ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Визначником другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначником третього порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Мінор M_{ij} елемента a_{ij} визначника n- го порядку – визначник $(n-1)$ – го порядку, що отриманий з визначника n - го порядку шляхом викреслення i -го рядка та j - го стовпчика.

Алгебраїчне доповнення елемента – мінор M_{ij}, помножений на $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Алгебраїчне доповнення до мінора — визначник, що складається з елементів, котрі не належать тим рядкам і тим стовпцям визначника, з яких утворено мінор, і береться зі знаком $(-1)^{i_1+..+i_k+j_1+..+j_k}$, де $i_1, i_2, ..., i_k, j_1, j_2, ..., j_k$ - індекси відповідно тих рядків і тих стовпців, які брали участь в утворенні мінора.

Матриця – прямокутна таблиця, яка складається з $m \times n$ чисел a_{ij} $(i = 1,2,..., n; \quad j = 1,2,..., m)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриця A^{-1} обернена до матриці A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця.

Сумою матриць одного й того самого порядку $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця $C = A + B$; $C = (c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця C, кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці A на α, $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Матриця A називається *узгодженою* з матрицею B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, $C = (c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Орт вектора $\vec{a}$ – одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$.

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi$.

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) довжина вектора $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця.

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Рівняння $F(x,y)=0$ називається рівнянням лінії l, яка задана на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати $\mathbf{x}$ і у кожної точки лінії l і не задовольняють координати х і у жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Рівняння $F(x,y,z)=0$ називається рівнянням поверхні відносно заданої системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати х, у, z кожної точки даної поверхні і не задовольняють координати х, у, z жодної точки, яка не лежить на цій поверхні.

$Ax+By+C=0$ – загальне рівняння прямої.

$\vec{n}=(A;B)$ – нормальний вектор прямої.

$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)=0$ – рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}=(A;B)$.

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ – канонічне рівняння прямої.

$\vec{s}=(m,n)$ – напрямний вектор прямої.

$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої.

$y-y_0=k\cdot(x-x_0)$ – рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k.

$y=kx+b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k=-\frac{A}{B}$.

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$.

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – рівняння прямої у відрізках на осях.

$\cos\varphi=\dfrac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ або $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ – формули для кута φ між прямими l_1,l_2.

$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ або $k_1=k_2$ – умови паралельності прямих l_1,l_2.

$A_1A_2+B_1B_2=0$ або $k_1k_2=-1$ – умови перпендикулярності прямих.

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – відстань від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої $l: Ax+By+C=0$.

$Ax+By+Cz+D=0$ – загальне рівняння площини.

Нормальний вектор площини — вектор $\vec{n}=(A,\ B,\ C)$, перпендикулярний до площини.

$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$ – рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A;B;C)$.

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – рівняння площини, що проходить через три точки.

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ – рівняння площини у відрізках на осях.

$\cos\varphi=\dfrac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ – формула для кута φ між площинами.

$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ – умова паралельності площин.

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ – умова перпендикулярності площин.

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$.

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ – канонічне рівняння прямої в просторі.

Напрямний вектор прямої — вектор $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$, колінеарний прямій у просторі.

$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої в просторі.

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – загальне рівняння прямої в просторі (пряма в просторі задана перетином двої площин).

$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ – напрямний вектор прямої.

$\cos\varphi = \dfrac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ – формула для кута φ між прямими l_1, l_2.

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} + \dfrac{p_1}{p_2}$ – умова паралельності прямих в просторі.

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ – умова перпендикулярності прямих в просторі.

$\sin\varphi = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \vec{s}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{s}\right|} = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ – кут між прямою і площиною.

$Am + Bn + Cp = 0$ – умова паралельності прямої і площини.

$\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$ – умова перпендикулярності прямої і площини.

Директриси – прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{a^2}{c}$.

Ексцентриситет — відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ для еліпса, гіперболи, у параболи $\varepsilon = 1$.

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Функція — це така відповідність між множинами D та E, при якій кожному значенню змінної $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення $y \in E$.

Послідовність — це числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина натурального ряду чисел.

Границя послідовності $\{x_n\}$ – число A, якщо послідовність $\{x_n - A\}$ прямує до нуля при необмеженому зростанні n, тобто для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N, який залежить від ε, такий що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - A| < \varepsilon$.

Границя функції $f(x)$ в точці x_0 – число A, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon)$, яке залежить від ε, таке що для будь-якого $x \in D$ з умови $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ має місце нерівність $f|(x) - A| < \varepsilon$.

Нескінченно мала величина — це така послідовність α_n, для якої $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0.$

Нескінченно велика величина — це така послідовність $\{x_n\}$, для якої при довільному числі M: $0 < M < +\infty$, яким би великим воно не було, існує номер N такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Перша визначна границя — $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Друга визначна границя — $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

Точка розриву функції — це точка $x=x_0$, в якій порушується хоча б одна з умов рівності $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x).$

Точка $x=x_0$ називається точкою розриву 1-го роду (розрив неусувний) для функції $y=f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x).$

Точка $x=x_0$ називається точкою розриву 1-го роду (розрив усувний) для функції $y=f(x)$, якщо односторонні границі функції у цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції у цій точці, або функція у цій точці не існує, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq f(x_0).$

Точка розриву 2-го роду — точка $x=x_0$ називається точкою розриву 2-го роду для функції $y=f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Похідна функції $y=f(x)$ у точці x – границя (якщо вона існує) відношення приросту функції до $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто $y'=\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Геометричний зміст похідної — похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x.

Диференціал функції однієї змінної — це головна частина приросту функції, лінійна відносно Δx і дорівнює добуток $f'(x)\Delta x$.

Точка x_0 називається точкою локального максимуму (або мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0<|x-x_0|<\delta$ точки x_0, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ (або $f(x)>f(x_0)$).