

Навчальний модуль №1

Завдання для самостійної роботи з відповідями

1.1. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$2) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$3) \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$5) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$6) \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$7) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$8) \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Відповідь. 1) 14; 2) -10; 3) 17; 4) 0; 5) 0; 6) -42; 7) 90; 8) 27.

1.2. Знайти:

1) $A + B$;

2) $3A + 2B$;

3) $2A - 4B$;

4) $C + D$;

5) $C \cdot D$;

6) $A \cdot B$;

7) $B \cdot C$;

8) $A \cdot N - N$;

9) $BA - 3A$; 10) $A^2 + 2B$,

якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -1 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 12 \\ 0 & -13 & 14 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & -8 \\ 16 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -36 \end{pmatrix}$;

4) не можна виконати; 5) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -14 \\ 13 & 20 & 31 \\ -16 & -32 & -64 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 11 & 6 & 31 \\ -3 & -6 & -27 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} -4 & -35 \\ -12 & -15 \\ 3 & -51 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} -6 & 9 & -24 \\ -13 & 16 & -30 \\ 2 & 1 & -12 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -10 & 9 & -22 \\ 2 & -5 & 34 \end{pmatrix}$.

1.3. Знайти добуток матриць AB та BA (якщо це можливо):

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Відповідь. $AB = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$; BA не можна.

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Відповідь. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$

$$3) A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. } AB = (-1); A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & -3 \\ -12 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.4. Розв'язати матричні рівняння:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. } \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.5. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо:

$$1) f(x) = 2x^2 + 3x - 2, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. } f(A) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2) f(x) = 3x^2 - 3x + 5, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. } f(A) = \begin{pmatrix} -13 & 9 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}.$$

1.6. Знайти обернену матрицю:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. } A^{-1} = -\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 41 & -1 & 1 \\ 9 & -3 & -9 \\ -8 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. } A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 9 & -6 & -11 \\ -5 & 10 & 15 \end{pmatrix}.$$

1.7. Знайти ранг матриць:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. 1.

$$2) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. 2.

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. 2.

$$4) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. 2.

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. 3.

$$6) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. 3.

1.8. Розв'язати систему рівнянь методом оберненої матриці та за формулами Крамера:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1, \\ x_1 - x_2 = 2; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (1; -1).$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5, \\ 12x_1 - 8x_2 = 22; \end{cases} \quad \text{Відповідь. Система розв'язків не має.}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (1; 2; -1).$$

$$4) \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 10x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = -3; \end{cases} \quad \text{Відповідь. Система має безліч розв'язків.}$$

$$5) \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (-3; 2; 1).$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (-2; 0; 1; -1).$$

1.9. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (16; 7).$$

$$2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (1; 2; 3).$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 9x_1 + 9x_2 - 6x_3 = -3; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (1; 0; 2).$$

$$4) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 8; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (2; 1; 1).$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (1; 2; 2; 0).$$

$$6) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (1; 2; 3; 4).$$

$$7) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6; \end{cases} \quad \text{Відповідь. } (8; 6; 4; 2).$$

1.10. Визначити відстань точки $A(12; -3; 4)$ від початку координат і від осей координат.

Відповідь. $13; 5; 4\sqrt{10}; 3\sqrt{17}$.

1.11. Дано точки $A(1; 2; -1)$ і $B(-2; 1; 1)$. Обчислити відстань від початку координат до середини відрізка AB .

Відповідь. $1,871$.

1.12. Знаючи кінець відрізка $A(-3; -2)$ і його середину $C(-2; 3)$ знайти другий кінець відрізка – точку B .

Відповідь. $B(-1; 8)$.

1.13. Відрізок з кінцями $A(-5; -2)$ і $B(4; 2,5)$ поділено у відношенні $3:4:2$. Знайти точки поділу.

Відповідь. $(-2; -0,5), (2; 1,5)$.

1.14. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(3; -2), N(1; 6), P(-4; 2)$.

Відповідь. $A(-2; -6), B(8; 2), C(-6; 10)$.

1.15. Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо відомо координати його вершин $A(7; -4), B(-1; 8), C(-12; -1)$.

Відповідь. $(-2; 1)$.

1.16. Вектор утворює з двома осями системи координат кути, що рівні 60° . Під яким кутом він нахилений до третьої осі.

Відповідь. 45° або 135° .

1.17. Обчислити координати точки M , якщо відстань від початку координат до неї рівна 8 од., а вектор \vec{OM} нахилений до осі Ox під кутом 45° , а до осі Oz — під кутом 60° .

Відповідь. $M_1(4\sqrt{2}; 4; 4), M_2(4\sqrt{2}; -4; 4)$.

1.18. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$; , коли відомо, що $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Відповідь. 15 і $\sqrt{593}$.

1.19. Обчислити довжину вектора $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ і кути, які він утворює з осями.

Відповідь. 7; $\arccos\frac{6}{7}$; $\arccos\left(-\frac{2}{7}\right)$; $\arccos\frac{3}{7}$.

1.20. Знайти $3m^2 - 2mn + 4n^2$, якщо $|\vec{m}| = \frac{1}{3}$, $|\vec{n}| = 6$, $\left(\hat{m}, \hat{n}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь. 143.

1.21. Знайти $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = 2\vec{m} - 4\vec{n}$; $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$; $\left(\hat{m}, \hat{n}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь. 5.

1.22. Який кут утворюють одиничні вектори \vec{p} , \vec{q} , якщо $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ — взаємно перпендикулярні.

Відповідь. 60° .

1.23. Обчисліть проекцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = (\vec{i} - 2\vec{j}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$.

Відповідь. Помилка! Не можна створювати об'єкт із кодів полів редагування.

1.24. Дано вектори $\vec{a} = (2; -1; 4)$, $\vec{b} = (3; -1; 6)$. Обчислити $(2\vec{a} - 3\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

Відповідь. -1.

1.25. Дано $\vec{a} = (3; -2)$ і $\vec{b} = (5; 2)$. Знайти вектор \vec{c} якщо $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 16$.

Відповідь. $\vec{c} = (2; 3)$.

1.26. Знайти другу координату вектора \vec{c} , колінеарного до вектора $\vec{a} = (2; -2; 3)$, і такого що $\vec{a} \cdot \vec{c} = 17$.

Відповідь. -2.

1.27. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.

Відповідь. $\sqrt{35}$ кв. од.

1.28. Обчислити площу трикутника побудованого на векторах $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь. 15.

1.29. Знайти довжину висоти трикутника ABC з вершинами у точках $A(3; 1; 4)$, $B(3; 5; 1)$, $C(7; -4; 4)$ проведеної з вершини C .

Відповідь. 5.

1.30. Знайти момент сили $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ прикладеної до точки $A(4; -2; 3)$, відносно точки $O(3; 2; -1)$.

Відповідь. $(-4; 3; 4)$.

1.31. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a} = (2; -4; -3)$, $\vec{b} = (2; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; -1; 0)$.

Відповідь. 9.

1.32. Обчислити об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 7\vec{k}$.

Відповідь. 20.

1.33. Обчислити об'єм піраміди з вершинами у точках $A(3;2;-2)$, $B(1;3;1)$, $C(6;2;0)$, $D(0;2;2)$.

Відповідь. 3.

1.36. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, якщо його основа побудована на векторах \vec{a} і \vec{b} .

Відповідь. $\frac{49}{\sqrt{232}}$.

1.37. Чи паралельні прямі?

1) $l_1: 5x - 3y + 4 = 0$ і $l_2: 6x + 10y + 1 = 0$;

2) $l_1: 9x + 15y + 1 = 0$ і $l_2: 3x + 5y = 0$.

Відповідь. 1) ні; 2) так.

1.38. Чи перпендикулярні прямі?

1) $l_1: 5x - y + 4 = 0$ і $l_2: 6x + 8y - 1 = 0$;

2) $l_1: x + 5y - 1 = 0$ і $l_2: 5x - y + 2 = 0$.

Відповідь. 1) ні; 2) так.

1.39. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-8;12)$ і має вектор $\vec{n} = (7;9)$.

Відповідь. $5x - 6y - 29 = 0$.

1.40. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(9;5)$ і має направляючий вектор $\vec{s} = (8;2)$.

Відповідь. $x - 4y - 69 = 0$.

1.41. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(-3;-5)$, $B(3;7)$.

Відповідь. $2x - y + 1 = 0$.

1.42. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $y = 3x + 5$ — рівняння гіпотенузи, $A(4;-1)$ — вершина прямого кута.

Відповідь. $y = -2x + 7$; $y = \frac{1}{2}x - 3$.

1.43. Дано трикутник з вершинами в точках $A\left(-\frac{1}{7}; -\frac{3}{28}\right)$, $B(4, 3)$, $C(2, -1)$. Обчислити довжини його висот.

Відповідь. $h_A = \frac{27\sqrt{5}}{28}$.

1.44. З точок перетину прямої $3x + 5y - 15 = 0$ з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

Відповідь. $5x - 3y + 9 = 0$; $5x - 3y - 25 = 0$.

1.45. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо $A(2;-4)$ — його вершина, $M(5;2)$ — точка перетину діагоналей.

Відповідь. $3x + y = 2$; $x - 3y = 14$; $x - 3y = -16$; $3x + y = 32$.

1.46. Через точку $A(5; 2)$ провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.

Відповідь. $x + y = 7$.

1.47. У трикутнику $A(1; 2)$, $B(3; 7)$, $C(5; -13)$ обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини A .

Відповідь. $\frac{25}{\sqrt{34}}$.

1.48. Знайти точку, симетричну точці $A(-2; -9)$ відносно прямої $2x + 5y = 38$.

Відповідь. $(10; 21)$.

1.49. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y = 1$, $x - 2y = 0$, $M(3; -1)$ — точка перетину діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.

Відповідь. $x - y = 7$, $x - 2y = 10$.

1.50. У трикутнику ABC відомі $AB: 4x + y - 12 = 0$, висота $BH: 5x - 4y = 15$, висота $AK: 2x + 2y - 9 = 0$. Записати рівняння сторін AC ; BC .

Відповідь. $4x + 5y = 20$; $x - y = 3$.

1.51. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(3; -4)$ і рівняння висот: $7x - 2y = 1$, $2x - 7y = 6$.

Відповідь. $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

1.52. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

Відповідь. $a = 4$; $b = -3$; $R = 2$.

1.53. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

Відповідь. $M_1\left(-\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{15}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

1.54. Еліпс проходить через точку $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ і дотикається до прямої $4x + 5y - 25 = 0$.

Записати рівняння цього еліпса і знайти координати точки дотику.

Відповідь. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\left(4; \frac{9}{5}\right)$; $\frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{16} = 1$, $\left(\frac{9}{4}, \frac{16}{5}\right)$.

1.55. Записати рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ у точці $(2; -3)$.

Відповідь. $x - 2y = 8$.

1.56. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо таке:

- 1) відстань між фокусами дорівнює 8, мала піввісь $b = 3$;
- 2) велика піввісь $a = 6$, ексцентриситет $\varepsilon = 0,5$;
- 3) відстань між фокусами дорівнює 6, ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$;
- 4) відстань між фокусами дорівнює 6, $a + b = 9$.

Відповідь. **1)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; **2)** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$; **3)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; **4)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

1.57. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо таке:

1) відстань між фокусами дорівнює 10, дійсна піввісь $a = 4$;

2) дійсна піввісь $a = 4$, ексцентриситет $\varepsilon = 1,2$.

Відповідь. **1)** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; **2)** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{176/25} = 1$.

1.58. Гіпербола дотикається до прямої $x - y = 2$ у точці $(4; 2)$. Скласти рівняння гіперболи.

Відповідь. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$.

1.59. До параболи $y^2 = 12x$ провести дотичну паралельно прямій $2x + y - 7 = 0$.

Відповідь. $4x + 2y + 3 = 0$.

1.60. Записати канонічне рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо парабола симетрична:

1) відносно осі Ox і проходить через точку $(4; 1)$;

2) відносно осі Oy і проходить через точку $(1; 1)$.

Відповідь. **1)** $y^2 = 16x$; **2)** $x^2 = y$.

1.61. Визначити типи таких кривих:

а) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$,

б) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$,

в) $x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$,

г) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$,

д) $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0$.

Відповідь. **а)** гіпербола; **б)** еліпс; **в)** пара прямих, що перетинаються; **г)** парабола; **д)** пара паралельних прямих.

1.62. Записати рівняння площини, паралельної площині Oxy , що проходить через точку $(2; -5; 3)$.

Відповідь. $z + 3 = 0$.

1.63. Скласти рівняння площини, якщо відстань її від трьох точок $A(6; 1; -1)$, $B(0; 5; 4)$ і $C(5; 2; 0)$ дорівнює відповідно 1, 2, 0.

Відповідь. $x + 2y + 2z - 9 = 0$ і $y - 2 = 0$.

1.64. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

Відповідь. $(-12; -4; 18)$.

1.65. Дано дві точки $A(1; 3; -2)$, $B(7; -4; 4)$. Записати рівняння площини, що проходить через точку B перпендикулярно до \vec{AB} і знайти її відстань від точки A .

Відповідь. $6x - 7y + 6z - 94 = 0$; 11.

1.66. На відстані трьох одиниць від площини $3x - 6y - 2z + 14 = 0$ провести паралельну їй площину.

Відповідь. $3x - 6y - 2z + 35 = 0$.

1.67. Через точку $(2; -5; 3)$ провести пряму, паралельну прямій $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

Відповідь. $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$.

1.68. Визначити кут між двома прямими $\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0, \end{cases}$ і $\begin{cases} 4x+y-6z=2, \\ y-3z=-2. \end{cases}$

Відповідь. $\cos \alpha = \frac{98}{195}$.

1.69. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2; 3; 1)$ на пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

Відповідь. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

1.70. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-3}$ на площину $x - y + 3z + 8 = 0$.

Відповідь. $\frac{x+9}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-1}$.

1.71. Записати рівняння площини, що проходить через точку $A(3; 1; -2)$ і через пряму $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

Відповідь. $8x - 9y - 22z - 59 = 0$.

1.72. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(4; -3; 1)$ і паралельна прямим: $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$ і $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$.

Відповідь. $16x - 27y + 14z - 159 = 0$.

1.73. Знайти точку, симетричну точці $A(4; 3; 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

Відповідь. $(2; 9; 6)$.

1.74. Знайти точки перетину поверхонь з прямими

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$; $\frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{-2}$;

2) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$; $x-3 = y-1 = \frac{z-6}{3}$;

3) $4z = x^2 - 4y^2$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-2}$.

Відповідь. **1)** $(-2; 3; 0)$ і $(0; 0; 2)$; **2)** $(4; 2; 9)$ пряма дотикається до поверхні; **3)** $(4; 1; 3)$.

1.75. Записати рівняння площини, що дотикається до поверхні $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$ у точці $(-6; 2; 6)$.

Відповідь. $4x - 12y + 9z - 6 = 0$.

1.76. Знайти площину, що дотикається до конуса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 0$ в точці $(4; -6; 4)$.

Відповідь. $x - 2y - 4z = 0$.