2.2 Границя функції, границя числової послідовності.

Поняття числової послідовності та її границі

Означення. Числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина натурального ряду чисел, називається *числовою послідовністю*, або просто послідовністю, і позначається $y = x_n$, надалі писатимемо $x_n = f(n),\ n \in N$.

Значення $x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \ldots,\ x_n = f(n),\ \ldots$ називаються *членами послідовності*. Послідовність вважається заданою, якщо задано n-й член послідовності.

Приклад. Записати три перші члени послідовності $x_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$. Маємо $x_1 = \dfrac{1}{2},\ \ x_2 = \dfrac{3}{2^2},\ \ x_3 = \dfrac{5}{2^3}$.

Приклад. За заданими трьома першими членами послідовності $x_1 = 1,\ \ x_2 = -\dfrac{3}{5\sqrt{2}},\ \ x_3 = \dfrac{5}{5^2\sqrt{3}}$ знайти формулу n-го члена.

Задача розв’язується методом добору з наступною перевіркою $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{5^{n-1}\sqrt{n}}$.

Означення. Число a називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, яке б мале воно не було, існує номер N такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

Для стислого запису означення границі використаємо квантори: $\forall$ — для будь-якого, будь-який; $\exists$ — існує, знайдеться; : = дорівнює за означенням, означає. Тоді означення границі послідовності за допомогою цих символів запишеться так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) := \left((\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ n > N) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon)\right).$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі послідовності. На числовій осі побудуємо ε-окіл числа a, тобто інтервал (a – ε; a + ε), і покажемо, як розміщуватимуться точки, які відповідають членам послідовності $x_n \to a$, при $n \to \infty$ (рис. 3.12).

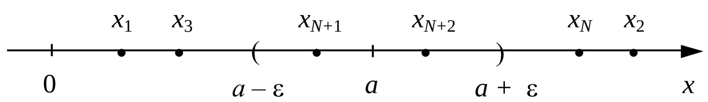

Рис. 1

Означення. Число a називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого ε-околу точки a існує номер N такий, що, починаючи з номерів $n > N$, усі члени послідовності перебувають в ε-околі точки a (див. рис. 1).

Означення. Послідовність називається *збіжною*, якщо вона має границю (скінченну). Послідовність, яка не має границі, називається *розбіжною*.

Приклад. Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Зауважимо, що n-й член послідовності $x_n = \frac{1}{n}$; сама послідовність така: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$ Для доведення потрібно за заданим $\varepsilon > 0$ знайти номер послідовності N, такий, що при всіх номерах $n > N$ виконуватиметься нерівність $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Розв'яжемо останню нерівність відносно n:

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Виберемо* $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді при $n > N$ нерівність $n > \frac{1}{\varepsilon}$ виконується, а отже, виконується і нерівність $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, чим доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$ Отже, для доведення за означенням певної границі послідовності досить побудувати функціональну залежність N від числа ε, тобто знайти функцію $N(\varepsilon)$. У розглянутому прикладі функція $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, і за заданим будь-яким $\varepsilon > 0$ завжди можна знайти відповідний номер N; наприклад при $\varepsilon_1 = 0{,}001$, $N_1 = \left[\frac{1}{0{,}001}\right] = 1000$, при $n > N_1 = 1000$ нерівність $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon_1 = 0{,}001$ виконується.

Загальні властивості збіжних послідовностей

***Теорема 1.* (Єдиність границі послідовності). Якщо послідовність має границю, то вона єдина.**

***Теорема 2.* (Необхідна умова збіжності послідовності). Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.**

***Теорема 3.* Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $a < l \, (a > m)$, то існує такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $x_n < l \, (x_n > m)$.**

Приклад. Послідовність $x_n = \frac{n+4}{n}$ у розгорнутому вигляді така: $\frac{5}{1}, \frac{6}{2}, \frac{7}{3}, \frac{8}{4}, \frac{9}{5}, ..., \frac{n+4}{n}, ...;$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4}{n} = 1 < 2 = l$. Для номерів $n > 4$ усі члени послідовності $\frac{9}{5}, \frac{10}{6}, \frac{11}{7}, ...$ будуть менші за 2.

***Теорема 4.* Границя сталої величини дорівнює сталій, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} c = c, \quad c = \text{const}$**

Нескінченно мала величина та її властивості

Означення. Послідовність α_n називається *нескінченно малою величиною* (*н.м.в.*), якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Приклад. $\alpha_n = \frac{1}{n}$ — н.м.в., бо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

***Теорема 1*. Сума двох н.м.в. є н.м.в.**

Наслідок. Алгебраїчна сума скінченної кількості н.м.в. є н.м.в.

***Теорема 2*. Добуток обмеженої величини на н.м.в. є н.м.в.**

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$. Послідовність $\frac{\sin n}{n}$ — н.м.в., бо є добутком обмеженої величини $\sin n(|\sin n|\le 1)$ і н.м.в. $\frac{1}{n}$.

Таким чином, за теоремою 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

***Теорема 3*. Добуток двох н.м.в. є н.м.в.**

Наслідок. Добуток скінченної кількості н.м.в. є н.м.в.

***Теорема 4*. Для існування границі *a* послідовності x_n необхідно і достатньо, щоб послідовність $\alpha_n = x_n - a$ була н.м.в.**

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $x_n = a + a_n$, де α_n — н.м.в.

Нескінченно велика величина. Зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою величинами

***Означення*.** Послідовність x_n називається *нескінченно великою величиною* (н.в.в.), якщо для будь-якого числа $0 < M < +\infty$, яке б велике воно не було, існує номер *N*, такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Якщо члени н.в.в., починаючи з деякого номера, всі додатні, то позначають $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; якщо від'ємні, то — $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, а якщо різних знаків, то — $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Наприклад:

1) $x_n = \sqrt{n},\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$;

2) $x_n = -n^2,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^2\right) = -\infty$;

3) $x_n = (-1)^n n,\ \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$.

Аналітичною мовою означення н.в.в. виглядає так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\right) := \left((\forall M > O,\ \exists N,\ n > N) \Rightarrow \left(|x_n| > M\right)\right).$$

За своїм означенням, н.в.в. — необмежена, але не кожна необмежена величина є н.в.в., наприклад послідовність 1, 0, 3, 0, 5, 0, ... з членом $x_n = \frac{1}{2}\left(n + (-1)^{n+1} n\right)$ — величина необмежена, але н.в.в. не буде. Справді, не *всі* члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, будуть як завгодно великими.

***Теорема*. Зв'язок між н.в.в. і н.м.в.**

1. Якщо α_n — н.м.в. і $\alpha_n \ne 0$, то обернена до неї послідовність $y_n = \frac{1}{\alpha_n}$ буде н.в.в., і навпаки.

2. Якщо y_n — н.в.в., то обернена до неї $\alpha_n = \dfrac{1}{y_n}$ — н.м.в.

Граничний перехід при арифметичних операціях

***Теорема*. Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:**

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c y_n = c \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

За допомогою теореми можна виконувати граничний перехід при арифметичних операціях з послідовностями, але тільки в тих випадках, коли послідовності збіжні.

Приклад. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

На практиці такі докладні записи граничного переходу виконують рідко; як правило, граничний перехід при арифметичних операціях виконується усно.

Якщо умови теореми порушуються, то вираз під знаком границі спочатку перетворюють таким чином, щоб арифметичні дії виконувалися зі збіжними послідовностями, а потім виконують граничний перехід.

Приклад. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_{m-1} n + b_m} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^k\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}\right)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } k = m; \\ \infty, & \text{якщо } k > m; \\ 0, & \text{якщо } k < m. \end{cases}$$

Теореми, які полегшують знаходження границь послідовностей

***Теорема 1.* (Граничний перехід у нерівності).**

Якщо для будь-якого n виконується нерівність $x_n \le y_n$ і x_n, y_n — збіжні, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

***Теорема 2.* (Про границю затисненої послідовності). Якщо для будь-якого n $x_n \le y_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.**

Приклад. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1$, бо $1 < \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} < 1+\dfrac{1}{n}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1.$

***Теорема 3.* (Вейєрштрасса). Про границю монотонної й обмеженої послідовності:**

1) якщо монотонно зростаюча послідовність обмежена зверху, то вона збіжна;

2) якщо монотонно спадна послідовність обмежена знизу, то вона збіжна.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$. При $q = 0$ доведення очевидне. Нехай $0 < q < 1$, тоді послідовність $x_n = q^n$ — монотонно спадна (див. рис. 3.8) і обмежена знизу $\left(q^n > 0\right)$. Отже, за теоремою Вейєрштрасса послідовність $x_n = q^n$ має границю, яку позначимо так: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a$. Послідовність $y_n = q^{n-1}$, за винятком першого члена, збігається з послідовністю $x_n = q^n$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = a$. Звідси випливає, що $a = \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(q \cdot q^{n-1}\right) = q \cdot a$, тобто $a = qa$ або $a(1-q) = 0$, але $q \neq 1$, отже, $a = \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Нехай тепер $-1 < q < 0$.

Розглянемо

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \left|\begin{array}{l} -q = p \\ 0 < p < 1 \\ q = -1p \end{array}\right| = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot p^n = \left|\begin{array}{l} p^n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p^n - \text{н.м.в.} \\ \left|(-1)^n\right| \le 1 - \text{обмежена.} \end{array}\right| = 0.$$

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^n + 3^n}{3^n}}{\dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1}{2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3} = \left|\begin{array}{l} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \\ 0 < \dfrac{2}{3} < 1 \end{array}\right| = \frac{1}{3}.$$

Число e

Розглянемо послідовність $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Можна довести, що ця послідовність монотонно зростає і обмежена $2 < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$. За теоремою Вейєрштрасса існує границя цієї послідовності, яку позначають так: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Зазначимо, що число e = 2,7183... є основою натуральних логарифмів $\ln a = \log_e a$. Взагалі, число e, як і число π = 3,14 ..., широко застосовується в різних задачах, у тому числі й у задачах з економічним змістом.

Задача. Суму a грн покладено в банк при p % річних. Як збільшиться ця сума за один рік, якщо вклад безперервно забирати і знову класти в банк?

Нехай вклад буде недоторканним цілий рік, тоді його приріст $x = \dfrac{ap}{100}$, а вся сума $S_1 = a + \dfrac{ap}{100} = a\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$.

Якщо вклад зняли через півроку і відразу поклали на півроку, то приріст за перше півріччя буде $x_1 = \dfrac{ap}{2 \cdot 100}$, а за друге — $x_2 = \left(a + \dfrac{ap}{2 \cdot 100}\right) \cdot \dfrac{p}{2 \cdot 100}$. Отже, вся сума за $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$ року буде

$$S_2 = a + \frac{ap}{2 \cdot 100} + \frac{a\left(1 + \dfrac{p}{200}\right)p}{200} = a\left(1 + \frac{p}{2 \cdot 100}\right)\left(1 + \frac{p}{2 \cdot 100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{2 \cdot 100}\right)^2.$$

Аналогічно можна вважати, що коли брати з банку і знову класти 3 рази на рік, то за рік $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$ сума буде така:

$$S_3 = a\left(1+\frac{p}{3\cdot 100}\right)^3,$$

а за рік $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}\right)=1 \Rightarrow S_n = a\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^n.$

Розв’язком задачі буде границя $S = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^n.$

При $p = 100\%$ сума $S = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae$; для довільного p, як буде показано в підрозд. 3.4, $S = ae\frac{p}{100}$.

Розглянемо деякі цифрові дані: при початковому вкладі $a = 100$ грн, в умовах даної задачі, при $p = 100$ % річних сума за рік буде $S = 271$ грн 83 коп. (а не 200 грн, якщо вклад не знімали цілий рік); при $p = 2$ % річних S = 102 грн 2 коп. (а не 102 грн, якщо вклад не знімати цілий рік).

Приклад. Довести, що границею послідовності $x_n = \frac{2n+3}{n+5}$ є число a = 2.

Задамо число $\varepsilon > 0$, тоді

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n+3}{n+5}-2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\right| = \left|\frac{-7}{n+5}\right| = \frac{7}{n+5}.$$

З нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ маємо $\frac{7}{n+5} < \varepsilon$ або $n > \frac{7}{\varepsilon} - 5$. Звідки $N = \left[\frac{7}{\varepsilon}-5\right]$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+3/n-5/n^2+6/n^3\right)}{n^2\left(6/n^2-2/n+7\right)} = \infty.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1-0 = 1.$$

Границя функції. Поняття границі функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки x = a, за винятком, хіба що, самої точки x = a.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x-a| < \delta$ і $x \neq a$ виконується нерівність $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Коротко це означення можна записати так:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=b\right) := ((\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ |x-a|<\delta,\ \ x\neq a)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon)).$$

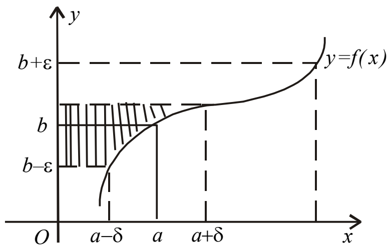

Рис. 2

На рис. 3.13 показано геометричну інтерпретацію $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, де за заданим ε-околом числа b знайдено δ-окіл числа a такий, що для всіх $x\in(a-\delta;\ a+\delta)$, $x\neq a$ відповідні значення функції $f(x)\in(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$, тобто графік функції $f(x)$ лежить у смузі шириною 2 ε.

Приклад. Довести за означенням, що $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Доведення. Візьмемо довільне число $\varepsilon>0$. Покажемо, яким чином треба вибрати $\delta>0$. За означенням границі функції з нерівності $|x-x_0|<\delta$ має випливати нерівність $|x-x_0|<\varepsilon$. Для того щоб виконувалася така умова, досить вибрати $\delta=\varepsilon$.

Нехай область визначення функції включає нескінченний проміжок.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$, *коли* $x\to\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $M>0$, таке що з нерівності $|x|>M$ випливає нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$. Коротко це можна записати так:

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=b\right) := \left(\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0,\ |x|>M\right)\Rightarrow\left(|f(x)-b|<\varepsilon\right)\right).$$

При $x\to a$ або $x\to\infty$ функція може набувати нескінченно великих значень чи прямувати до нуля. Ці випадки можна проілюструвати такими означеннями.

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою величиною* (*н.в.в.*) при $x\to a$, якщо для будь-якого $M>0$, яке б велике воно не було, існує число $\delta>0$, таке що з нерівності $0<|x-a|<\delta$ випливає $|f(x)|>M$, тобто:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=\infty\right) := \left(\left(\forall M>0,\ \exists\delta>0,\ 0<|x-a|<\delta\right)\Rightarrow\left(|f(x)|>M\right)\right).$$

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою величиною* (*н.м.в.*) при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0.$

Розглянемо односторонні границі для функції $y=f(x)$.

Означення. Правостороння границя функції:

$$\left(\lim_{x\to a+0} f(x)=b\right) := \left(\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ a<x<a+\delta\right)\Rightarrow\left(|f(x)-b|<\varepsilon\right)\right).$$

Означення. Лівостороння границя функції:

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=b\right) := ((\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ a-\delta<x<a)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon)).$$

***Теорема*. Для існування $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова**

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{a+0} f(x)=b.}$$

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ не існує.

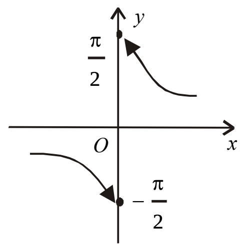

Рис. 3

Розглянемо односторонні границі:

а) ліворуч $\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\left|\begin{matrix} x\to -0 \\ \dfrac{1}{x}\to -\infty \end{matrix}\right|=-\dfrac{\pi}{2};$

б) праворуч $\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\left|\begin{matrix} x\to +0 \\ \dfrac{1}{x}\to +\infty \end{matrix}\right|=+\dfrac{\pi}{2}.$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ не існує, бо односторонні границі хоча й існують, але не рівні між собою (рис. 3).

Зведення поняття границі функції до границі послідовності

Послідовність за означенням є функція, отже, границя послідовності — просто окремий випадок границі функції. Навпаки, у деякому розумінні границя функції може бути зведена до границі послідовності.

Нехай задано функцію $f(x),\ x\in D;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ — послідовність значень аргументу функції з області *D*; цій послідовності відповідатиме така послідовність значень функції: $f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x\to a$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу x_n, $x_n\neq a,$ що має границею число $a,$ відповідна послідовність значень функції $f(x_n)$ має границею число b.

Відповідно до означення поняття границі функції фактично зведено до поняття границі послідовності, тому теореми про границі послідовностей також справджуються для границь функцій, тобто не потрібно формулювати ці теореми ще раз для границь функцій.

Розкриття невизначених виразів
типу $\left[\dfrac{0}{0}\right],\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right],\left[\infty-\infty\right]$ *для алгебраїчних функцій*

При виконанні граничного переходу у виразах типу $f(x)\pm g(x),\quad f(x)g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)},$ коли порушуються умови теореми про граничний перехід при арифметичних операціях, розв'язання задачі у ряді випадків зводиться до аналізу невизначених виразів виду $\left[\dfrac{0}{0}\right],\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right],\left[\infty-\infty\right].$

Розглянемо деякі загальні рекомендації щодо дослідження таких невизначених виразів, обмежуючись тільки алгебраїчними функціями.

1. Невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ для раціональних функцій

Спочатку нагадаємо деякі положення алгебри многочленів. Многочлен $P_n(x)$ називається *упорядкованим*, якщо

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Теорема (Безу). **Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен типу $x-a$ дорівнює значенню многочлена при $x=a$, тобто $P_n(a)$.**

Наслідок. Якщо число a — корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a)=0,$ то многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен $x-a$.

Приклад. Розкласти на множники $P_3(x)=x^3-2x^2+6x-5$. Оскільки $P_3(1)=0 \Rightarrow x=1$ — корінь $P_3(x) \Rightarrow P_3(x)$ ділиться без остачі на $x-1$. Виконуючи ділення многочленів, дістаємо:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3-2x^2+6x-5 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} \qquad\qquad & x^2-x-5 \\
-x^2+6x \qquad & \\
-\,\underline{-x^2+x} \qquad & \\
5x-5 & \\
-\,\underline{5x-5} & \\
0 \quad &
\end{array}$$

Отже,

$$P_3(x)=x^3-2x^2+6x-5=(x-1)\left(x^2-x+5\right).$$

Розглянемо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — такі многочлени, що $P_n(a)=0$, $Q_m(a)=0$.

За наслідком з теореми Безу чисельник і знаменник діляться без остачі на $x-a$, тобто чисельник і знаменник мають спільний множник $x-a$. Отже, дістаємо:

$$\lim_{x\to a}\frac{P_n(a)}{Q_m(a)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

Степінь многочленів як у чисельнику, так і в знаменнику зменшився на одиницю. Якщо після виконання нового граничного переходу знову буде невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то наведений алгоритм повторюють.

Зауважимо, що скорочення дробу на множник $x-a$ під знаком границі можливе, бо за означенням границі функції змінна x як завгодно близька до числа a, але $x \neq a$.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+6x-5}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2-x+5\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+5}{x+1}=\frac{1-1+5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

Отже, невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ при $x\to a$ для раціональних функцій розкривається діленням многочленів у чисельнику і знаменнику на двочлен $x-a$.

2. Невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій

Для розв'язування задач у цьому випадку рекомендується звільнитись від тих ірраціональних множників у чисельнику і знаменнику дробового виразу, які перетворюються на нуль при виконанні граничного переходу. Для звільнення від радикалів використовують формули скороченого множення, заміну змінної та інші штучні прийоми.

Зразки розв'язування вправ

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix} x=t^6 \\ x\to 1 \\ t\to 1\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

3. Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

Приклад 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+x+1}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{2\sqrt{x^3+x}-10x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{10}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}.$$

4. Невизначеність $[\infty-\infty]$

Цей тип невизначеності зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

Приклад 4.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 5.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x\to 3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}= \;=\frac{x+3}{x}$ при $x\neq 3$, то $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=2.$ Звідси $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2.$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

Приклад 8. Знайти

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-100}{x^3-20x^2+100x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Маємо:

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=\lim_{x\to 10}\frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}.$$

Чисельник дробу прямує до 300, а знаменник — до нуля, тобто є н.м.в. Таким чином, заданий дріб — н.в.в. (нескінченно велика величина):

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\infty.$$

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Покладемо $1+x=y^5$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{3}{5}.$$

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 12. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Поділимо чисельник та знаменник на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3.$$

Приклад 13. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=[\infty-\infty]$.

Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2+8x+3}+\ +\sqrt{x^2+4x+3}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2.$$

Приклад 14. Знайти $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}$.

Якщо $x\to 3-0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to -\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to 0; \lim\limits_{x\to 3-0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=\dfrac{1}{3}$.

Якщо $x\to 3+0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to +\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to +\infty; \lim\limits_{x\to 3+0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=0$.

Особливі границі Перша особлива границя $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$

Границі — наслідки першої особливості границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=1$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$.

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ для виразів з тригонометричними функціями.

Приклад 15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Приклад 16. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin x/2}{(\pi-x)^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для того щоб скористатися першою особливою границею, потрібно виконати таку заміну змінної x, щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад $\pi-x=y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

Приклад 17.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}1-x=y\\ x=1-y\\ x\to 1\\ y\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Друга особлива границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Границі — наслідки другої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Зауваження: За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[1^\infty\right],\ \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty\right].$$

Приклад 18.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1} = \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1} = e^{10}.$$

Приклад 19.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x\sin 2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}} = \left|\begin{array}{l}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}} \xrightarrow[x\to 0]{} e \\ \dfrac{\sin 2x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2\end{array}\right| = e^2.$$

Приклад 20.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5x}{5x\cdot\ln(2x+1)\cdot 2x} = \left|\begin{array}{l}\dfrac{\sin 5x}{5x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \\ \dfrac{2x}{\ln(2x+1)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\end{array}\right| = \frac{5}{2}.$$

Еквівалентні нескінченно малі величини

Означення. Нескінченно малі величини (н.м.в.) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються н.м.в. одного порядку *мализни* при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const}\neq 0$.

Приклад. Н.м.в. $\alpha(x)=x$ та $\beta(x)=\sin 2x$ є н.м.в. *одного порядку мализни* при $x\to 0$, бо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\neq 0.$$

Означення. Н.м.в. $\alpha(x)$ називається н.м.в. *вищого порядку мализни* порівняно з н.м.в. $\beta(x)$ при $x\to a$, якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Приклад. Н.м.в. $\alpha(x)=x^n\ (n>1)$ є вищого порядку мализни порівняно з н.м.в. $\beta(x)=x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0.$$

Означення. Дві н.м.в. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними* при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$

Зауваження: При дослідженні границь відношення н.м.в. їх можна замінювати еквівалентними, тобто якщо $\beta(x)$ еквівалентна $\gamma(x)$ при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}.$

Виходячи з наслідків першої та другої особливих границь, можна записати таку низку еквівалентних н.м.в. при $x\to 0$:

$$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}\, x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg}\, x \sim e^x - 1 \sim \ln(x+1).$$

Як наслідок звідси випливає, наприклад, що при $x\to 0$ буде: $e^{3x}-1\sim 3x$; $\sin 5x \sim 5x$ і т.п.

Використовується шкала н.м.в. при дослідженні невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Приклад 21.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 5x-\sin x}-1\right)}{\ln(1+3x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x\to 0 \\ \ln(1+3x)\sim 3x; \\ e^{\sin 5x-\sin 5x}-1\sim \sin 5x-\sin x; \\ e^{\sin x}\to 1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin x}{3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\cos 3x}{3x}=\left|\begin{array}{c} x\to 0 \\ \sin 2x\sim 2x \\ \cos 3x\to 1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

Приклад 22. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}\right)^2=2\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Приклад 23. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\left[1^\infty\right].$

Діленням чисельника дробу на знаменник виділяємо цілу частину $\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$

Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}};$$

оскільки $\dfrac{8x-3}{x^2-3x+7}\to 0$ при $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}=e$.

Зауважимо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}=8$. Дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=e^8.$$

Приклад 24. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$.

Замінимо чисельник та знаменник дробу еквівалентними н.м.в.: $\ln(1+3x\sin x)\sim 3x\sin x, \operatorname{tg}(x^2)\sim x^2$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3.$$