1.1 Визначники. Матриці

Визначники

Означення. *Визначником другого порядку* називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Приклад 1.1.1. Обчислити $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$.

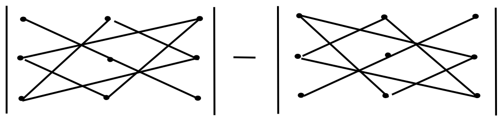
Розв'язання.

Використовуючи формулу (1) маємо $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-1)\cdot 4 = 10$.

Означення. *Визначником третього порядку* називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (2)$$

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему (правило трикутників):



Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» — це добутки елементів a_{11}, a_{22}, a_{33}, розміщених на головній діагоналі визначника, і добутки елементів a_{13}, a_{21}, a_{32} і a_{12}, a_{23}, a_{31}, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів a_{13}, a_{22}, a_{31}, розміщених на сторонній діагоналі визначника, та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі визначника — a_{11}, a_{23}, a_{32} і a_{12}, a_{21}, a_{33}.

Приклад 1.1.2. Обчислити визначник за правилом трикутників.

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + (-4)\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 2 - (-4)\cdot 1\cdot 5 =$$

$$= 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5.$$

Запропонуємо ще одне правило обчислення визначника третього порядку (правило Саррюса).

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Приклад 1.1.3. Обчислити визначник за правилом Саррюса.

Розв'язання.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&2&-4\\1&2&0\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1&0&2\\3&2&-4\\1&2&0\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0\\3&2\\1&2\end{matrix}\right|=1\cdot2\cdot0+0(-4)\cdot1+(-2)\cdot3\cdot2-(-2)\cdot2\cdot1-1\cdot(-4)\cdot2-0\cdot3\cdot0=$$
$$=-12+4+8=0.$$

Визначник $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}$, рядки якого є стовпцями попереднього визначника, є *транспонованим* щодо визначника (2).

Властивості визначників

1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

2. Якщо один із рядків (стовпців) визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&0&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&0\end{vmatrix}=0.$$

3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці) визначника, то його знак зміниться на протилежний.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

4. Визначник, який має два однакові рядки (стовпці) , дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a&b&c\\a&b&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a&a\\a_{21}&b&b\\a_{31}&c&c\end{vmatrix}=0.$$

5. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на стале число k, то й визначник помножиться на k.

$$\begin{vmatrix}ka_{11}&ka_{12}&ka_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

6. Визначник, який має два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a & ka \\ a_{21} & b & kb \\ a_{31} & c & kc \end{vmatrix} = 0 .$$

7. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка (стовпця) будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи довільного іншого рядка (стовпця), попередньо помножені не деяке число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай задано визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Означення. *Мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника* називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i -го рядка та j -го стовпця.

Зрозуміло, що мінор першого порядку — це будь-який елемент визначника.

Наприклад, мінором елемента a_{12} визначника третього порядку буде визначник другого порядку $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Означення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника* називається мінор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$, де i -номер рядка, а j -номер стовпця, на перетині яких міститься цей елемент, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \tag{3}$$

А тепер сформулюємо **наступну властивість визначників**.

9. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на їх алгебраїчні доповнення.

Тобто мають місце такі рівності для визначника третього порядку:

$$\begin{aligned} &\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} , \qquad && \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} , \\ &\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} , && \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} , \\ &\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} , && \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} . \end{aligned} \tag{4}$$

Запис визначника за будь-якою з формул (4) називається ***розкладом визначника по елементах деякого рядка або стовпця.***

Властивість 9 дає ще одне правило обчислення визначника третього порядку.

Приклад 1.1.4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Зокрема, даний визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ доцільно розкласти за елементами третього рядка чи другого стовпця, оскільки там є нульовий елемент, тоді, наприклад

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\cdot(-7) + 0 + (-2)\cdot(-1) = -14 + 2 = -12.$$

Обчислення цього визначника буде раціональнішим, якщо до нього застосувати властивість 8, яка дасть можливість одержати додатковий нульовий елемент в тому ж третьому рядку. Для цього достатньо, наприклад, елементи першого стовпця додати до відповідних елементів третього стовпця. Тоді визначник набуде виду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-6) + 0 + 0 = -12.$$

Сформулюємо **ще одну властивість визначників**.

10. Сума добутків елементів деякого рядка (або стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (або стовпця) дорівнює нулю.

Розглянемо, наприклад, суму добутків елементів першого рядка визначника (2) на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) +$$
$$+ a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = 0.$$

Поняття про визначники вищих порядків

В багатьох задачах зустрічаються визначники не тільки другого і третього порядків, але й вищих порядків. Наприклад, визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

або визначник n-го порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що всі розглянуті властивості мають місце і для визначників вищих порядків. Правило їх обчислення зводиться до застосування властивості 9 стільки разів, поки порядок визначників розкладу не понизиться до третього, які можна обчислювати як за властивістю 9, так і за означенням. При цьому доцільно використовувати властивість 8 для одержання нульових елементів у деякому рядку чи стовпці, крім одного. Розкладаючи тоді визначник згідно з властивістю 9 за елементами цього рядка (стовпця), дістанемо тільки один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

Приклад 1.1.5. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Скориставшись означенням визначника, утворимо алгебраїчну суму добутків елементів, наприклад першого рядка, на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}-1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(-2-2+6-1-2-12)+(-8+4+6+2-8-12)+0-3\cdot(24-2-6-12-4-6)=-26-16+$$
$$+18=-24.$$

Визначник, який входить до третього доданка, обчислювати не потрібно. Зрозуміло, що чим більше нулів маємо в рядку або стовпці, за елементами якого утворюється алгебраїчна сума, тим менше визначників $(n-1)$-го порядку потрібно обчислювати. Тому даний визначник можна також обчислити, виконавши перетворення:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3p.\to 3p. \\ 3p.\times(-3)+1p.\to 1p. \\ 3p.\times(-1)+2p.\to 2p. \\ 3p.\times(-2)+4p.\to 4p. \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -7 & -10 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -7 & 4 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} -7 & -10 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -4 & -7 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 7 & 4 \end{vmatrix}=-56-120+21+24+147-40=-24.$$

Матриці

Означення. *Матрицею* називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Коротко матрицю позначають так: $A=(a_{ij})$. Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, а запис $m\times n$ означає її *розмір*. Зауважимо, що на першому місці в цьому запису зазначено кількість рядків матриці, а на другому — кількість стовпців. Наприклад, запис розміру матриці 5×3 означає, що в ній п'ять рядків і три стовпці.

Елементи з двома однаковими індексами a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} утворюють *головну діагональ* матриці. Якщо $a_{ij}=a_{ji}$, то матриця називається *симетричною*.

Означення. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається *квадратною*.

Означення. *Нульовою* називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю.

Означення. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Означення. Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Означення. Квадратна матриця, в якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називається *одиничною матрицею*:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення. Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця *називається трикутною.*

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність визначник, який складається з тих самих елементів.

$$\Delta(A)=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення. Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матриця називається *неособливою*, або *невиродженою*. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця *особлива*, або *вироджена*.

Дії з матрицями

1. Сумою матриць одного й того самого порядку $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ називається матриця $C=A+B$; $C=(c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Приклад 1.1.6. Знайти $C = A + B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.
Обидві матриці A і B мають розмір 3×4, тому за означенням можна знайти їх суму

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Добутком матриці* $A = (a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця C, кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці A на α, $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Приклад 1.1.7. Знайти $C = \alpha A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2$.

Розв'язання.

$$C = \alpha A = -2A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності:
1) $A + B = B + A$;
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
6) $A + 0 = A; \quad A - A = 0$.

Операція *множення двох матриць* вводиться лише для узгоджених матриць.

Означення. Матриця A називається *узгодженою* з матрицею B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці A з B не випливає, взагалі кажучи, узгодженість матриці B з A.

Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

3. *Добутком матриці* $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, $C = (c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{pj} & \dots \end{pmatrix}.$$

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB \neq BA$.

Приклад 1.1.8. Знайти матрицю $C = AB$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Матриця A розміром 2×2 узгоджена з матрицею B розміром 2×3, тому утворити добуток AB можна і шукана матриця $C = AB$ буде мати розмір 2×3.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Утворити BA — неможливо.

Приклад 1.1.9. Знайти матрицю $C = 2(A - B)A$, виконавши вказані дії над матрицями A та B, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Обчислимо

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & -1+1 \\ 4-0 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2(A - B) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$C = 2(A - B)A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 10 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 8 \cdot 3 + (-4) \cdot 4 & 8 \cdot (-1) + (-4) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -10 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця

Означення. *Матриця* A^{-1} називається *оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці* A, якщо виконується співвідношення:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Означення. Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$, і *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема 1.1.1. Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була не виродженою, тобто її визначник не дорівнював нулю.

Нехай дано квадратну матрицю A. Доведемо, що коли $\det A \neq 0$, існує обернена матриця A^{-1}. Розглянемо матрицю:

$B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$. Утворимо добутки AB і BA.

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = C.$$

За правилом множення матриць елементи матриці C знаходимо за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn}. \qquad (5)$$

Якщо $i=j$, то згідно з формулою (1.1.4) маємо: $c_{ii}=\Delta(A)$, тобто знаходимо значення визначника матриці A; якщо $i \neq j$, то вираз (5) є сумою добутків елементів i-го рядка визначника на алгебраїчні доповнення, що відповідають j -му рядку цього самого визначника. За властивістю 9 визначників така алгебраїчна сума дорівнює нулю. Отже, $c_{ij}=0$, якщо $i \neq j$. Матриця C набирає вигляду: $C=\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix}$. Щоб ця матриця стала одиничною, треба помножити її на $\dfrac{1}{\Delta(A)}$.

$$E=\frac{1}{\Delta(A)}C=A\frac{1}{\Delta(A)}B=AA^{-1}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що для матриці A матриця A^{-1} єдина. Для цього припустимо протилежне. Нехай існує одна матриця C, така що $AC=CA=E$. Тоді

$$CAA^{-1}=C\left(AA^{-1}\right)=CE=C,$$

а водночас

$$CAA^{-1}=(CA)A^{-1}=EA^{-1}=A^{-1}, \text{звідси } C=A^{-1}.$$

Доходимо висновку, що початкове припущення неправильне, тобто обернена матриця єдина.

Приклад 1.1.10. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Обчислимо:

$$\Delta(A)=\det(A)=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 10 & -5 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 10 & -5\end{vmatrix}=15-10=5.$$

$\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

Знайдемо алгебраїчні доповнення для елементів матриці A.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Тоді обернена матриця згідно формули (6) має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці A. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміром $m\times n$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

і введемо ще одне важливе поняття.

Означення. *Рангом матриці* A розміром $m \times n$ називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів цієї матриці. Зрозуміло, що $rangA = r \le \min(m,\ n)$, а найбільший можливий ранг матриці може дорівнювати меншому з чисел m і n.

Розглянемо також поняття *обвідного мінора* k-го порядку. Це буде такий мінор $(k+1)$-го порядку, який повністю містить у собі мінор k-го порядку.

Обчислюючи ранг матриці, потрібно переходити від мінорів менших порядків, відмінних від нуля, до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено відмінний від нуля мінор M k-го порядку, то достатньо обчислити лише мінори $(k+1)$-го порядку, що обводять мінор M. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k. Якщо серед них знайдеться такий, що відмінний від нуля, то далі для нього будуються обвідні мінори $(k+2)$-го порядку і т. д.

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод ґрунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати так звані елементарні перетворення.

Означення. *Елементарними перетвореннями матриці* A називаються такі її перетворення:

1) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;
2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;
3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Теорема 1.1.2. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Означення. Матриці, які мають рівні ранги, називатимемо *еквівалентними* матрицями. Еквівалентні матриці об'єднуватимемо знаком «~» («тильда»).

Зазначимо, що на практиці за допомогою елементарних перетворень достатньо привести матрицю до трикутної форми, якщо вона квадратна або до трапецієвидної, якщо вона прямокутна. Тоді число ненульових рядків буде дорівнювати рангу даної матриці.

Приклад 1.1.11. Знайти ранг матриці *A* методом обвідних мінорів, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Мінор другого порядку, який міститься в лівому верхньому куті цієї матриці, дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Проте матриця A має й відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$. Далі запишемо мінор третього порядку, який обводить відмінний від нуля мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \ne 0.$$

Утворимо тепер обвідні мінори четвертого порядку для мінора третього порядку. Їх існує лише два:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Обидва вони дорівнюють нулю, а це означає, що ранг початкової матриці дорівнює трьом, тобто $rangA = r = 3$.

Приклад 1.1.12. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Виконаємо елементарні перетворення матриці. Поміняємо місцями перший і другий стовпці. За аналогією до того, як під час обчислення визначників утворювали нулі в рядках або стовпцях, утворимо нулі в першому стовпці. З цією метою всі елементи першого рядка спочатку помножимо на –4 і додамо до другого рядка, потім — на –1 і додамо до третього рядка і нарешті помножимо на 2 і додамо до четвертого рядка.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

Помноживши тепер елементи першого стовпця послідовно на –2, –1, –3 і виконавши відповідне додавання, дістанемо останню матрицю в ланцюжку перетворень. Помноживши другий рядок здобутої матриці на $-\frac{1}{9}$, третій — на $-\frac{1}{5}$, четвертий — на $-\frac{1}{3}$, дістанемо:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $rangA = r = 2$, оскільки єдиний мінор другого порядку не дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Решта мінорів вищого порядку дорівнюють нулю.