютно.

а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-1, 2-3, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

а) $(-1; 1)$; б) $[-1; 1)$; в) $[-2; 2)$; г) $(-2; 2)$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 3-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \cos \frac{2x^3}{3}$.

а) $\frac{2^8 x^{24}}{3^8 \cdot 8!}$; б) $-\frac{2^6 x^{18}}{3^6 \cdot 6!}$; в) $\frac{2^4 x^{12}}{3^4 \cdot 4!}$; г) $-\frac{2^2 x^6}{3^2 \cdot 2!}$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

а) $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \dots$; б) $y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$;

в) $y = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{6}{5}x^2 + \dots$; г) $y = 1 + x + 3x^2 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D xy^2 dx dy$, якщо D обмежена лініями $y^2 = x$, $-y = x$.

а) $\frac{1}{35}$; б) $-\frac{1}{35}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{14}$; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V x dx dy dz$, якщо V задана нерівностями $2 \leq x \leq 3$, $2 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq x + y$.

а) $\frac{15}{12}$; б) $\frac{151}{12}$; в) $\frac{51}{12}$; г) $\frac{12}{15}$; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L xy dl$, де L – контур прямокутника з вершинами $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$, $D(0;2)$.

а) 24; б) -24; в) 12; г) -12; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x^2$, $y = 2 - x$.

а) $\frac{11}{2}$; б) 4; в) $\frac{9}{2}$; г) 5; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{1+i}{3-i}$ в алгебраїчній формі.

а) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$; б) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$; в) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$; г) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$; д) інша відповідь.

Варіант 35

1. (8 балів) Сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($|q| < 1$) дорівнює:

а) $\frac{a}{1+q}$; б) $a(1-q)$; в) $\frac{a}{1-q}$; г) $\frac{a}{1-|q|}$; д) інша відповідь.

2. (8 балів) Встановити відповідність між функціями та рядами Маклорена:

1) $\ln(1+x)$;	1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;
2) $\ln(1-x)$;	2) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;
3) $\operatorname{arctg} x$;	3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

а) 1-3, 2-1, 3-2; б) 1-3, 2-2, 3-1; в) 1-2, 2-1, 3-3; г) 1-1, 2-2, 3-3; д) інша відповідь.

3. (8 балів) Які з наведених нижче формул є правильними?

1) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_a^b f(x, y) dx$; 2) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dy$;

3) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$; 4) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx$.

а) 2 і 3; б) 1 і 4; в) 3 і 4; г) тільки 4; д) інша відповідь.

4. (8 балів) Формула Гріна встановлює зв'язок між:

а) криволінійними інтегралами першого і другого роду;
 б) подвійними і криволінійними інтегралами;
 в) криволінійними і поверхневими інтегралами;
 г) подвійними і потрійними інтегралами; д) інша відповідь.

5. (8 балів) Векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ називається соленоїдальним, якщо:

а) $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$; б) $P + Q + R = 0$; в) $\operatorname{div} \vec{F} = 0$; г) $\operatorname{grad} \vec{F} = \vec{0}$; д) інша відповідь.

6. (6 балів) З поданих нижче рядів

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} tg^n \frac{\pi}{3n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$; розбіжними є:

а) 1 і 2; б) 2 і 3; в) тільки 1; г) тільки 2; д) інша відповідь.

7. (6 балів) Встановити відповідність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$; 1) розбіжний;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg \frac{1}{n}$; 2) збіжний умовно;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{5n+3}$; 3) збіжний абсолютно.

а) 1-3, 2-2, 3-1; б) 1-1, 2-2, 3-3; в) 1-2, 2-3, 3-3; г) 1-3, 2-1, 3-2; д) інша відповідь.

8. (6 балів) Знайти проміжок збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

а) $(-\infty; \infty)$; б) $(-1; 1)$; в) $[-1; 1]$; г) $(-\infty; 1]$; д) інша відповідь.

9. (6 балів) Знайти 4-й член розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = 5^{2x}$.

а) $\frac{2^4 \ln^4 5}{4!} x^4$; б) $\frac{\ln^4 5}{4!} x^4$; в) $\frac{2^3 \ln^3 5}{3!} x^3$; г) $\frac{2^4}{4!} x^4$; д) інша відповідь.

10. (6 балів) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y' = 2 \sin x + xy$, $y(0) = 0$.

а) $y = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{11}{360}x^6 + \dots$; б) $y = x^2 + 4x^4 + 6x^6 + \dots$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \dots$; г) $y = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \dots$; д) інша відповідь.

11. (6 балів) Обчислити $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, якщо D обмежена лініями $y^2 = x$, $x = 1$.

а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{105}{88}$; в) $\frac{88}{105}$; г) 0; д) інша відповідь.

12. (6 балів) Обчислити $\iiint_V 63(1 + 2\sqrt{y}) dx dy dz$, якщо V обмежена поверхнями $x = 1$, $y = x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = \sqrt{xy}$.

а) 32; б) 63; в) 1; г) 0; д) інша відповідь.

13. (6 балів) Обчислити $\int_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;-2)$ і $B(4;0)$.

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5} \ln 2$; в) $\ln 2$; г) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; д) інша відповідь.

14. (6 балів) Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho^2 = \cos 3\varphi$.

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{4}{3}$; г) 1; д) інша відповідь.

15. (6 балів) Записати комплексне число $z = \frac{1-2i}{3+i}$ в алгебраїчній формі.

а) $\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$; б) $\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$; в) $-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$; г) $\frac{3}{10} + \frac{7}{10}i$; д) інша відповідь.