1.2 Системи лінійних рівнянь

Основні означення

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Означення. Система (1) називається *системою m лінійних рівнянь з n невідомими* (*змінними*), де x_1, x_2, ..., x_n — невідомі; a_{ij} $\left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ — коефіцієнти системи рівнянь; b_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$ — вільні члени, або праві частини системи рівнянь.

Означення. Якщо всі $b_i = 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, то система лінійних рівнянь називається *однорідною*.

Означення. *Розв'язком системи рівнянь* (1) є множина чисел k_1, k_2, ..., k_n, якщо при підстановці цих чисел замість невідомих x_1, x_2, ..., x_n усі рівняння системи (1) перетворюються в тотожності.

Означення. Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається *несумісною*, а якщо має хоча б один розв'язок — *сумісною*.

Означення. Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо розв'язків більш як один.

Основні методи розв'язування системи рівнянь

Правило Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1.2.1. Якщо головний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи n лінійних рівнянь з n невідомими (2), відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{3}$$

де Δ — головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (2);

$\Delta_j \ \left(j=\overline{1,n}\right)$ — визначник, який утворюється заміною j-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Формули (3) вперше вивів К. Крамер і вони називаються **формулами Крамера**.

Якщо $\Delta \neq 0$, тоді система (2) має єдиний розв’язок, який знаходиться за формулами (3).

Якщо $\Delta = 0;\ \Delta_j \neq 0$, тоді система (2) на має розв’язків, тобто є несумісною.

Якщо $\Delta = \Delta_j = 0$, тоді система (2) зводиться до одного рівняння і має безліч розв’язків, тобто є невизначеною.

Приклад 1.2.1. Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

Розв’язання.

Знайдемо розв’язок системи за **формулами Крамера (**3**)**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Обчислимо головний визначники системи Δ, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot(-1)\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Отже, головний визначник системи рівнянь відмінний від нуля. За правилом Крамера така система має єдиний розв’язок, знайдемо його. Для цього утворимо і обчислимо ще три визначники, які утворені з головного визначника заміною відповідного стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 10 - 3 - 0 - 5 = -1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6 + 0 - 0 - 3 - 0 = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 0 + 0 - 0 - 10 + 6 = -1.$$

За правилом Крамера маємо розв’язки:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Отже, $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$ — єдиний розв’язок.

Застосування матриць для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими (2):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Введемо такі позначення: матриця A — матриця коефіцієнтів при невідомих, матриця X — матриця невідомих, матриця B — матриця вільних членів, а саме

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з означенням добутку матриць систему рівнянь (2) можна записати в матричному вигляді:

$$AX = B, \qquad (4)$$

який значно скорочує запис системи рівнянь. Повернемось тепер до виразу (4) — запису системи рівнянь у матричному вигляді $AX = B$. Припустимо, що система складається з n лінійних рівнянь з n невідомими, матриця A — квадратна і $\Delta(A) \neq 0$ — матриця невироджена. Тоді для матриці A побудуємо обернену A^{-1} — вона за тих припущень, які щойно зроблено, існує. Помноживши тепер матричну рівність $AX = B$ зліва на матрицю A^{-1}, дістанемо:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

так як $A^{-1}A = E$, то

$$EX = A^{-1}B,$$

враховуючи $EX = X$, отримаємо

$$X = A^{-1}B. \qquad (5)$$

Останній вираз — це розв'язок системи лінійних рівнянь. Зауважимо, що в такому вигляді можна записати розв'язок будь-якого матричного рівняння, якщо матриця A задовольняє умови існування A^{-1}.

Приклад 1.2.2. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

Розв'язання.

Запишемо систему в **матричному вигляді** $AX = B,$ де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad \text{де} \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Для матриці *A* знайдемо обернену.

Матриця А невироджена, оскільки $\Delta(A) = -1 \neq 0$, і, отже існує обернена. Система рівнянь має єдиний розв'язок.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Тоді обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-5+6 \\ 0+5-3 \\ 0+10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$ — розв'язок системи.

Теорема існування розв'язку системи лінійних рівнянь

У загальному випадку перш ніж розв'язати систему рівнянь (1), важливо знати, чи існують її розв'язки, тобто чи буде вона сумісною. Щоб відповісти на це запитання, розглянемо дві матриці: *головну матрицю* A, складену з коефіцієнтів при невідомих системи рівнянь (1), і *розширену матрицю* $\overline{A}$, утворену приєднанням до матриці *A* стовпця вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того щоб система рівнянь (1) була сумісною (мала розв'язок), необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці *A* дорівнював рангу розширеної матриці $\overline{A}$:

$$rang(A) = rang(\overline{A}) = r.$$

Для сумісних систем справедливі такі твердження:

1. Якщо ранг матриці сумісної системи збігається з кількістю невідомих $\left(r(A)=n\right)$, то система рівнянь має єдиний розв'язок. Вона сумісна і визначена.

2. Якщо ранг матриці сумісної системи менший від кількості невідомих $\left(r(A)=r<n\right)$, то система рівнянь має безліч розв'язків. При цьому r змінних x_1, x_2, ..., x_r називають *основними (або базисними)*, якщо визначник матриці з коефіцієнтів при них (базисний мінор) відмінний від нуля. Решту $n-r$ змінних x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n називають *неосновними (або вільними).* Тоді система рівнянь набере вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-...-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-...-a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+...+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-...-a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (6)$$

Головний визначник системи рівнянь (6) (мінор r-го порядку) відмінний від нуля. За правилом Крамера така система рівнянь має єдиний розв'язок відносно головних невідомих x_1, x_2, ..., x_r. Зрозуміло, що кожне з основних невідомих можна подати через вільні невідомі. Якщо вільним невідомим не надано конкретних числових значень, маємо так званий *загальний розв'язок* системи рівнянь (1). Надавши вільним невідомим деяких числових значень, дістанемо *частинний розв'язок* цієї системи. Зрозуміло, що частинних розв'язків системи в цьому разі безліч. Така система є сумісною, але невизначеною.

Система лінійних рівнянь, кількість рівнянь і невідомих якої однакова $(m=n)$, має єдиний розв'язок, якщо її матриця є невиродженою $\left(|A|\neq 0\right)$.

Зауважимо, що коли $rang(A)\neq rang(\overline{A})$, то система несумісна тобто не має розв'язків.

Приклад 1.2.3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7, \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1, \\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0. \end{cases}$

Розв'язання.

Знайдемо ранги матриць A і $\overline{A}$, записавши основну і розширену матриці системи в одній матриці за допомогою додаткової вертикальної риски, яка відокремлює стовпець вільних членів:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Ліворуч від вертикальної риски маємо головну матрицю A. Вилучивши риску, дістанемо розширену матрицю $\overline{A}$. Такий запис дає змогу одночасно обчислювати ранги обох матриць за допомогою елементарних перетворень. З останнього перетворення випливає, що ранг матриці A дорівнює 2. Ранг матриці $\overline{A}$ дорівнює 3. Тобто $rang(A)\neq rang(\overline{A})$. За теоремою Кронекера—Капеллі така система не має розв'язків (несумісна).

Системи лінійних однорідних рівнянь

Нехай задано однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими, тобто це рівняння, вільні члени яких дорівнюють нулю

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

З теореми Кронекера—Капеллі випливає, що система рівнянь (7) завжди сумісна: $rangA = rang\overline{A}$, оскільки має нульовий розв'язок (його ще називають *тривіальним)*: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. При підстановці нулів замість невідомих в кожне з рівнянь (7) перетворює їх в тотожність.

Залишається з'ясувати, чи нульовий розв'язок єдиний, чи крім нього система ще має і ненульові розв'язки. Для того, щоб система (7) мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її матриці був меншим за n (n – число невідомих).

Розглянемо матрицю A, складену з коефіцієнтів при невідомих. Нехай її ранг дорівнює r. Якщо $r = n$, то система (7) має єдиний розв'язок, і він тривіальний. Якщо $r < n$, то система (7) є невизначеною (бо несумісною вона бути не може), а отже, вона має безліч розв'яків (в тому числі і безліч ненульових).

Отже, можна сформулювати твердження: **система однорідних лінійних рівнянь (7) має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли $\Delta(A) = 0$.**

Умова $\Delta = 0$ тут необхідна, оскільки якщо $\Delta \neq 0$, то система мала би єдиний, тобто нульовий розв'язок. Ця умова є також і достатньою, оскільки якщо $\Delta = 0$, то ранг матриці системи $r < n$, і система має безліч (ненульових) розв'яків.

Метод Гаусса

На практиці найчастіше для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовують метод Гаусса, який полягає в послідовному виключенні невідомих за наступною схемою. Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

записують основну і розширену матриці системи в одній матриці за допомогою додаткової вертикальної риски, яка відокремлює стовпець вільних членів:

$$A/\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Далі з рядками цієї матриці виконуються елементарні перетворення з метою зведення її до матриці трикутної або трапецієвидної форми. Потім встановлюється система, яка буде мати також відповідну форму. Якщо зведена система має трикутну форму, то дана система (1) є сумісною і визначеною, тобто має єдиний розв'язок. Якщо зведена система має трапецієвидну форму, то дана система (1) є сумісною і невизначеною, тобто має безліч розв'язків. Розв'язки у таких зведених до трикутної чи трапецієвидної форми системи знаходяться безпосередньо.

Зауваження. Якщо в результаті елементарних перетворень станеться так, що всі коефіцієнти деякого рівняння дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля, то така система буде несумісною.

Приклад 1.2.4. Дослідити систему на сумісність і розв'язати за методом Гаусса
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Доведемо сумісність системи. Знайдемо ранг основної і розширеної матриць системи.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 3$, отже дана система сумісна, а оскільки і число невідомих $n = 3$, то система визначена, тобто має єдиний розв'язок. Щоб його знайти, достатньо по тій матриці, яку отримали в результаті елементарних перетворень, записати систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad\quad 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, ця система має трикутну форму і є еквівалентною даній системі. Починаючи з останнього рівняння знаходимо x_3, з другого рівняння x_2 і з першого рівняння x_1.

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 = 1 - 2 \cdot 1 - 0 = -1, \\ x_2 = 1 - x_3 = 1 - 0 = 1, \\ x_3 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Отже, розв'язок системи: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Приклад 1.2.5. Розв'язати систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

Розв'язання.

Знайдемо ранг основної і розширеної матриць системи.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 2$, отже дана система сумісна. Очевидно, що зведена система має трапецієвидну форму, що означає: $r < n$ і система має безліч розв'язків ($n = 3$). Знайдемо їх.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ \quad 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Залишимо зліва невідомі x_1, x_2, оскільки визначник матриці з коефіцієнтів при них (базисний мінор) відмінний від нуля, а в праву частину перенесемо x_3 і вважаємо її вільною змінною, тобто вона може набувати будь-яких значень, звідси і маємо безліч розв'язків. Тоді система набуде такого виду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - x_3, \\ \quad 3x_2 = 5x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 + x_2 = 1 - x_3 + \dfrac{5}{3}x_3 = 1 + \dfrac{2}{3}x_3, \\ x_2 = \dfrac{5}{3}x_3. \end{cases}$$

Отже, розв’язок системи: $\begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{2}{3}c, \\ x_2 = \dfrac{5}{3}c, \\ x_3 = c, \quad c \in R. \end{cases}$

Приклад 1.2.6. Розв’язати систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Розв’язання.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З останнього перетворення випливає, що $rang(A) = rang(\overline{A}) = 2$. Початкова система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4. \end{cases}.$$

Серед мінорів другого порядку, складених з елементів матриці коефіцієнтів при невідомих, існує хоча б один відмінний від нуля. У нашому випадку їх кілька. Якщо відмінний від нуля мінор виберемо з коефіцієнтів при двох невідомих, то таким чином ми переведемо ці невідомі в розряд основних. Нехай, наприклад, це невідомі x_1, x_2. Тоді, перенісши решту невідомих у праву частину системи рівнянь, дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}.$$

Головний визначник цієї системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Знайдемо Δ_1 і Δ_2.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

За правилом Крамера (3) маємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{4} + \frac{x_3}{4} - \frac{3x_4}{4} - x_5, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{4} + \frac{7x_3}{4} + \frac{7x_4}{4}.$$

Останні рівності визначають загальний розв’язок системи рівнянь. Щоб дістати частинні розв’язки, достатньо надати вільним невідомим x_3, x_4, x_5 деяких числових значень.

Наприклад, якщо $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, маємо розв'язок $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0\right)$; якщо $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, $x_5 = -2$ — розв'язок $(3, 5, 2, 1, -2)$ і т. д. Таких частинних розв'язків у даному разі можна побудувати нескінченну кількість, тобто $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 - c_3, \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2, \\ x_3 = c_1,\ c_1 \in R, \\ x_4 = c_2,\ c_2 \in R, \\ x_5 = c_3,\ c_3 \in R. \end{cases}$

Останню систему рівнянь можна розв'язати і методом оберненої матриці, побудувавши обернену для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Справді, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, а тому:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \frac{x_3}{4} - \frac{3x_4}{4} - x_5 \\ -\frac{1}{4} + \frac{7x_3}{4} + \frac{7x_4}{4} \end{pmatrix}.$$

Прирівнявши відповідні елементи матриць, дістанемо попередній результат.