2.3 Неперервність функції

Поняття неперервності функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Виходячи з означення границь функції, поняття неперервності функції в точці можна зобразити так:

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} :=$$
$$:= ((\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists\delta > 0,\ \ 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)).$$

Звідси випливає, що для неперервності функції в точці мають виконуватися такі умови:

а) точка $x = x_0$ належить області визначення функції $D(f)$, тобто $f(x_0)$ існує;

б) деякий окіл точки $x = x_0$ входить до області визначення функції, наприклад $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D(f)$;

в) границя $f(x)$ при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в точці $x = x_0$, тобто дорівнює $f(x_0)$.

Позначимо через $\Delta x = x - x_0$ приріст аргументу, а через $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції (рис. 1).

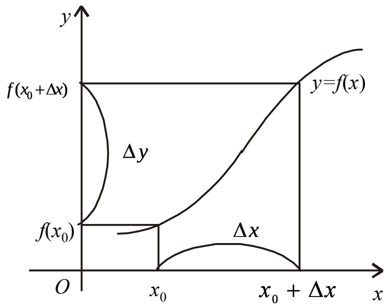

Рис. 1

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := ((\Delta x = x - x_0 \to 0) \Rightarrow (\Delta y = f(x) - f(x_0) \to 0)).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо границя функції дорівнює функції від границі аргументу при $x \to x_0$, тобто

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)\right).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо односторонні границі функції зліва й справа в цій точці існують, рівні між собою і дорівнюють значенню функції у цій точці, тобто:

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)\right).$$

Означення. Функція називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Таким чином, поняття неперервності функції у точці задається чотирма, хоч і рівноправними, але різними за формулюванням означеннями. Використання конкретного означення неперервності функції в точці визначається специфікою задачі.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y=\sin x.$

Область визначення функції $y=\sin x - D=R.$

Візьмемо довільне $x_0 \in D=R,$ надамо x_0 приросту $\Delta x,$ тоді приріст функції Δy буде

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Розглянемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 0.$$

Дамо необхідні пояснення: при $\Delta x\to 0 \Rightarrow \Delta x$ — н.м.в.; $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1;$ $\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$ — величина обмежена $\left(\left|\cos\left(\dfrac{\Delta x}{2}+x_0\right)\right|\le 1\right),$ отже, добуток $\Delta y = \Delta x\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(\dfrac{\Delta x}{2}+x_0\right)$ є н.м.в.

Таким чином, з $\Delta x\to 0 \Rightarrow \Delta y\to 0.$

Звідси функція $y=\sin x$ неперервна $\forall x_0\in R,$ тобто на всій області визначення.

Властивості неперервних функцій

Теорема 1. **Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці $x=x_0$, то у цій точці будуть неперервними функції $f(x)\pm g(x),$ $f(x)\cdot g(x),$ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; в останньому випадку за умови, що** $g(x_0)\ne 0.$

Теорема 2. **Якщо функція $y=F(u)$ — неперервна для $u\in U,$ а функція $u=\varphi(x)$ — неперервна для $x\in X$ і значення функції $\varphi(x)\in U,$ то складна функція $y=F(\varphi(x))$ — неперервна для $x\in X.$**

Приклад. Дослідити функції $y=\cos x,$ $y=\mathrm{tg}x,$ $y=\mathrm{ctg}x$ на неперервність.

Оскільки $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right),$ то функцію $y=\cos x$ можна вважати суперпозицією таких неперервних $\forall x\in R$ функцій: $y=\sin u,$ $u=\dfrac{\pi}{2}-x.$ Отже, за теоремою 2 функція $y=\cos x$ — неперервна $\forall x\in R.$

Тепер за теоремою 1 неважко встановити, що функція $y=\mathrm{tg}x$ — неперервна $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right),$ а функція $y=\mathrm{ctg}x$ — неперервна $\forall x\in(\pi n,\pi+\pi n) n\in Z,$ як відношення неперервних функцій $y=\sin x$ та $y=\cos x.$

Зауваження. Можна довести, що всі основні елементарні функції будуть неперервними в кожному з відкритих проміжків своєї області визначення.

Теорема 3 (*Коші*). **Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на закритому проміжку $[a;\ b]$ і на кінцях проміжку набуває значення різних знаків (наприклад $f(a) > 0$, $f(b) < 0$), тоді на відкритому проміжку $(a;\ b)$ існує така точка $x = c$, що $f(c) = 0$** (рис. 2).

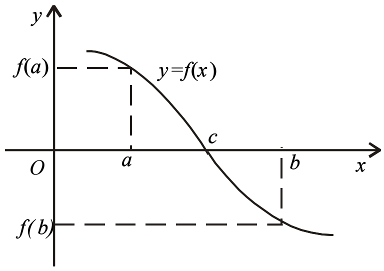

Рис. 2

Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і $f(a) = A,\ \ f(b) = B,$ то $y = f(x)$ на $[a; b]$ набуває всіх проміжних значень між числами *A* і *B*.

Теорема 4 (Вейєрштрасса). **Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на закритому проміжку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку своїх найбільших й найменших значень**
(рис. 3).

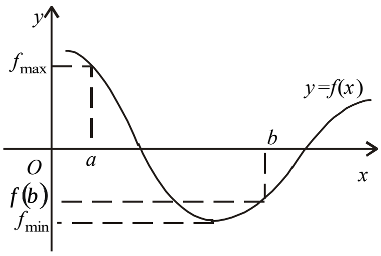

Рис. 3

Класифікація точок розриву функцій

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *розривною в точці* $x = x_0$, якщо порушується хоча б одна з умов рівності

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Розрізняють точки *розриву 1-го* і *2-го роду*. Розриви 1-го роду бувають усувні й неусувні; розриви 2-го роду — завжди неусувні.

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 2-го роду* для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив усувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$.

Зауваження. Точка $x = x_0$ усувного розриву відзначається тим, що існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, але $f(x_0) \neq A$. Тому на основі функції $f(x)$ можна побудувати функцію

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \neq x_0 \\ A \text{ при } x = x_0 \text{, яка буде неперервною в точці } x = x_0, \end{cases}$$

Методика дослідження функцій на неперервність.

1. Знайти область визначення функції $D(y)$.

2. Дослідити функцію на неперервність у відкритих проміжках $D(y)$.

3. Визначити скінченні граничні точки (с.г.т.) $D(y)$ і обчислити односторонні границі функції у цих точках.

4. Зробити висновок про характер точок розриву (якщо вони є) і побудувати графік функції поблизу цих точок. Для зручності побудови графіка функції рекомендується записати координати граничних точок графіка функції $P_i(x_0 \pm 0;\ y_0 \pm 0)$. Символічний запис абсциси граничної точки $x_0 \pm 0$ означає, що абсциса довільної точки графіка функції прямує до x_0 зліва ($x_0 - 0$) або справа ($x_0 + 0$); а запис $y_0 \pm 0$ означає, що ордината довільної точки графіка функції при цьому прямує до y_0 знизу ($y_0 - 0$) або зверху ($y_0 + 0$). Наприклад, для граничних точок $P_1(2-0;\ +0)$ і $P_2(2+0;\ 1-0)$ графік функції підходить до цих точок так, як показано на рис. 4.

До точки P_1 графік підходить зліва і зверху, а до точки P_2 — справа і знизу.

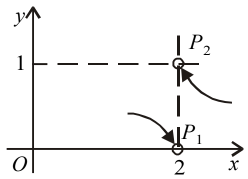

Рис. 4

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Область визначення цієї функції $D = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Скінченною граничною точкою D функції буде $x = 1$. Обчислимо такі границі:

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1-0 (x<1) \\ x-1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \\ 2^{-\infty} \to \dfrac{1}{2^{+\infty}} \to +0 \end{array} \right| = +0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1+0 (x>1) \\ x-1 \to +0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує. Граничні точки графіка функції: P_1 $(1 - 0;\ + 0)$, $P_2(1 + 0;\ + \infty)$. Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву показано на рис. 5. Зауважимо, що гранична точка P_2 $(1 + 0;\ +\infty)$ лежить на нескінченності.

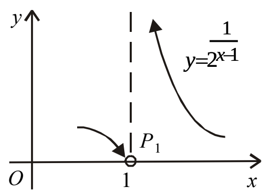

Рис. 5

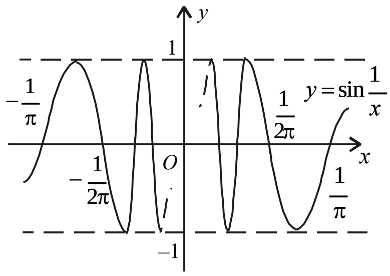

Рис. 6

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y=\sin\frac{1}{x}$.

Ця функція буде неперервною на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$, бо є суперпозицією неперервних елементарних функцій. Границі $\lim\limits_{x\to -0}\sin\frac{1}{x}$ і $\lim\limits_{x\to +0}\sin\frac{1}{x}$ — не існують. Отже, точка $x = 0$ — точка розриву функції 2-го роду.

Записати координати граничних точок графіка функції неможливо, тому і побудувати графік функції $y=\sin\frac{1}{x}$ поблизу самої точки розриву не можна (рис. 6).

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$.

Скорочений запис розв'язування задачі:

$$D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty).$$

$\left.\begin{array}{l} x\in(-\infty;\ 0) \\ x\in(0;\ +\infty)\end{array}\right\rangle y$ — неперервна, як суперпозиція елементарних функцій.

$x = 0$ — с.г.т. $D(y)$.

$$\lim_{x\to -0} y=\lim_{x\to -0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}=\left|\begin{array}{c} x\to -0 \\ x^2\to +0 \\ \frac{1}{x^2}\to +\infty \end{array}\right|=\frac{\pi}{2}-0;$$

$$\lim_{x\to +0} y=\lim_{x\to +0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}=\left|\begin{array}{c} x\to +0 \\ x^2\to +0 \\ \frac{1}{x^2}\to +\infty \end{array}\right|=\frac{\pi}{2}-0.$$

Таким чином, точка $x = 0$ є точкою розриву функції 1-го роду (розрив усувний), бо односторонні границі існують і рівні між собою (сама функція при $x = 0$ не існує).

Граничні точки графіка функції $P_1\left(-0;\ \frac{\pi}{2}-0\right)$ і $P_2\left(+0;\ \frac{\pi}{2}-0\right)$ зливаються в одну точку (рис. 7).

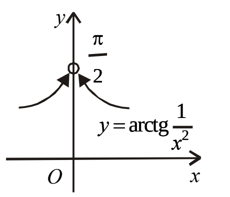

Рис. 7

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = x - \dfrac{x+2}{|x+2|}$.

Після розкриття $|x+2|$ функція перепишеться так:

$$y = \begin{cases} x - \dfrac{x+2}{x+2} & \text{при } x > -2; \\ x + \dfrac{x+2}{x+2} & \text{при } x < -2 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 \text{ при } x > -2; \\ x + 1 \text{ при } x < -2. \end{cases}$$

На кожному з інтервалів $(-\infty;-2)$ і $(-2;+\infty)$ функція неперервна. Розглянемо односторонні границі функції у точці $x = -2$.

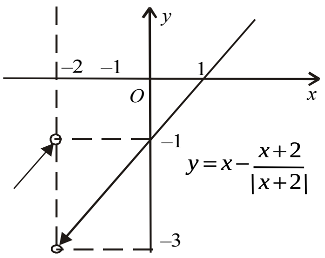

Рис. 8

$$\lim_{x\to -2-0} y = \left| \begin{array}{c} (x \to -2-0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x < -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x+1 \end{array} \right| = \lim_{x\to -2-0}(x+1) = -1-0;$$

$$\lim_{x\to -2+0} y = \left| \begin{array}{c} (x \to -2+0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x > -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x-1 \end{array} \right| = \lim_{x\to -2+0}(x-1) = -3+0.$$

Отже, точка $x = -2$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний), бо односторонні границі функції у цій точці існують, але не рівні між собою.

Граничні точки графіка функції такі: $P_1(-2-0;\ -1-0)$, $P_2(-2+0;\ -3+0)$ (рис. 8).

Зразки розв'язування вправ

Приклад 1. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \dfrac{x}{x-4}$ має розрив.

Знаходимо $\lim\limits_{x\to 4-0} \dfrac{x}{x-4} = -\infty, \lim\limits_{x\to 4+0} \dfrac{x}{x-4} = +\infty.$

Таким чином, функція при $x \to 4$ не має ні правої, ні лівої скінченної границі. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 2-го роду.

Приклад 2. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$ має розрив.

Якщо $x \to 4-0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to -\infty, \lim\limits_{x\to 4-0} y = -\dfrac{\pi}{2}$. Якщо $x \to 4+0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to +\infty, \lim\limits_{x\to 4+0} y = \dfrac{\pi}{2}$. Таким чином, при $x \to 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, причому ці границі різні. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 1-го роду.

Приклад 3. Показати, що при $x = 5$ функція $y = \dfrac{x^2-25}{x-5}$ має розрив.

У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. В інших точках дріб скорочується на $x - 5$, оскільки $x - 5 \neq 0$. Звідси, при $x \neq 5$ $y = x + 5$. Легко показати, що

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 5+0} y = 10.$$

Таким чином, при $x = 5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо домовитися, що при $x = 5$ $y = 10$.

Звідси можна вважати, що функція $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ неперервна при всіх значеннях x, якщо вважати, що рівність $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = x + 5$ справджується при всіх значеннях x, включаючи і саму точку $x = 5$. У цьому випадку графіком функції буде пряма лінія $y = x + 5$.