

Лекція 6 Поверхневі інтеграли 1-го та 2-го роду

6.1 Поверхневі інтеграли 1-го роду

Як і криволінійні, поверхневі інтеграли бувають двох типів: першого і другого роду. В обох випадках областю інтегрування є криволінійна поверхня у просторі.

6.1.1 Задача про обчислення маси матеріальної поверхні, що приводить до поняття поверхневого інтеграла першого роду

Розглянемо поверхню σ (рис. 1), на якій розподілена маса з поверхневою густиною $\rho = \rho(x, y, z)$, де під поверхневою густиною ми розуміємо масу одиниці площі поверхні. Поставимо задачу про знаходження маси всієї поверхні.

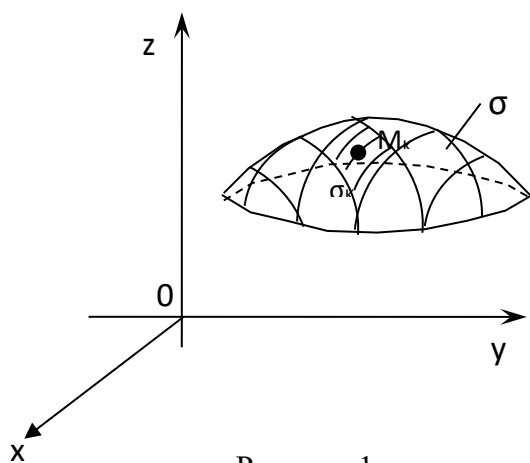


Рисунок 1

Розіб'ємо поверхню довільним чином на n частин σ_k , площі яких позначимо через $\Delta\sigma_k$. Якщо площа $\Delta\sigma_k$ мала, то значення поверхневої густини в точках області σ_k мало відрізняється від її значення в будь-якій точці $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \sigma_k$, тому маса σ_k наближено дорівнює

$$\Delta m_k \approx \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k$$

Маса всієї поверхні наближено виражається сумою мас частин розбиття:

$$m \approx \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k$$

Щоб отримати точне значення, перейдемо до границі, коли $\lambda \rightarrow 0$, де λ – найбільший із діаметрів частин σ_k . Отже,

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k \quad (1)$$

6.1.2 Означення поверхневого інтеграла першого роду

Нехай на поверхні σ задана функція $u = f(x, y, z)$, до якої формально застосуємо алгоритм розв'язування попередньої задачі. Виконаємо такі операції :

1) Поверхню σ довільним чином розіб'ємо на n частин σ_k з площами $\Delta\sigma_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) і найбільший із діаметрів цих частин позначимо через λ .

2) На кожній частині σ_k виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, в якій функція набуває значення $f(x_k, y_k, z_k)$

3) Побудуємо суму
$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k, \quad (2)$$

яка називається інтегральною сумою функції $u=f(x,y,z)$ по поверхні σ .

Означення Якщо при $\lambda \rightarrow 0$ існує границя інтегральної суми (6.2), яка не залежить від способу розбиття поверхні σ на частини $\Delta\sigma_k$ і від вибору точок M_k , то ця границя називається поверхневим інтегралом першого роду і позначається :

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k \quad (3)$$

Відмітимо без доведення, що границя інтегральної суми існує, якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна, а поверхня σ є гладкою (в кожній точці існує дотична площина) і обмеженою. В цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається інтегровною по поверхні σ , а сама поверхня σ - областю інтегрування.

Означення поверхневого інтеграла першого роду по суті аналогічне означенню подвійного інтеграла, *тільки областю інтегрування є не плоска область D на площині, а частина криволінійної поверхні у просторі*. Тому властивості подвійних інтегралів без особливих змін поширюються на поверхневі інтеграли.

6.1.3 Обчислення поверхневих інтегралів першого роду

Нехай потрібно обчислити поверхневий інтеграл першого роду

$$I = \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$$

Тут σ - гладка поверхня, задана рівнянням $z=z(x, y)$, де $z(x, y)$ разом з похідними $z'_x(x, y)$ і $z'_y(x, y)$ неперервна в замкненій області D , яка є проекцією поверхні σ на площину xOy (рис. 2). Нехай функція $f(x, y, z)$ -

неперервна на поверхні σ і, отже, інтегрована на цій поверхні. Виділимо на поверхні σ частину з площею $d\sigma$.

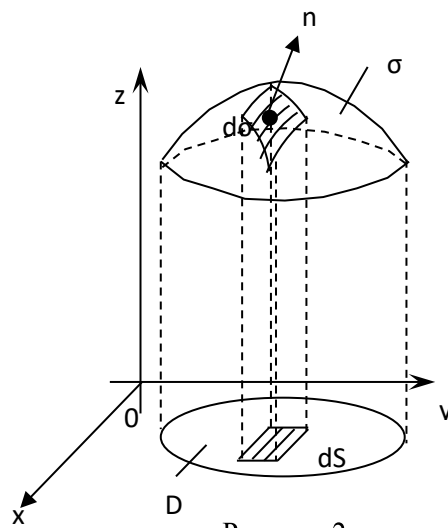


Рисунок 2

Тут σ - гладка поверхня, задана рівнянням $z=z(x, y)$, де $z(x, y)$ разом з похідними $z'_x(x, y)$ і $z'_y(x, y)$ неперервна в замкненій області D , яка є проекцією поверхні σ на площину xOy (рис. 2). Нехай функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ і, отже, інтегрована на цій поверхні. Виділимо на поверхні σ частину з площею $d\sigma$, на якій виберемо довільну точку і в цій точці встановимо нормаль $\vec{n}$ до поверхні, точніше, до дотичної площини, проведеної до поверхні у вибраній точці. Припустимо, що нормаль $\vec{n}$ утворює гострий кут γ з віссю Oz . Запишемо рівняння поверхні σ у вигляді :

$F(x, y, z) = z - \varphi(x, y) = 0$. Тоді, як відомо, вектор нормалі $\vec{n}$ до цієї поверхні має координати :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1, \quad \text{тобто} \quad \vec{n} = \left\{ -\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1 \right\}.$$

Запишемо зв'язок площі частини $d\sigma$ з площею ds - її проекції на площину

$$xOy: \quad d\sigma = \frac{ds}{\cos \gamma}, \quad \text{де} \quad ds = dxdy,$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}. \quad \text{Отже,} \quad d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dxdy \quad (4)$$

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла першого роду можна звести до обчислення подвійного інтеграла по області D за такою схемою :

$$I = \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \left. \begin{array}{l} z = \varphi(x, y) \\ d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dxdy \\ \sigma \rightarrow D \end{array} \right| = \iint_D f[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dxdy \quad (5)$$

Під записом $\sigma \rightarrow D$ тут і надалі розуміємо, що поверхня σ відображається в область D на площині xOy .

Приклад 1 Обчислити $I = \iint_{\sigma} (3x + 4y + 2z) d\sigma$, де σ - частина площини $x + y + z = 2$, розміщена у першому октанті (рис. 3).

Розв'язування Запишемо рівняння площини σ у вигляді:

$$z = 2 - x - y, \text{ тоді } \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1, \quad d\sigma = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

За формулою (5) маємо

$$I = \left| \begin{array}{l} z = 2 - x - y \\ \sigma \rightarrow D \end{array} \right| d\sigma = \sqrt{3} dx dy = \iint_D (3x + 4y + 4 - 2x - 2y) \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \iint_D (x + 2y + 4) dx dy$$

Тут область D - проекція площини σ на площину xOy (рис.4). Тоді :

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{3} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x + 2y + 4) dy = \sqrt{3} \int_0^2 \left[(x + 4)y + 2 \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^{2-x} dx = \sqrt{3} \int_0^2 (12 - 6x) dx = \\ &= \sqrt{3} (12x - 3x^2) \Big|_0^2 = 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

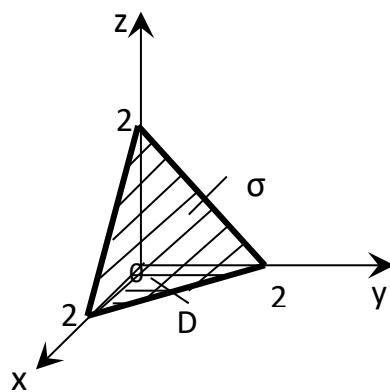


Рисунок 3

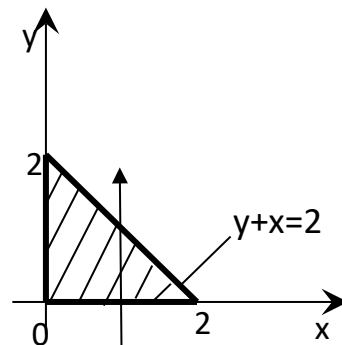


Рисунок.4

6.1.4 Застосування поверхневих інтегралів першого роду

1) Маса матеріальної пластини σ з поверхневою густиною

$$m = \iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma \quad (6)$$

$\rho = \rho(x, y, z)$:

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma \quad (7)$$

2) Площа поверхні σ :

3) Статичні моменти матеріальної поверхні σ відносно координатних площин

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iint_{\sigma} z\rho(x, y, z) d\sigma \\
 M_{xz} &= \iint_{\sigma} y\rho(x, y, z) d\sigma
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

$$M_{yz} = \iint_{\sigma} x\rho(x, y, z) d\sigma$$

4) Координати центра мас $C(x_c, y_c, z_c)$ **матеріальної поверхні з**
густиною $\rho = \rho(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} x\rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma} \\
 y_c &= \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} y\rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma} \\
 z_c &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} z\rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Якщо поверхня *однорідна*, тобто $\rho = \text{const}$, то формули (9) набудуть простішого вигляду:

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\iint_{\sigma} x d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma} & y_c &= \frac{\iint_{\sigma} y d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma} & z_c &= \frac{\iint_{\sigma} z d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

В останньому випадку доцільно враховувати *симетрію поверхні*, якщо вона є.

5) Моменти інерції матеріальної поверхні σ **з густиною** $\rho = \rho(x, y, z)$ **відносно координатних осей і початку координат відповідно:**

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma \\
 I_y &= \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma \\
 I_z &= \iint_{\sigma} (y^2 + x^2) \rho(x, y, z) d\sigma
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

$$I_0 = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2 + x^2) \rho(x, y, z) d\sigma$$

Розглянемо **приклад застосування поверхневих інтегралів першого роду.**

Приклад 2 Знайти площу частини поверхні конуса $z^2 = 2xy$, розташованої в I-му октанті між площинами $x=2, y=4$ (рис 5).

Розв'язування

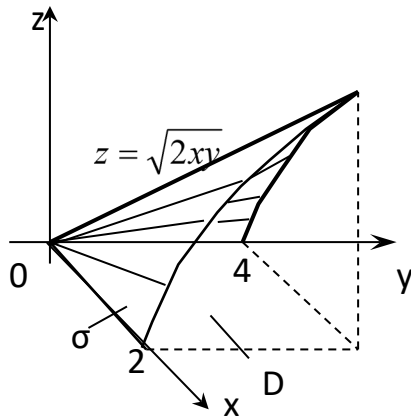


Рисунок.5

Запишемо рівняння поверхні σ у вигляді $z = \sqrt{2xy}$, тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2xy}} 2y = \sqrt{\frac{y}{2x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2xy}} 2x = \sqrt{\frac{x}{2y}}$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}} dx dy = \sqrt{\frac{2xy + y^2 + x^2}{2xy}} dx dy = \\ &= \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}} dx dy = \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dx dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx dy \end{aligned}$$

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx dy,$$

За формулою (7)

де D - проекція σ на площину xOy - прямокутник $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$.

Обчислюючи подвійний інтеграл, одержимо

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \left(2\sqrt{xy} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{y^3}{x}} \right) \Big|_0^4 dx = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^2 \left(\sqrt{x} + \frac{4}{3\sqrt{x}} \right) dx = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{8}{3} \sqrt{x} \right) \Big|_0^2 = 16 (\text{кв.од}) \end{aligned}$$

Приклад 3 Знайти масу півсфери, якщо в кожній її точці поверхнева густина чисельно дорівнює відстані від цієї точки до радіуса, перпендикулярного основі півсфери.

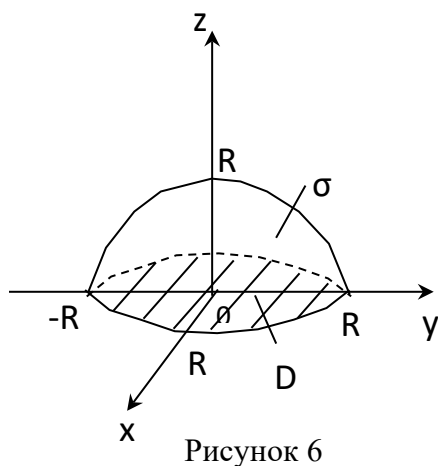


Рисунок 6

Розв'язування

Введемо декартову прямокутну систему координат таким чином, щоб її початок був у центрі основи півсфери і направимо вісь Oz перпендикулярно до цієї основи (рис. 6). Тоді рівняння півсфери буде

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, де R - радіус сфери. За умовою густина $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

За формулою (6)

$m = \iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma = R \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2} dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, де D - проекція поверхні σ на площину xOy , тобто круг $x^2 + y^2 \leq R^2$. Переходячи до полярних координат, знайдемо:

$$m = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \\ dx dy = r dr d\varphi \\ D: 0 \leq r \leq R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right| = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \left| \begin{array}{l} r = R \sin t \\ dr = R \cos t dt \\ \left. \begin{array}{l} r \\ t \end{array} \right|_0^R \left| \begin{array}{l} 0 \\ \pi/2 \end{array} \right| \end{array} \right| =$$

$$= R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sin^2 t R \cos t dt}{\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t}} = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

$$\frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{R^3 \pi}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3 \pi^2}{2}$$

Приклад 4 Знайти координати центра мас частини однорідної поверхні параболоїда $y^2 + z^2 = 10x$, яку відтинає площина $x=10$ (рис. 7)

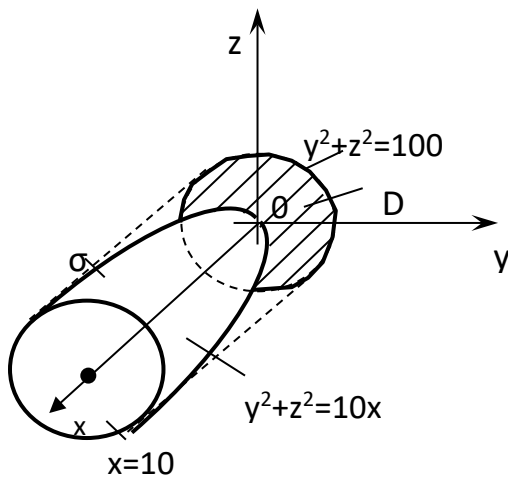


Рисунок 7

Розв'язування Дана поверхня σ однорідна і симетрична відносно осі Ox . Тому $y_c = z_c = 0$. Щоб знайти x_c , обчислимо статичний момент M_{yz} і масу m даної поверхні.

Рівняння поверхні запишемо у вигляді :

$$x = \frac{y^2 + z^2}{10} \quad \text{Тоді} \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{y}{5}; \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{z}{5}.$$

Маємо:

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz = \sqrt{1 + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25}} dydz = \frac{1}{5} \sqrt{25 + y^2 + z^2} dydz$$

За формулою (8)

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iint_{\sigma} x \rho(x, y, z) d\sigma = \left| \begin{array}{l} \rho = \text{const}, \quad x = \frac{y^2 + z^2}{10}, \\ d\sigma = \frac{1}{5} \sqrt{25 + y^2 + z^2} dydz = \\ \sigma \rightarrow D (D: y^2 + z^2 \leq 100) \end{array} \right| = \\ &= \frac{\rho}{50} \iint_D (y^2 + z^2) \sqrt{25 + y^2 + z^2} dydz = \left| \begin{array}{l} y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi \\ dydz = r dr d\varphi \\ D': 0 \leq r \leq 10; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right| = \\ &= \frac{\rho}{50} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{10} r^3 \sqrt{25 + r^2} dr = \left| \begin{array}{l} \sqrt{25 + r^2} = t \\ r^2 = t^2 - 25 \\ 2r dr = 2t dt \\ \left. \begin{array}{l} r \\ t \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} 10 \\ 5\sqrt{5} \end{array} \end{array} \right| = \frac{\rho}{50} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_5^{5\sqrt{5}} (t^2 - 25) t dt = \\ &= \frac{\rho}{50} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_5^{5\sqrt{5}} (t^4 - 25t^2) dt = \frac{\rho}{50} \int_0^{2\pi} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{25t^3}{3} \right) \Big|_5^{5\sqrt{5}} d\varphi = \frac{50}{3} \pi \rho (1 + 25\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma = \frac{\rho}{5} \iint_D \sqrt{25 + y^2 + z^2} dy dz = \left. \begin{aligned} y &= r \cos \varphi, z = r \sin \varphi \\ dx dz &= r dr d\varphi \\ D': 0 &\leq r \leq 10; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \right| = \\
 &= \frac{\rho}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{10} \sqrt{25 + r^2} r dr = \frac{\rho}{10} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{10} (25 + r^2)^{\frac{1}{2}} d(25 + r^2) = \\
 &= \frac{\rho}{10} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} (25 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{10} d\varphi = \frac{50}{3} \pi \rho (5\sqrt{5} - 1)
 \end{aligned}$$

За формулою (9) знайдемо

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{25\sqrt{5} + 1}{5\sqrt{5} - 1}.$$

6.2 Поняття про двосторонні та односторонні поверхні

Нехай маємо поверхню σ (рис. 9). Виберемо на цій поверхні будь-який замкнений контур Γ і на ньому точку M , в якій встановимо нормаль $\vec{n}$ до поверхні.

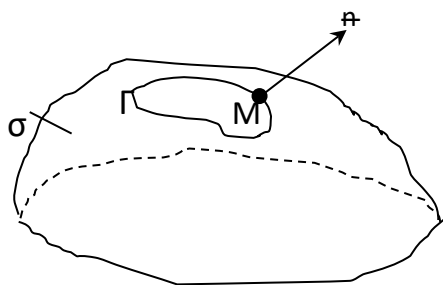


Рисунок.9

Означення Поверхня σ називається *двосторонньою* або *орієнтованою*, якщо після обходу будь-якого замкнутого контуру Γ , що лежить на поверхні і не має спільних точок з її границею, напрям нормалі $\vec{n}$ в точці M контуру не змінюється. В протилежному випадку поверхня називається *односторонньою*.

Прикладом односторонньої поверхні є лист Мьобіуса (рис. 10). Тут існують такі замкнені контури Γ , що після обходу по них нормаль $\vec{n}_1$ до поверхні в точці M буде мати протилежний напрям:

$\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$. Існує багато цікавих і важливих задач із застосуванням листа

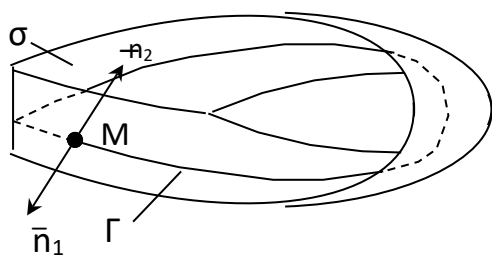


Рисунок 10

Мьобіуса. Такими задачами займається новий важливий розділ математики, що називається *топологією*. В подальшому ми будемо розглядати лише двосторонні поверхні, до яких належать всі гладкі поверхні, що задаються рівнянням $z = \varphi(x, y)$. Орієнтація поверхні здійснюється за допомогою вибору нормалі

до поверхні, що дозволяє розрізняти зовнішню та внутрішню сторони поверхні.

З допомогою поверхневих інтегралів розв'язується багато задач, що стосуються скалярно заданої функції в просторовій області.

В наступній лекції буде введено дуже важливе поняття *поверхневого інтеграла 2-го роду*. Цей інтеграл має найширше використання в *теорії поля та векторному аналізі* і визначається заданням *векторної функції* в просторовій області.

6.2 Поверхневі інтеграли 2-го роду

6.2.1 Задача про обчислення потоку рідини через поверхню, що приводить до поняття поверхневого інтеграла другого роду

Нехай дана просторова область, заповнена рідиною, що рухається зі швидкістю $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, де $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$. Треба обчислити кількість рідини Π , що протікає за одиницю часу через задану поверхню σ .

Розіб'ємо цю поверхню на n частин σ_k ($k=1, 2, \dots, n$) з площами $\Delta\sigma_k$. Якщо $\Delta\sigma_k$ малі, то можна вважати, що для всіх точок в частині σ_k швидкість стала і дорівнює швидкості в деякій точці $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \sigma_k$, а поверхні σ_k - плоскі.

Відомо, що кількість рідини, що протікає через частину σ_k за одиницю часу, дорівнює добутку проекції швидкості на вісь, яка визначається *ортом нормалі* до σ_k , на площу $\Delta\sigma_k$. Координатами орта нормалі є напрямні косинуси нормалі, тобто $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, а проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{n}$ є скалярний добуток: $\text{пр}_n \vec{a} = \vec{a} \vec{n}$. Отже :

$$\Delta\Pi_k \approx \vec{a} \vec{n} \Delta\sigma_k = [P(x_k, y_k, z_k) \cos \alpha + Q(x_k, y_k, z_k) \cos \beta + R(x_k, y_k, z_k) \cos \gamma] \Delta\sigma_k$$

Кількість рідини, що протікає через всю поверхню σ за одиницю часу, наближено виражається формулою:

$$\Pi \approx \sum_{k=1}^n [P(x_k, y_k, z_k) \cos \alpha + Q(x_k, y_k, z_k) \cos \beta + R(x_k, y_k, z_k) \cos \gamma] \Delta\sigma_k$$

Точне значення цієї величини одержимо, якщо знайдемо границю суми, коли $\lambda \rightarrow 0$, де λ - найбільший з діаметрів частин σ_k :

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [P(x_k, y_k, z_k) \cos \alpha + Q(x_k, y_k, z_k) \cos \beta + R(x_k, y_k, z_k) \cos \gamma] \Delta\sigma_k \quad (1)$$

Добутки $\cos \alpha \Delta \sigma_k, \cos \beta \Delta \sigma_k, \cos \gamma \Delta \sigma_k$ в (1) є проекціями поверхонь σ_k відповідно на координатні площини yOz, xOz, xOy . Позначимо їх через $(\Delta S_{yz})_k, (\Delta S_{xz})_k, (\Delta S_{xy})_k$, тобто

$$\cos \alpha \Delta \sigma = (\Delta S_{yz})_k, \cos \beta \Delta \sigma = (\Delta S_{xz})_k, \cos \gamma \Delta \sigma = (\Delta S_{xy})_k \quad (2)$$

Площі проекцій беремо зі знаком плюс або мінус в залежності від того, який кут (гострий чи тупий) утворює нормаль $\vec{n}$ до поверхні з відповідною координатною віссю. З урахуванням (7.2):

$$P \approx \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n [P(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{yz})_k + Q(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xz})_k + R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k] \quad (3)$$

6.2.2 Означення поверхневого інтеграла другого роду

Відійдемо від конкретного змісту попередньої задачі і перенесемо алгоритм її розв'язування на будь-яку функцію $R = R(x, y, z)$, визначену і неперервну на гладкій орієнтованій поверхні σ .

Виконаємо такі операції:

- 1) Розіб'ємо поверхню σ довільним чином на n частин σ_k ($k=1, 2, \dots, n$)
- 2) В кожній з частин σ_k виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, в якій функція R має значення $R = R(x_k, y_k, z_k)$
- 3) Побудуємо суму

$$\sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k, \quad (4)$$

яка називається інтегральною сумою для функції R по поверхні σ . Тут $(\Delta S_{xy})_k$ - величина проекції σ_k на площину xOy , що дорівнює площі області, в яку проектується σ_k на xOy , взятої із знаком плюс, якщо нормаль до поверхні в точці M_k утворює з віссю Oz гострий кут, і зі знаком мінус, якщо вказаний кут - тупий. Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей σ_k .

Означення Якщо при $\lambda \rightarrow 0$ існує границя інтегральної суми (4), яка не залежить від способу розбиття поверхні σ на частини σ_k і від вибору точок M_k , то ця границя називається *поверхневим інтегралом другого роду* від функції $R(x, y, z)$ по поверхні σ . Позначається:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k \quad (5)$$

Відмітимо, що ця границя існує, якщо двостороння поверхня σ є обмеженою і гладкою і функція $R(x, y, z)$ - неперервна на ній.

Аналогічно визначаються поверхневі інтеграли другого роду для функцій $Q = Q(x, y, z)$ і $P = P(x, y, z)$, неперервних на поверхні σ :

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q(x_k, y_k, z_k) (\Delta S_{xz})_k \quad (6)$$

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(x_k, y_k, z_k) (\Delta S_{xy})_k \quad (7)$$

Суму (7.5)-(7.7) називають загальним поверхневим інтегралом другого роду і позначають:

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma} P dy dz + \iint_{\sigma} Q dx dy + \iint_{\sigma} R dx dy \quad (8)$$

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy, \quad \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dz, \quad \iint_{\sigma} R(x, y, z) dy dz$$

Зауваження Поверхневий інтеграл другого роду має ті ж властивості, що і поверхневий інтеграл першого роду, але на відміну від останнього при зміні сторони поверхні він змінює знак на протилежний.

6.2.3 Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

Розглянемо поверхневий інтеграл другого роду $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$, де σ - гладка поверхня, задана рівнянням $z = \varphi(x, y)$. Припустимо, що поверхня σ взаємно-однозначно проектується в область D площини xOy . За означенням

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k) (\Delta S_{xy})_k$$

де $(\Delta S_{xy})_k$ - величина проекції області σ_k на площину xOy , тобто площа області, в яку проектується область σ_k на xOy , взята зі знаком плюс, якщо нормаль до поверхні в точці M_k утворює з віссю Oz гострий кут, і зі знаком мінус, якщо цей кут тупий. Оскільки

$$\sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k) (\Delta S_{xy})_k = \sum_{k=1}^n R[x_k, y_k, \varphi(x_k, y_k)] (\Delta S_{xy})_k$$

то, переходячи до границі при $\lambda \rightarrow 0$, одержимо для зовнішньої сторони поверхні, тобто у випадку, коли $\cos \gamma \geq 0$, де γ - гострий кут між нормаллю до поверхні і віссю Oz :

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_D R[x, y, \varphi(x, y)] dx dy \quad (9)$$

Для внутрішньої сторони поверхні, тобто у випадку, коли **$\cos \gamma < 0$** , (тобто γ - тупий кут). Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли другого роду по координатах X, Z і Y, Z (для функцій Q і P):

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_D R[x, y, \varphi(x, y)] dx dy \quad (10)$$

Таким чином, **обчислення поверхневих інтегралів другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів.**

Приклад 5 Обчислити $I = \iint_{\sigma} z dx dy + x dx dz + y dy dz$, де σ -

частина площини $x - y + z = 1$, вирізана координатними площинами. Орієнтація поверхні задається нормаллю $\vec{n}$ (рис. 1).

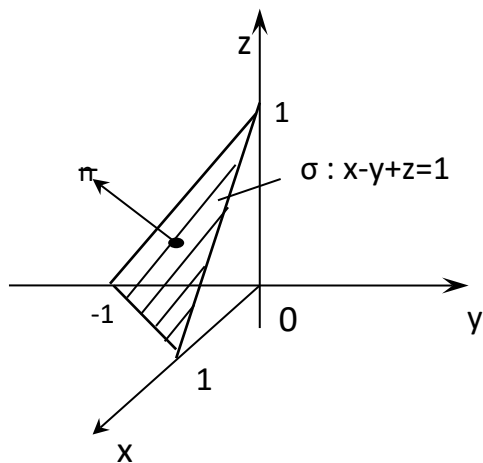


Рисунок 1

Розв'язування

Запишемо цей інтеграл, як суму трьох інтегралів $I = I_1 + I_2 + I_3$, і знайдемо кожний доданок окремо.

$$I_1 = \iint_{\sigma} z dx dy = \left| \begin{array}{l} \sigma : z = 1 - x + y \\ \sigma \rightarrow D_{xoy} \\ \cos \gamma > 0 \end{array} \right| = \iint_{D_{xoy}} (1 - x + y) dx dy$$

Тут D_{xoy} - проекція поверхні σ на площину xOy (рис. 2). Обчислимо подвійний інтеграл :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 [(1-x) + y] dy = \int_0^1 \left[(1-x)y + \frac{y^2}{2} \right]_{x-1}^0 dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(перевірте!)

$$I_2 = \iint_{\sigma} x dx dz = \left| \begin{array}{l} \sigma \rightarrow D_{xoz} \\ \cos \beta < 0 \end{array} \right| = - \iint_{D_{xoz}} x dx dz = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x dz = -\frac{1}{6}$$

(перевірте!)

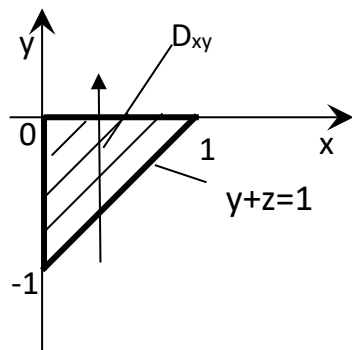


Рисунок.2

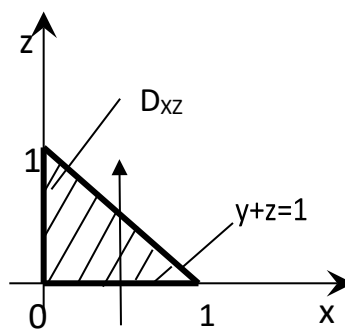


Рисунок.3

де D_{xOz} –
проекція σ на
площину xOz
(рис. 3)

$$I_3 = \iint_{\sigma} y dy dz = \left| \sigma \rightarrow D_{yOz} \right|_{\cos \alpha > 0} = \iint_{D_{yOz}} y dy dz$$

де D_{yOz} – проекція σ на площину yOz (рис.7.4)

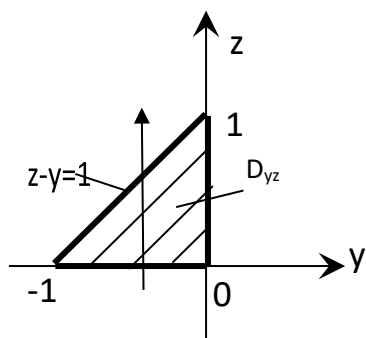


Рисунок 4

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-1}^0 y dy \int_0^{1+y} dz = \int_{-1}^0 y [z]_0^{1+y} dy = \\ &= \int_{-1}^0 (y + y^2) dy = \\ &= \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6} \\ &\text{(перевірте!)} \end{aligned}$$

$$\text{Отже, шуканий інтеграл } I = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

6.3 Формула Остроградського-Гаусса

Формула Остроградського-Гаусса дає зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею.

Нехай маємо стандартну (по кожній змінній) просторову область V , обмежену поверхнею σ . Розглянемо зовнішню сторону поверхні, яка є гладкою, або кусково-гладкою.

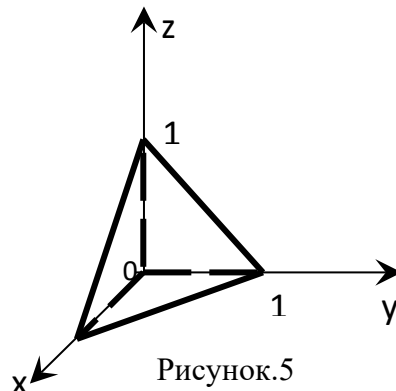
Теорема Нехай V - стандартна замкнена область, обмежена поверхнею σ і нехай функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ в заданій області. Тоді має місце формула :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy \quad (11)$$

яка називається *формулою Остроградського-Гаусса*. Зауважимо, що цю формулу доцільно використовувати при обчисленні поверхневих інтегралів другого роду по замкнених поверхнях. Доведення цієї теореми дається в більш повних курсах вищої математики.

Приклад 6 Обчислити $I = \iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy$, де σ - зовнішня сторона піраміди, утвореної площинами $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 5)

Розв'язування За формулою Остроградського-Гаусса (11)



$$I = \left| \begin{matrix} P = x, Q = y, R = z \\ \frac{\partial P}{\partial x} = 1, \frac{\partial Q}{\partial y} = 1, \frac{\partial R}{\partial z} = 1 \end{matrix} \right| = \iiint_V (1 + 1 + 1) dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = 3V_{\text{пір}} = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

так як $\iiint_V dx dy dz = V_{\text{пір}}$. Без використання формули Остроградського-Гаусса прийшлося би взяти чотири поверхневих інтеграли по всіх гранях піраміди.

6.4 Формула Стокса

Формула Стокса дає зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами і є узагальненням формули Гріна на випадок тривимірного простору.

Нехай σ - поверхня, задана рівнянням $z = \varphi(x, y)$, де функції $\varphi(x, y)$, $\varphi'_x(x, y)$, $\varphi'_y(x, y)$ неперервні у замкненій області D - проекції поверхні σ на площину xOy ; L - контур, на який спирається поверхня σ . Далі, нехай контур L проектується на площину xOy у границю області D - деякий контур Γ . Виберемо верхню (зовнішню) сторону поверхні σ (рис. 6). Тоді має місце така теорема.

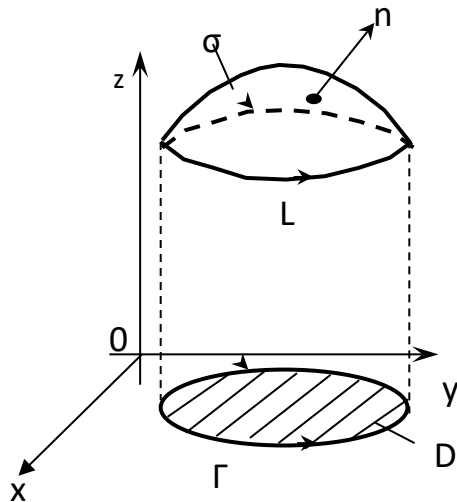


Рисунок 6

Тоді має місце така теорема.

Теорема Якщо функція $P(x, y, z)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними першого порядку на поверхні σ , то має місце формула :

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma, \quad (12)$$

де $\cos \beta, \cos \gamma$ - відповідні напрямні косинуси нормалі $\vec{n}$ до поверхні σ , а обхід контуру L відбувається у додатному напрямі.

Для функцій $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ можна аналогічно записати:

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma, \quad (13)$$

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma \quad (14)$$

Додавши почленно рівності (12) - (14), одержимо формулу Стокса

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right] d\sigma \quad (15)$$

Формулу Стокса можна переписати у більш зручній формі :

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \quad (16)$$

Зауваження Формулу Стокса легко запам'ятати, помітивши, що перший доданок у правій частині (16) - це той же вираз, що міститься під знаком подвійного інтеграла у формулі Гріна, а другий і третій доданки одержуємо з нього циклічною перестановкою координат x, y, z і функцій P, Q, R .

Як окремий випадок, коли поверхня σ - частина площини xOy , обмежена замкненим контуром Γ , з формули Стокса одержуємо формулу Гріна, оскільки інтеграли по $dzdx$ і $dydz$ дорівнюють нулю.

Формула Стокса дозволяє **звести обчислення криволінійного інтеграла по замкнутому контуру до обчислення поверхневого інтеграла по поверхні, що спирається на цей контур.**

Приклад 7 Обчислити за допомогою формули Стокса інтеграл

$$I = \oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$$

, де L - коло, задане рівняннями $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, обхід якого здійснюється у додатному напрямі, а поверхнею σ є верхня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, (z > 0)$ (рис. 7.7)

Розв'язування

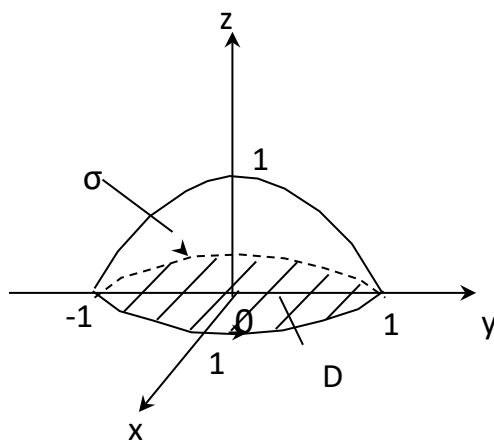


Рисунок 7

$$P = x^2 y^3, Q = 1, R = z,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^3, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx$$

За формулою Стокса (16) маємо:

$$I_1 = -3 \iint_{\sigma} x^2 y^2 dx dy = \left| \begin{matrix} \sigma \rightarrow D \\ \cos \gamma > 0 \end{matrix} \right| = -3 \iint_D x^2 y^2 dx dy = \left| \begin{matrix} x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \\ dx dy = r dr d\varphi \\ D: 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right| =$$

$$= -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr = -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^1 r^5 dr = -\frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{16} \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{8}.$$

Зауважимо, що поверхню σ можна вибрати довільно, але з умовою, щоб вона була гладкою або кусково-гладкою і “натягненою” на замкнений контур L .

6.5 Елементи теорії поля

6.5.1 Скалярне і векторне поля

В основі теорії поля та її математичного апарата – диференціального та інтегрального числення – лежить *модель суцільного середовища*, під яким розуміють матеріальну субстанцію, що має властивості подільності до нескінченності (безструктурність) і неперервності усіх своїх характеристик у деякій області. Отже, під *полем* розуміємо область простору, в кожній точці якої задано значення певної характеристики суцільного середовища. Ці характеристики можуть бути *скалярними* (температура, тиск, густина), *векторними* (швидкість, прискорення) і *тензорними* (деформація). У відповідності з цим і поле може бути *скалярним* (поле температур), *векторним* (поле швидкостей), *тензорним* (поле деформацій). Ми обмежимося розглядом скалярних і векторних полів.

Скалярне поле вважається заданим, якщо є закон, за яким кожній точці M деякої області простору ставиться у відповідність певна скалярна величина $u(M)$. Задання скалярного поля рівносильно заданню скалярної функції трьох змінних (у просторі) $u(x, y, z)$ або двох змінних (на площині) $u(x, y)$.

Множину точок, в яких величина $u = \text{const} = c$, називають *поверхнями (лініями) рівня* скалярного поля. Важливою характеристикою скалярного поля є швидкість зміни поля в заданому напрямі. Ця швидкість визначається *похідною функції u за напрямом $\vec{l}$* , яка обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \vec{N} \cdot \vec{l}^\circ, \quad (1)$$

де $\vec{N} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$ - нормальний вектор до поверхні рівня,

$\vec{l}^\circ = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ - одиничний вектор напрямку $\vec{l}$. Якщо $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то в

даному напрямі $\vec{l}$ скалярне поле $u(M)$ зростає, а якщо $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, то спадає.

Вектор $\vec{N}$ називають *градієнтом* скалярного поля і позначають:

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (2)$$

Найбільша швидкість зміни скалярного поля буде саме в напрямі $\vec{N}$ і вона дорівнює:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\overline{\text{grad } u}|$$

Векторне поле вважається заданим, якщо є закон, за яким кожній точці M деякої області V простору ставиться у відповідність певна векторна величина $\bar{a}(M)$

$$\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k} \quad (3)$$

Тут точка M розглядається у тривимірному просторі, отже, $M(x, y, z)$ і функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$, які будемо вважати неперервними в області V .

6.5.2 Оператор Гамільтона

Основні характеристики векторного поля і операції з ними зручно представляти за допомогою оператора Гамільтона (оператора «набла»):

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} \quad (4)$$

Оператор $\bar{\nabla}$ слід розглядати як символічний вектор, а операції з ним **виконувати за правилами векторної алгебри**.

Розглянемо деякі його застосування.

1) Нехай $u(x, y, z)$ - скалярна функція. Тоді добуток вектора $\bar{\nabla}$ на функцію u дає градієнт цієї функції:

$$\bar{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \overline{\text{grad } u} \quad (5)$$

2) Нехай $\bar{a} = \{P, Q, R\}$ - вектор-функція, де P, Q, R - скалярні функції змінних x, y, z (координати вектора $\bar{a}$). Тоді скалярний добуток вектора $\bar{\nabla}$ на вектор-функцію $\bar{a}(M)$ дає скалярну величину, яка називається дивергенцією цієї вектор-функції:

3) Векторний добуток вектора $\bar{\nabla}$ на вектор-функцію $\bar{a}(M)$ дає векторну величину, яка називається ротором вектор-функції $\bar{a}(M)$:

$$\bar{\nabla} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k} = \overline{\text{rot } a} \quad (6)$$

Можна розглядати також операції другого порядку, тобто попарні комбінації трьох вказаних вище операцій. Наприклад,

$$\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u \quad ,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$ - символічний диференціальний оператор другого порядку, який називається оператором Лапласа.

$$\nabla \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{a} \quad (7)$$

6.5.3 Основні задачі теорії поля

1) Потік векторного поля

Нехай маємо векторне поле $\bar{a} = \{P, Q, R\}$, де $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$.

Означення Потоком $\Pi_\sigma(\bar{a})$ векторного поля $\bar{a}$ через двосторонню поверхню σ називається поверхневий інтеграл (першого роду!):

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\bar{a} \cdot \bar{n}^0) \cdot d\sigma \quad (8)$$

Де $\bar{n}^0$ - одиничний вектор (орт) нормалі до вибраної сторони поверхні σ в будь-якій точці M , $\bar{n}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

Замість поверхневого інтеграла першого роду у формулі (8.8) можна обчислювати поверхневий інтеграл другого роду (по координатах):

$$\Pi = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iint_{\sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy \quad (9)$$

Приклад 8. Знайти потік векторного поля $\bar{a} = (x - y + z)\bar{i}$ через верхню сторону трикутника, що вирізається з площини $x - y - z + 1 = 0$ координатними площинами (рис 8.1).

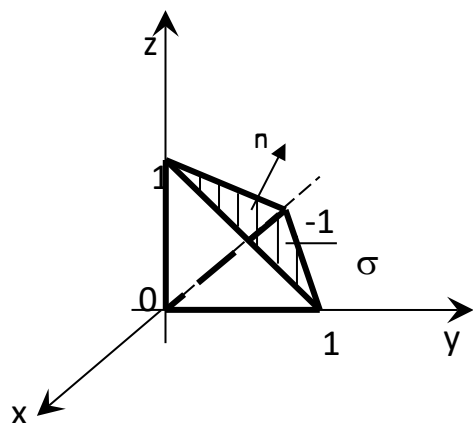


Рисунок 8.1

Розв'язування

Запишемо для даної площини рівняння “у відрізках”, яке більш зручне для побудови рисунка:

$\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1$. З цього рівняння видно, що вершини трикутника, вирізаного з даної площини координатними площинами, знаходяться в точках $A(-1;0;0)$,

$B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

Враховуючи, що $P = x - y + z, Q = 0, R = 0$, обчислюємо за формулою (9):

$$I = \iint_{\sigma} (x - y + z) dy dz = \left| \begin{array}{l} \sigma : x = y + z - 1 \\ \sigma \rightarrow D_{yz} \\ \cos \alpha < 0 \end{array} \right| = - \iint_{D_{yz}} (y + z - 1 - y + z) dy dz = - \iint_{D_{yz}} (2z - 1) dy dz,$$

де D_{yz} - проекція σ на площину yOz (рис. 2). Далі маємо:

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^1 (2z - 1) dz \int_0^{1-z} dy = - \int_0^1 (2z - 1) dz \left[y \right]_0^{1-z} = - \int_0^1 (2z - 1)(1 - z) dz = \\ &= - \int_0^1 (3z - 2z^2 - 1) dz = - \left(\frac{3z^2}{2} - \frac{2z^3}{3} - z \right) \Big|_0^1 = - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

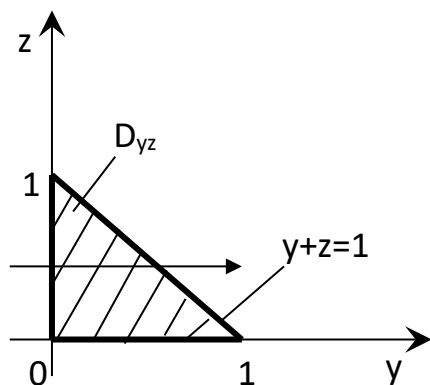


Рисунок 5.2

З'ясуємо **фізичний зміст потоку векторного поля**. Нехай в деякій області рухається рідина, і утворилося поле швидкостей

$$\vec{a} = \{P, Q, R\}.$$

Тоді потік цього векторного поля через поверхню σ буде дорівнювати кількості рідини, що проходить через поверхню σ у напрямі нормалі $\vec{n}$ до поверхні за одиницю часу.

6.5.4 Дивергенція векторного поля

Означення Дивергенцією векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ в точці M називається об'ємна густина потоку векторного поля в цій точці:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{1}{V} \oiint \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma, \quad (10)$$

де V - об'єм, обмежений замкненою поверхнею σ , в якій міститься точка M .

На практиці користуються формулою

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_M \quad (11)$$

Якщо $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$ (а це означає, що $\Pi > 0$), то точка M називається джерелом, а якщо $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$ ($\Pi < 0$), то точка M називається стоком. Абсолютна величина $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ характеризує об'ємну густину потужності джерела або стоку.

Теорема Остроградського-Гаусса Потік векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ через будь-яку замкнену поверхню σ дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції векторного поля $\vec{a}$ по об'єму V , обмеженому поверхнею σ .

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a} n \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV \quad , \quad (12)$$

Тут $dV = dx dy dz$.

Цю теорему доцільно використовувати для обчислення потоку через зовнішню сторону замкненої поверхні σ , яка обмежує об'єм V .

Приклад 9 Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1-z)\vec{k}$ через повну поверхню конуса $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq H$), (рис.8.3).

Розв'язування

Тут $\vec{a} = \{x, y, 1-z\}$, $P = x$, $Q = y$, $R = 1-z$, тоді:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 - 1 = 1$$

Тоді, за формулою (8.12), потік $\Pi = \iiint_V 1 \cdot dx dy dz = \frac{\pi H^3}{3}$, так як $\iiint_V dx dy dz = V_{\text{кон}}$,

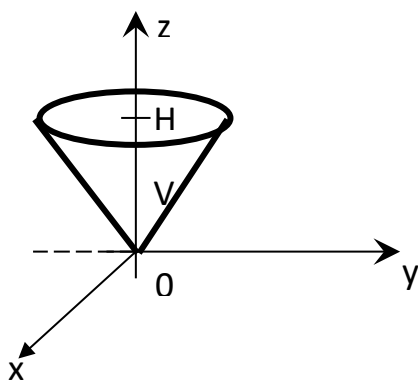


Рисунок 8.3

тобто $\iiint_V dx dy dz$ чисельно дорівнює об'єму конуса з висотою H , в основі якого лежить круг $x^2 + y^2 \leq H^2$. Тому цей об'єм і дорівнює $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi H^2 \cdot H = \frac{\pi H^3}{3}$.

6.5.5 Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля

Нехай задане векторне поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ і лінія L (із вказаним напрямом).

Означення 1 Лінійним інтегралом векторного поля $\vec{a}$ вздовж лінії L називається криволінійний інтеграл виду

$$I = \int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz, \quad (13)$$

де $\vec{r} = \{x, y, z\}$ - радіус-вектор точки $M(x, y, z)$, а $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$.

Фізичний зміст цього інтеграла полягає в тому, що, якщо $\vec{a}$ - поле сил, то він дорівнює роботі змінної сили $\vec{a}$ на переміщенні L . Це нам відомо також із теорії криволінійних інтегралів другого роду.

Означення 2 Циркуляцією векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ називається лінійний інтеграл цього поля вздовж замкнутого контура L . Циркуляцію будемо позначати

$C_L(\vec{a})$ і обчислювати за формулою:

$$C_L(\vec{a}) = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (14)$$

6. 5.6 Ротор векторного поля

Означення Векторному полю $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ можна поставити у відповідність інше векторне поле, яке називається ротором (вихорем) поля $\vec{a}$ і визначається рівністю:

$$\overline{rot \vec{a}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Теорема Стокса Циркуляція векторного поля $\vec{a}$ вздовж замкнутого контура L дорівнює потоку ротора цього векторного поля через будь-яку поверхню σ , що опирається на цей контур (очевидно, що нормаль $\vec{n}^o$ до поверхні має бути узгоджена з напрямом обходу контура):

$$C_L(\vec{a}) = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \overline{rot \vec{a}} \cdot \vec{n}^o \cdot d\sigma. \quad (16)$$

Формула (16) є векторним записом формули Стокса (7.16), яка розглядалася в Лекції 7.

Перепишемо формулу (16) у координатній формі:

$$\begin{aligned} C_L(\vec{a}) &= \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Зауважимо, що на практиці можна користуватися будь-якою з цих формул.

Приклад 10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (y-x)\vec{i} + (2x-y)\vec{j} + z\vec{k}$ вздовж замкненої кривої L , яка складається із відрізків координатних осей Ox і Oy і дуги кола $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$ ($z = 0$) від точки з параметром $t_1=0$ до точки з параметром $t_2 = \frac{\pi}{2}$ (рис.5.4).

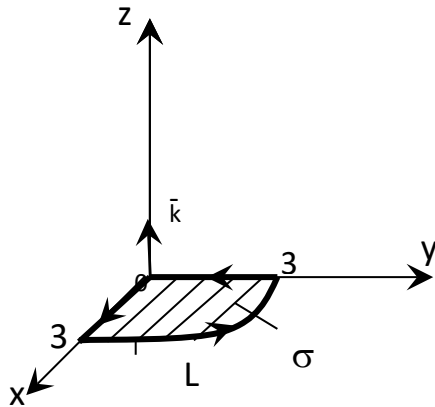


Рисунок 8.4

Розв'язування

Параметру $t_1=0$ на площині xOy відповідає точка $A(3; 0)$, а параметру $t_2 = \frac{\pi}{2}$ - точка $B(0; 3)$. Згідно з цим укажемо напрям обходу L на рис. 8.4. За поверхню σ , що опирається на контур L , можна взяти частину площини $z = 0$, нормаль до якої - одиничний вектор $\vec{k} = \{0,0,1\}$. Знайдемо $\overline{\text{rot } \vec{a}}$, враховуючи, що $P=y-x, Q=2x-y, R=z$.

За формулою (8.15) маємо:

$$\overline{\text{rot } \vec{a}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-x & 2x-y & z \end{vmatrix} = (2-1)\vec{k} = \vec{k}.$$

В даній задачі зручно скористатися для обчислення циркуляції формулою (8.16):

$$C_L(\vec{a}) = \iint_{\sigma} \overline{\text{rot } \vec{a}} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} \vec{k} \cdot \vec{k} \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma = \frac{9}{4}\pi.$$

Зауважимо, що $\iint_{\sigma} d\sigma$ чисельно дорівнює площі поверхні σ , тобто площі чверті круга:

$$S = \frac{1}{4}\pi 3^2 = \frac{9}{4}\pi.$$

6.5.7 Потенціальні та соленоїдальні векторні поля

Означення 1 Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається потенціальним в області V , якщо в цій області існує таке скалярне поле $u(M)$, для якого виконується рівність:

$$\vec{a} = \overline{\text{grad } u} \quad (18)$$

Функція $u(M)$ при цьому називається потенціалом поля $\vec{a}$. Легко перевірити (перевірте!), що у цьому випадку $\overline{\text{rot}} \vec{a} = 0$, а це означає, що **потенціальне поле є безвихровим**.

Умова $\overline{\text{rot}} \vec{a} = 0$ є необхідною і достатньою умовою потенціальності векторного поля $\vec{a}$. Зауважимо, що коли векторне поле потенціальне, то **лінійний інтеграл для нього не залежить від форми шляху інтегрування, а залежить лише від початкової та кінцевої точок**. Тому потенціал векторного поля можна знайти за формулою

$$u(M) = \int_{M_0}^M \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (19)$$

Шлях інтегрування вибирається довільно. Як правило, за шлях

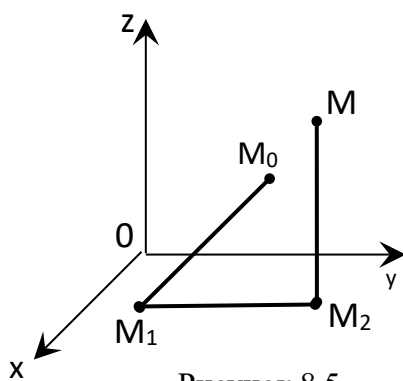


Рисунок 8.5

інтегрування вибирають ламану $M_0M_1M_2M$, яка складається з відрізків прямих, паралельних до координатних осей (рис. 8.5). Точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ теж можна вибирати довільно із області визначення функцій P, Q, R . Точка M має поточні координати: $M(x, y, z)$.

Тоді :

$$u(M) = u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz. \quad (20)$$

Приклад 11. Задане векторне поле $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$. Довести, що воно є потенціальним, і знайти його потенціал.

Розв'язування

Знайдемо $\overline{\text{rot}} \vec{a}$, враховуючи, що $P = (y+z)$, $Q = x+z$, $R = x+y$:

$$\overline{\text{rot}} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, поле $\vec{a}$ потенціальне.

Виберемо за точку M_0 початок координат і знайдемо потенціал $u(M)$ за формулою (8.19):

$$u(M) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y x dy + \int_0^z (x+y) dz = xy + (x+y)z = xy + xz + yz.$$

Можна зробити перевірку. Покажемо, що $\overline{gradu} = \bar{a}$:

$$\overline{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$$

Як бачимо, дійсно, $\overline{gradu} = \bar{a}$.

Означення 2 Векторне поле $\bar{a}(M)$ називається соленоїдальним (трубчастим) в області V , якщо у всіх точках цієї області виконується рівність:

$$\operatorname{div} \bar{a} = 0. \quad (21)$$

Потік такого поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

Фізично це означає, що соленоїдальне поле не має джерел.

Векторне поле, яке є одночасно потенціальним і соленоїдальним, називається гармонічним.

Приклад 12 Перевірити, чи є соленоїдальним векторне поле із попереднього прикладу 8.4: $\bar{a} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$.

Розв'язування

$$P = (y+z), Q = x+z, R = x+y.$$

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

За формулою (8.11):

Отже, задане поле є соленоїдальним і потенціальним, тобто воно є гармонічним.