1.3 Елементи векторної алгебри

Системи координат

Три взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy, Oz, які мають спільний початок точку O і однакову масштабну одиницю, утворюють прямокутну декартову систему координат у просторі. Якщо таких осей дві: Ox і Oy, то маємо систему координат на площині.

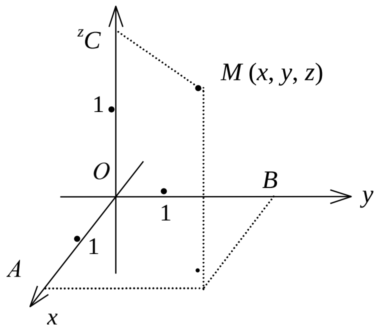


Рис. 1.3.1

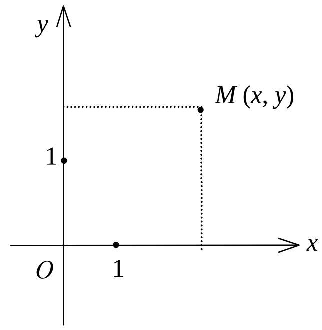


Рис. 1.3.2

Означення. Осі Ox, Oy, Oz називаються відповідно *осями абсцис, ординат і аплікат*, точка O — *початок системи координат*. Нехай M — довільна точка в просторі або на площині. Декартовими координатами x, y, z точки M називатимемо відповідно довжини OA, OB, OC напрямлених відрізків $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$.

Таким чином, кожній точці простору відповідає впорядкована трійка чисел (x, y, z), а на площині — впорядкована пара чисел (x, y), тобто встановлюється відповідність між геометричним образом — точкою і впорядкованою множиною чисел. Ця відповідність дає можливість використовувати рівняння для відображення геометричних образів, таких як лінія, площина тощо, та застосовувати алгебраїчні методи для розв’язування геометричних задач.

Означення. Полярна система координат складається з деякої точки площини O, яка називається *полюсом*, променя OA, що виходить з цієї точки і називається *полярною віссю*. Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання довжин відрізків.

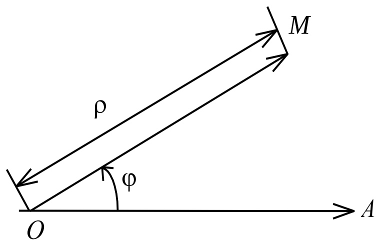


Рис. 1.3.3

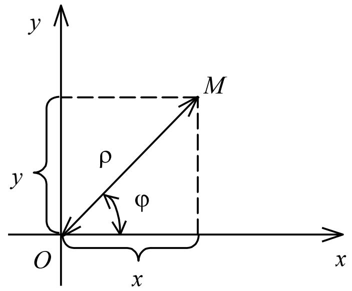


Рис. 1.3.4

Означення. *Полярними координатами точки* M називаються числа ρ — відстань від полюса O до точки M і φ — кут, на який треба повернути полярну вісь OA до її збігу з OM, проти годинникової стрілки.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \le \rho < \infty$, полярний кут φ, як правило, змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$.

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки (рис. 1.3.4) встановлюють формули:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1}$$

Приклад. Знайти полярні координати точки $M(2, 2)$.

З формули (1) маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $tg\varphi = 1$. Згідно з останньою рівністю $\varphi = \frac{\pi}{4}$, або $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, але $y = 2 > 0$ і $x = 2 > 0$, маємо $\varphi = \frac{\pi}{4}$. У полярних координатах точка $M\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Розглянемо такі перетворення систем координат:

1) паралельний зсув осей, коли змінюється положення початку системи координат, а напрям осей залишається таким самим;

2) поворот осей, коли обидві осі повертаються на деякий кут відносно початку системи координат.

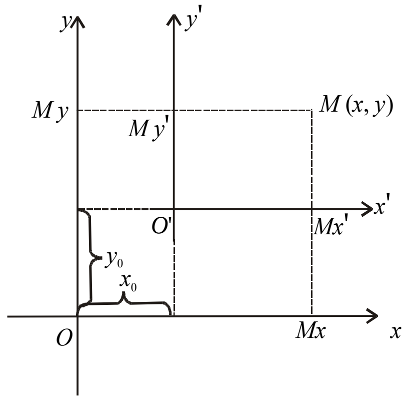


Рис. 1.3.5

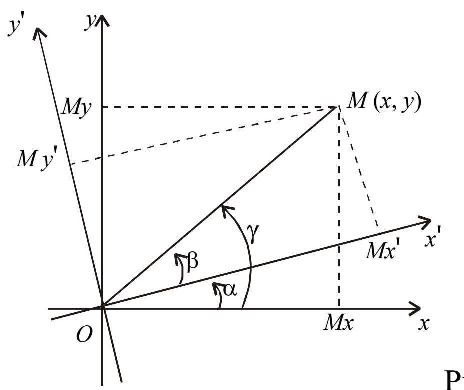


Рис. 1.3.6

1. Нехай точка M у старій системі координат Oxy має координати (x, y), а в новій системі координат $O'x'y'$ — (x', y'). Знайдемо зв'язок між ними. З рис. 1.3.5 бачимо, що

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0, \tag{2}$$

де (x_0, y_0) — декартові координати початку нової системи координат (точка O') у старій системі координат. Розв'язуючи рівняння (2) відносно x' і y', маємо $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$.

2. Повернемо тепер стару систему координат Oxy відносно точки O на кут α і дістанемо нову систему $O'x'y'$ (рис. 1.3.6).

Розглянемо також дві полярні системи координат з полюсом у точці O і полярними осями Ox і $O'x'$. Тоді згідно з рис. 1.3.6 маємо

$$x = \rho\cos\gamma, \qquad y = \rho\sin\gamma, \qquad x' = \rho\cos\beta, \qquad y' = \rho\sin\beta.$$

Крім того, $\gamma = \alpha + \beta$, підставляючи це значення γ у формули, остаточно будемо мати:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \tag{3}$$

Розв'язуючи рівності (3) відносно x', y', дістаємо:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Здобуті формули відбивають зв'язок між старими (x, y) і новими (x', y') координатами точки.

Вектори, лінійні операції над векторами

Означення. *Вектором* називається напрямлений відрізок.

Позначати вектори будемо $\vec{a}, \vec{b}$, ... Якщо, скажімо, точка A — початок вектора, а точка B — його кінець, то маємо $\overrightarrow{AB}$.

Означення. Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим вектором*.

Вектор вважається заданим, коли відома його довжина $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ і напрям щодо деякої осі.

Означення. Вектор називається *одиничним*, якщо $|\vec{a}| = 1$.

Одиничний вектор, який має той самий напрям, що й вектор $\vec{a}$, позначається $\vec{a}^0$.

Означення. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Означення. Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах.

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються *рівними,* коли вони: 1) колінеарні; 2) однаково напрямлені; 3) їхні довжини рівні.

З останнього випливає, що при паралельному перенесенні вектора дістаємо новий вектор, що дорівнює попередньому, тому вектори в аналітичній геометрії називають вільними.

Додавання двох векторів. *Сумою* $\vec{a}+\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ у кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$.

Множення вектора на число. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називають вектор $\vec{b}$, що колінеарний вектору $\vec{a}$, при $\lambda \geq 0$ однаково напрямлений з вектором $\vec{a}$, при $\lambda < 0$ протилежно напрямлений і $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Віднімання двох векторів. Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $-\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Систему векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ називають лінійно незалежною, якщо рівність

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = 0$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\lambda_i = 0$ при всіх $i = 1, 2, ..., n$. Якщо ж ця рівність виконується хоча б при одному значенні $\lambda_j \neq 0$, то систему векторів називають лінійно залежною. У цьому разі вектор $\vec{a}_j$ лінійно виражається через інші вектори системи:

$$\vec{a}_j = \frac{\lambda_1}{\lambda_j}\vec{a}_1 + ... + \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\vec{a}_{j-1} + \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\vec{a}_{j+1} + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\vec{a}_n .$$

Два колінеарних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні й один з них виражається через інший, наприклад: $\vec{b} = \lambda \vec{a}, \quad \lambda \neq 0$. Два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Три компланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежні, а три некомпланарних — лінійно незалежні.

Означення. Базисом системи векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ називають таку її підсистему, вектори якої лінійно незалежні, а будь-який вектор системи лінійно виражається через вектори підсистеми.

На площині V_2 базисом є два неколінеарних вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$. Довільний вектор $\vec{a}$, що компланарний цим векторам, лінійно виражається через них: $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$, де a_1, a_2 — числа, які називають *координатами вектора* $\vec{a}$ *у базисі* $\vec{e}_1\ \vec{e}_2$ і записують так: $\vec{a} = (a_1, a_2)$.

У просторі V_3 базисом є три некомпланарних вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$. Довільний вектор простору $\vec{a}$ лінійно виражається через них: $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, де a_1, a_2, a_3 — числа, які називають *координатами вектора* $\vec{a}$ *у базисі* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ *і* $\vec{e}_3$ і записують так: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Означення. Базис називають ортонормованим, якщо його базисні вектори попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину. У просторі V_3 їх позначають векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а на площині V_2 — векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$.

Нехай маємо ортонормований базис, вектори базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ якого є ортами координатних осей прямокутної системи координат $Oxyz$. Тоді довільний вектор $\vec{a}$ в цій системі координат однозначно розкладається, тобто $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, і має координати $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Вектори в системі координат

Вектор $\vec{OA}$, початок якого розміщується на початку координат, а кінець — у точці $A(x_0, y_0, z_0)$, називають радіусом-вектором точки A, його координати збігаються з координатами цієї точки: $\vec{OA} = (x_0, y_0, z_0)$. Якщо вектор $\vec{AB} = (a_x, a_y, a_z)$ задається двома точками простору з координатами $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то його координати визначають за формулами

$$a_x = x_2 - x_1; \qquad a_y = y_2 - y_1; \qquad a_z = z_2 - z_1 \tag{4}$$

Довжина вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається за формулою:

$$|\vec{a}| = |\vec{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{5}$$

Якщо вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ утворює кути α, β, γ з осями координат Ox, Oy, Oz, то косинуси цих кутів називають *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}$

$$\cos\alpha = \cos\left(\widehat{Ox, \vec{a}}\right), \quad \cos\beta = \cos\left(\widehat{Oy, \vec{a}}\right), \quad \cos\gamma = \cos\left(\widehat{Oz, \vec{a}}\right),$$

і визначаються за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}. \tag{6}$$

звідси $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ збігаються з координатами його орта $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$.

Нехай у просторі задано деяку вісь l і вектор $\vec{AB}$. Проведемо через точки A і B площини, перпендикулярно до осі l (рис. 1.3.7). Позначимо точки перетину цих площин з віссю l відповідно A' і B'.

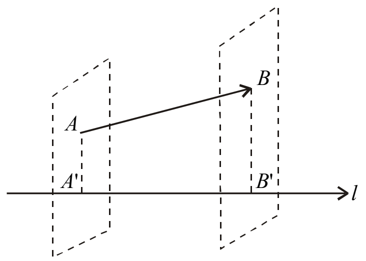


Рис. 1.3.7

Означення. *Проекцією вектора* $\vec{AB}$ *на вісь* l називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\vec{A'B'}$ на осі l. Слід зазначити, що $A'B' = \left|\vec{A'B'}\right|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ збігається з напрямом l і $A'B' = -\left|\vec{A'B'}\right|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ протилежний напряму l.

Позначається проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l — $np_l\,\vec{AB}$. З рис. 1.3.7 випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

$$np_l\,\vec{AB} = \left|\vec{AB}\right| \cdot \cos\varphi, \tag{7}$$

де φ — кут між вектором і віссю.

Справедливі такі ***властивості проекцій***.

1. *Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь*:

$$np_l\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_l\,\vec{a} + np_l\,\vec{b}.$$

2. *При множенні вектора на число його проекція на цю вісь також множиться на це число:*

$$np_l\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda \cdot np_l\,\vec{a}.$$

Нехай задано два вектори $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ і $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$.

Тоді вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, якщо $a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z$, і колінеарні, якщо $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

Суму, різницю та добуток вектора на число визначають відповідними арифметичними операціями над їх координатами:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\right), \qquad \lambda\vec{a} = \left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right). \tag{8}$$

Для лінійних операцій з векторами виконуються властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

3. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=(\alpha\beta)\vec{a}$.

4. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

5. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Відстань між двома точками

Нехай задано дві точки $M_1(x_1,\ y_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2)$ (рис. 1.3.8).

$$|M_1K|=|x_2-x_1|,\qquad |M_2K|=|y_2-y_1|.$$

Трикутник M_1M_2K — прямокутний, тому за теоремою Піфагора маємо:

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (9)$$

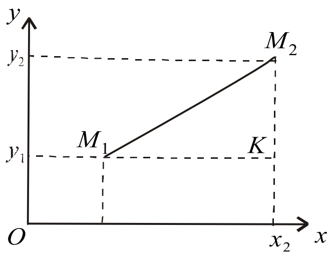


Рис. 1.3.8

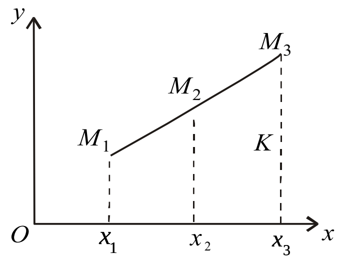


Рис. 1.3.9

Поділ відрізка у заданому відношенні.

Число λ — називається відношенням, в якому точка M ділить відрізок M_1M_2 (рис. 1.3.9), якщо

$$\lambda=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

Нехай задано λ і координати точок $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$, треба знайти координати точки $M(x,y)$.

З рис. 1.3.9 і теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, випливають співвідношення:

$$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\lambda.$$

Оскільки числа $x-x_1$ і x_2-x одного й того самого знаку (при $x_1<x_2$ вони додатні, а при $x_1>x_2$ — від’ємні), то $\left|\frac{x-x_1}{x_2-x}\right|=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Отже, $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$. Звідси: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

Аналогічно до попереднього дістанемо формулу для знаходження координати y: $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (10)$$

Наслідок. Якщо точка $M(x,y)$ — середина відрізка M_1M_2, то $\lambda=1$ і формули (10) набирають вигляду:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Таким чином, кожна з координат середини відрізка дорівнює середньому арифметичному відповідних координат його кінців.

Скалярний добуток векторів

Означення. *Скалярним добутком двох ненульових векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами.

Використовуючи формулу проекції вектора, можна також записати:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\,\vec{b}.$$

***Властивості скалярного добутку*:**

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.
3. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}$.
4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$; $\quad\sqrt{\left(\vec{a}\right)^2}=|\vec{a}|$.
5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ якщо $a\perp b,$ і навпаки, $a\perp b,$ якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ $\vec{a}\neq 0,$ $\vec{b}\neq 0$.

Нехай вектори задано $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, тоді, використовуючи властивості скалярного добутку, умови $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k},$ маємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Отже,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (11)$$

З рівності випливає, що:

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

2. Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторний добуток векторів

Означення. *Векторним добутком вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) *довжина вектора* $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, *де* φ *— кут між двома векторами*;

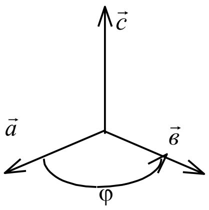


Рис. 1.3.10

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярний* до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) *вектор* $\vec{c}$ *спрямований* так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Означення. *Модуль векторного добутку* двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$ — колінеарні вектори.
2. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.
3. $\left(\lambda\vec{a}\times\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

5. довжина векторного добутку неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

або

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Мішаний добуток векторів

Означення. *Мішаним добутком векторів* $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Розглянемо геометричний зміст змішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед (рис. 1.3.11).

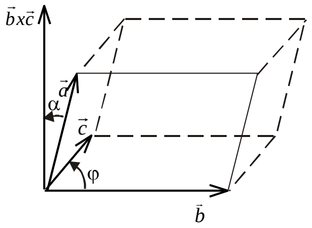


Рис. 1.3.11

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ (рис. 1.3.11). Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів $\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|$ $s = \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| = \left|\vec{c}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$. Висота дорівнює $\left|\vec{a}\right| \cos\alpha$.

Отже, остаточно маємо:

$$V = \left|\vec{a}\right| \cos\alpha \cdot \left|\vec{b}\right| \left|\vec{c}\right| \sin\varphi = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| \cos\alpha = \left|\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|. \qquad (13)$$

З останнього випливає, що *модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. З рівності (13) маємо *умову компланарності трьох векторів* $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 0.$$

Ураховуючи формули (11) і (12) знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{k}\right) =$$

$$= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

або

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

2. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = -\vec{b}\left(\vec{a} \times \vec{c}\right)$.

Зразки розв'язування вправ

Приклад 1.3.1. Дано вектори $\bar{a}=(3;-4;-1)$, $\bar{b}=(2;-1;1)$. Обчислити $(\bar{a}-3\bar{b})(\bar{b}+2\bar{a})$.

Розв'язання. Обчислимо
$\bar{a}-3\bar{b}=(3;-4;-1)-3(2;-1;1)=(-3;-1;-4)$;
$\bar{b}+2\bar{a}=(2;-1;1)+2(3;-4;-1)=(8;-9;-1)$;
$(\bar{a}-3\bar{b})\cdot(\bar{b}+2\bar{a})=(-3;-1;-4)\cdot(8;-9;-1)=(-3)\cdot 8+(-1)\cdot(-9)+(-4)\cdot(-1)=-11.$

Приклад 1.3.2. Обчислити квадрат довжини вектора $\bar{a}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\bar{c}=(4;-2;2)$ і скалярний добуток $\bar{a}\cdot\bar{c}=12$.

Розв'язання. Оскільки вектор $\bar{a}$ колінеарний вектору $\bar{c}$, тоді $\bar{a}=(4k;-2k;2k)$. Знайдемо скалярний добуток векторів $\bar{a}$ та $\bar{c}$ за формулою (11):

$$\bar{a}\cdot\bar{c}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2.$$

$\bar{a}\cdot\bar{c}=16k+4k+4k=12;\qquad 24k=12;\qquad k=0{,}5.$

Отже, $\bar{a}=(2;-1;1)$, $\qquad |\bar{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$; $\quad |\bar{a}|^2=\left(\sqrt{6}\right)^2=6.$

Приклад 1.3.3. Дано три точки $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ і $C(2;1;2)$. Знайти кут $\varphi=\angle BAC$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\vec{AB}=(1;1;0)$, $\vec{AC}=(1;0;1)$. Згідно з формулою знаходження кута між двома векторами, маємо:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi=60^0$.

Приклад 1.3.4. Обчислити площу паралелограма побудованого на векторах $\bar{a}=-2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}+2\bar{k}$.

Розв'язання. Знайдемо векторний добуток векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 1 & -3\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=2\bar{i}-5\bar{j}-3\bar{k}.$$

Тоді $S_{парал.}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{2^2+(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{38}$ (кв.од.).

Приклад 1.3.5. Для векторів $\bar{c}=\bar{a}-3\bar{b}$ та $\bar{d}=\bar{a}+2\bar{b}$ при умові, що $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, знайдіть: а) косинус кута між векторами $\bar{c}$ і $\bar{d}$; б) $np_{\bar{d}}\bar{c}$; в) площу трикутника побудованого на векторах $\bar{c}$ і $\bar{d}$.

Розв'язання.

а) Нехай φ – кут між векторами $\overline{c}$ і $\overline{d}$. Тоді $\cos\varphi = \dfrac{\overline{c}\cdot\overline{d}}{|\overline{c}|\cdot|\overline{d}|}$.

$$\overline{c}\cdot\overline{d} = (\overline{a}-3\overline{b})\cdot(\overline{a}+2\overline{b}) = \overline{a}\cdot\overline{a}+2\overline{a}\cdot\overline{b}-3\overline{a}\cdot\overline{b}-6\overline{b}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|^2-\overline{a}\cdot\overline{b}-6|\overline{b}|^2 =$$

$$= 2^2-|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{2}-6\cdot 3^2 = 4-2\cdot 3\cdot 0-54 = -50;$$

$$|\overline{c}| = \sqrt{|\overline{c}|^2} = \sqrt{(\overline{a}-3\overline{b})^2} = \sqrt{\overline{a}^2-6\overline{a}\overline{b}+9\overline{b}^2} = \sqrt{|\overline{a}|^2-6|\overline{a}||\overline{b}|\cos\frac{\pi}{2}+9|\overline{b}|^2} = \sqrt{4-0+81} = \sqrt{85};$$

$$|\overline{d}| = \sqrt{|\overline{d}|^2} = \sqrt{(\overline{a}+2\overline{b})^2} = \sqrt{\overline{a}^2+4\overline{a}\overline{b}+4\overline{b}^2} = \sqrt{|\overline{a}|^2+4|\overline{a}||\overline{b}|\cos\frac{\pi}{2}+4|\overline{b}|^2} = \sqrt{4+0+36} = \sqrt{40};$$

$$\cos\varphi = \frac{-50}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{40}} = \frac{-50}{\sqrt{3400}} = \frac{-50}{10\sqrt{34}} = -\frac{5}{\sqrt{34}},$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = \pi-\arccos\frac{5}{\sqrt{34}};$$

б) $\text{пр}_{\overline{d}}\,\overline{c} = \dfrac{\overline{c}\cdot\overline{d}}{|\overline{d}|} = \dfrac{-50}{\sqrt{40}} = -\dfrac{50}{2\sqrt{10}} = -\dfrac{25}{\sqrt{10}};$

в) $\text{S} = \dfrac{1}{2}|\overline{c}\times\overline{d}|.$

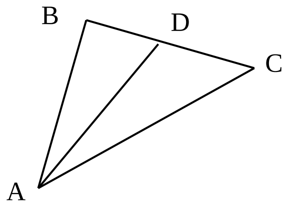
$$\overline{c}\times\overline{d} = (\overline{a}-3\overline{b})\times(\overline{a}+2\overline{b}) = \overline{a}\times\overline{a}+2\overline{a}\times\overline{b}-3\overline{b}\times\overline{a}-6\overline{b}\times\overline{b} = 2\overline{a}\times\overline{b}+3\overline{a}\times\overline{b} = 5\overline{a}\times\overline{b},$$

оскільки $\overline{a}\times\overline{a} = \overline{b}\times\overline{b} = 0;$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|5\overline{a}\times\overline{b}| = \frac{5}{2}|\overline{a}||\overline{b}|\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right) = \frac{5}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 15\,(\textit{кв.од.})$$

Приклад 1.3.6. Знайти довжину висоти трикутника ABC з вершинами у точках $A(-4;-1;2)$, $\text{B}(-5;6;4)$, $C(-1;-2;4)$ проведеної з вершини A.

Розв'язання.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AD}|, \quad |\overrightarrow{AD}| = h.$$

$$h = \frac{2S_{ABC}}{|\overrightarrow{\text{BC}}|}, \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1;7;2), \quad \overrightarrow{BC} = (4;8;0), \quad \overrightarrow{AC} = (3;-1;2).$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16\vec{i}+8\vec{j}-20\vec{k}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{16^2+8^2+(-20)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{720}\ \text{(кв.од.)}. \qquad |\overline{BC}|=\sqrt{16+64+0}=\sqrt{80}.$$

$$h=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{720}}{\sqrt{80}}=3(\textit{лін.од.})$$

Приклад 1.3.7. Обчислити об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\bar{a}=-3\bar{i}+5\bar{j}+2\bar{k},\quad \bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}+\bar{k},\ \ \bar{c}=\bar{i}-4\bar{j}-2\bar{k}.$

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}-3 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & -4 & -2\end{vmatrix}=6+5-24-2-12+30=3.$$

Тоді $V_{парал}=\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|=3$ (куб.од.)

Приклад 1.3.8. З'ясувати, чи лежать точки $A(1;-1;2)$, $B(3;2;3)$, $C(0;1;6)$, $D(2;3;5)$ в одній площині. Якщо не лежать, то знайдіть об'єм тетраедра, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}=(2;3;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;2;4)$, $\overrightarrow{AD}=(1;4;3)$. Якщо точки A, B, C, D лежать на одній площині, тоді вектори $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ компланарні. Для перевірки векторів на компланарність, знайдемо їх мішаний добуток:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=12+12-4-2-32+9=-5\neq 0.$$

Тобто вектори не компланарні і точки A, B, C, D лежать на одній площині.

Об'єм тетраедра V_{ABCD} шукаємо за формулою $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}|-5|=\frac{5}{6}$ (куб.од.)

Приклад 1.3.9. Дано трикутник $A(4;1)$, $B(7;5)$, $C(-4;7)$. Знайти площу трикутника, вершини якого містяться в точках перетину бісектрис трикутника зі сторонами (рис. 1.3.12).

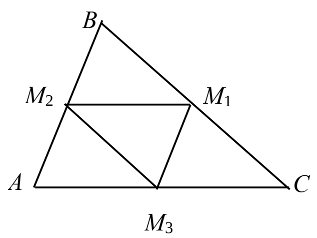


Рис. 1.3.12

Розв'язання. Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Знайдемо довжину відрізків AB, BC і AC за формулами (9).

$$AB=\sqrt{(4-7)^2+(1-5)^2}=5,$$

$$BC=\sqrt{(7+4)^2+(5+7)^2}=15,$$

$$AC=\sqrt{(4+4)^2+(1-7)^2}=10.$$

Знайдемо відношення, в яких основи бісектрис точки M_1, M_2, M_3 (рис. 1.3.12) поділяють відповідні відрізки:

$$\frac{|BM_1|}{|M_1C|}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2};\quad \frac{|AM_2|}{|M_2B|}=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{3};\quad \frac{|AM_3|}{|M_3C|}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3}.$$

Скориставшись формулами (10), знайдемо відповідно координати точок $M_1(x_1,\, y_1)$, $M_2(x_2,\, y_2)$, $M_3(x_3,\, y_3)$.

$$x_1=\frac{7-4\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{10}{3};\qquad y_1=\frac{5+7\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{17}{3};\qquad M_1\left(\frac{10}{3};\ \frac{17}{3}\right);$$

$$x_2=\frac{4+7\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{26}{5};\qquad y_2=\frac{1+5\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{13}{5};\qquad M_2\left(\frac{26}{5};\ \frac{13}{5}\right);$$

$$x_3=\frac{4-4\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=2;\qquad y_3=\frac{1+7\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{5}{2};\qquad M_3\left(2;\ \frac{5}{2}\right).$$

Площу трикутника $M_1M_2M_3$ обчислимо за формулою $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right|$, враховуючи,що $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(\frac{28}{15},-\frac{46}{15}\right)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=\left(-\frac{4}{3},-\frac{19}{6}\right)$, маємо

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{28}{5} & -\frac{46}{15} & 0\\ -\frac{4}{3} & -\frac{19}{6} & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-\frac{46}{15} & 0\\ -\frac{19}{6} & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{28}{5} & 0\\ -\frac{4}{3} & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{28}{5} & -\frac{46}{15}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{19}{6}\end{vmatrix}=\vec{k}\left(-\frac{28}{5}\cdot\frac{19}{6}-\frac{46}{15}\cdot\frac{4}{3}\right)=$$

$$=-\frac{982}{45}\vec{k}.$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{0+0+\left(-\frac{982}{45}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{982}{45}=\frac{491}{45}\text{ (кв.од.)}$$