

2.4 Диференціальне числення функцій однієї змінної

Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a; b)$. Візьмемо значення $x \in (a; b)$ і надамо аргументу приросту Δx . Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.4.1)$$

Якщо границя (2.4.1) існує і скінченна, вона називається *похідною функції* $y = f(x)$ за змінною x і позначається

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій.

Приклад. Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Надамо аргументу x приросту Δx , тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо

границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад. $y = C$, де $c = \text{const}$.

Надавши аргументу x приросту Δx , дістанемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Тепер знайдемо границю відношення $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ тобто } C' = 0$$

Приклад. $y = \sin x$.

Користуючись відомою з тригонометрії формулою

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x;$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад. $y = e^x$.

Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x,$$

тобто $(e^x)' = e^x$.

Геометричний зміст похідної

Означення. Дотичною до кривої L у точці M називається граничне положення MN січної MM_1 при прямуванні точки M_1 по кривій L до точки M (рис. 1).

Нехай крива, задана рівнянням $y = f(x)$, має дотичну в точці $M(x, y)$. Позначимо (рис. 2) кутовий коефіцієнт дотичної MN : $k = \operatorname{tg} \varphi$. Надамо в точці x приросту Δx , тоді ордината y набуде приросту Δy .

З $\triangle MAM_1$ випливає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$. Коли $\Delta x \rightarrow 0$, то $M_1 \rightarrow M$, $\alpha \rightarrow \varphi$ і січна прямує до положення дотичної MN .

Таким чином, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi = k$.

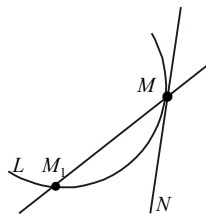


Рис. 1

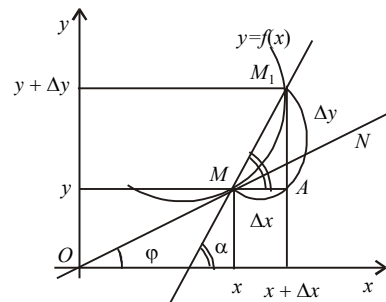


Рис. 2

Оскільки $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то $f'(x) = k$, тобто похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою x . У цьому полягає геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної

Припустимо, що точка M рухається прямолінійно нерівномірно по деякій прямій лінії, яку візьмемо за вісь Ox (рис. 3).

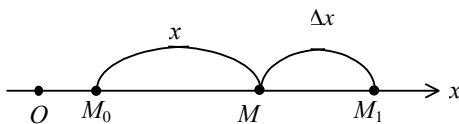


Рис. 3

Рух точки відбувається за законом $x = f(t)$, де x — шлях; t — час. Знайдемо швидкість точки M у даний момент часу t (миттєва швидкість).

Нехай точка M у момент t перебувала на відстані x від початкової точки M_0 , а в момент часу $t + \Delta t$ точка опинилася на відстані $x + \Delta x$ від початкової точки й зайняла положення M_1 . Отже, час t набув приросту Δt , а шлях x — приросту $\Delta x = f(\Delta t + t) - f(t)$.

Середня швидкість руху точки M за час Δt описується формулою $V_{\text{cp}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Якщо точка M рухається рівномірно, то V_{cp} є величина стала, і її беруть за швидкість точки. Для нерівномірного руху точки очевидно, що для достатньо близьких значень Δt до нуля середня

швидкість точки M буде близька до її швидкості у момент часу t . Тому за точне значення швидкості точки M у момент часу t беруть величину

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

яка є швидкістю зміни функції $x = f(t)$ у точці. У цьому полягає механічний зміст похідної.

Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої

Нехай функція $y = f(x)$ означена і неперервна на деякому проміжку $[a; b]$. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a; b]$.

Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0 , то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ у даному напрямі (рис. 4.4):

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (2.4.2)$$

де k кутовий коефіцієнт дотичної. Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$.

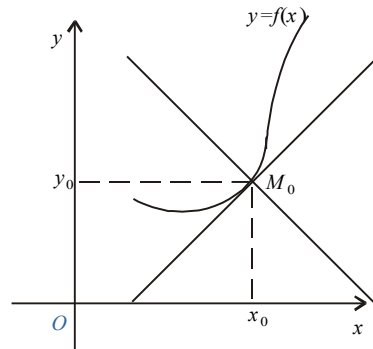


Рис. 4

Рівняння дотичної. Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то з виразу (2.4.2) дістанемо рівняння дотичної у вигляді

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.4.3)$$

Рівняння нормалі. *Означення.* Нормаллю до графіка функції в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці (рис. 4).

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (2.4.4)$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x) = 2x$, звідси $f'(-3) = -6$; $f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Рівняння дотичної (4.3) і нормалі (4.4) запишуться так: $y - 9 = -6(x + 3)$, $y - 9 = \frac{1}{6}(x + 3)$ або у загальному вигляді: $6x + y + 9 = 0$, $x - 6y + 57 = 0$.

Залежність між неперервністю і диференційовністю функції

Функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x , якщо у цій точці $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною на інтервалі $(a; b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці даного інтервалу.

Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції встановлює теорема.

Теорема. Якщо функція диференційовна в деякій точці, то у цій точці функція неперервна.

Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може не існувати похідної.

Справді, нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x . Запишемо тотожність

$$\Delta y = \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} (\Delta x \neq 0), \text{ звідси } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Таким чином, функція $y = f(x)$ неперервна в точці x .

Наслідок. Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.

Прикладом неперервної функції, що не має похідної в одній точці, є функція $y = |x|$ (рис.5).

Ця функція неперервна при $x = 0$, але не диференційовна для цього значення, оскільки в точці з абсцисою $x = 0$ не існує дотичної до графіка функції.

Таким чином, необхідною умовою диференційовності функції $y = f(x)$ у точці x є її неперервність у цій точці.

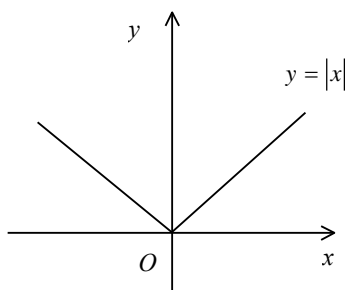


Рис. 5

Основні правила диференціювання

Теорема 1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де $c = \text{const}$, то $y' = 0$.

Теорема 2. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій: $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

Теорема 3. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Теорема 4. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \text{const.}$$

Теорема 5. Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Зауваження. Похідну від функції $y = \frac{u(x)}{c}$, де $c = \text{const}$, зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини $\frac{1}{c}$ на функцію $u(x)$:

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u(x)\right)' = \frac{1}{c}u'(x).$$

Приклад. Обчислити похідну для функції $y = \text{tg } x$.

$$y' = (\text{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким чином, $(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Похідна складної функції. Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається *зовнішньою*, а функція $\varphi(x)$ — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.

Теорема 6. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ — диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Похідна неявної функції. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x . Надалі будемо вважати, що ця функція — диференційовна.

Продиференціювавши за x обидві частини рівняння $F(x; y) = 0$, дістанемо рівняння першого степеня відносно y' . З цього рівняння легко знайти y' , тобто похідну неявної функції.

Приклад. Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

Оскільки y є функцією від x , то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x , тобто $(y^2)' = 2y \cdot y'$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\frac{x}{y}$.

Похідна оберненої функції. Нехай задані дві взаємно обернені диференційовні функції

$$y = f(x) \text{ та } x = \varphi(y) (f(\varphi(y)) = y).$$

Теорема 7. Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x)$: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Приклад. Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.

Задана функція обернена до функції $y = \sin x$.

Згідно з теоремою 7 можна записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

$$\text{Звідси } (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Якщо в останньому виразі замість y записати x , то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Похідна параметрично заданої функції. Нехай функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(t) \end{array} \right\} (t_1 \leq t \leq t_2).$$

Припустимо, що функції $\varphi(t), \Psi(t)$ мають похідні і що функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \Phi(x)$, яка також є диференційовною. Тоді визначену параметричними рівняннями функціональну залежність $y = f(x)$ можна розглядати як складну функцію $y = \Psi(t)$, $t = \Phi(x)$ (t — проміжний аргумент).

На підставі теорем 6 та 7 маємо:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \Psi'_t(t) \Phi'_x(x), \quad \Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

$$\text{Звідки } y'_x = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ або } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Знайдена формула дає можливість знаходити похідну y'_x від параметрично заданої функції, не знаходячи явної залежності $y = f(x)$.

Приклад. Функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{array} \right\} (0 \leq t \leq \pi).$$

Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$: а) при будь-якому t ; б) при $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\bullet \text{ а) } y'_x = \frac{(a \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctg} t;$$

$$\text{б) } (y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Похідні від основних елементарних функцій

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій:

$$1. (x)' = 1;$$

$$2. (x^m)' = mx^{m-1};$$

$$3. (e^x)' = e^x;$$

$$4. (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$5. (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$6. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

7. $(\sin x)' = \cos x$;

8. $(\cos x)' = -\sin x$;

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Продиференціювати подані далі функції.

Приклад. $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо теорему 2:

$$y' = (3x^2)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)'$$

У здобутому виразі перший доданок алгебраїчної суми є добуток сталої величини на степеневу функцію \Rightarrow — застосуємо до нього теорему 4 і формулу (2) таблиці похідних; другий — ірраціональна функція з показником $m = \frac{1}{3}$ — застосуємо формулу (2) таблиці похідних; третій — логарифмічна функція з основою $e \Rightarrow$ — використаємо формулу (5):

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад. $y = 6^{\arcsin(x^5-4)}$.

Задана функція складна: зовнішня — показникова функція з основою 6, внутрішня для неї — обернена тригонометрична. Обернена тригонометрична, у свою чергу, є складною, для якої внутрішня функція — алгебраїчна сума $x^5 - 4$. Для суми аргументом (скінченим) є x .

Таким чином, задана функція є суперпозицією трьох функцій.

При диференціюванні послідовно застосовуємо два рази теорему 6:

$$\begin{aligned} y &= \left[6^{\arcsin(x^5-4)} \right]_{\arcsin(x^5-4)}' \left[\arcsin(x^5-4) \right]_x' = \\ &= \left[6^{\arcsin(x^5-4)} \right]_{\arcsin(x^5-4)}' \left[\arcsin(x^5-4) \right]_{x^5-4}' \left[x^5-4 \right]_x'. \end{aligned}$$

У цьому виразі знизу біля кожної квадратної дужки вказано аргумент, за яким слід диференціювати функцію, взяту в дужки.

Тепер послідовно скористаємося формулами (4), (11), (2) таблиці похідних та теоремами 1, 2. Дістанемо:

$$y' = 6^{\arcsin(x^5-4)} \ln 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^5-4)^2}} \cdot 5x^4.$$

Взагалі використані правила та формули не фіксують, а записують кінцевий результат їх застосування.

Приклад. $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin 4x}$.

Задана функція є степенево-показниковим виразом виду

$$y = (u(x))^{v(x)}, \text{ де } u(x) = \operatorname{tg} 3x, v(x) = \sin 4x. \quad (2.4.5)$$

Прологарифмуємо функцію (4.5) за основою e :

$$\ln y = v \ln u. \quad (2.4.6)$$

Оскільки $\ln y$ і $\ln u$ — складні функції, після диференціювання обох частин рівності (2.4.6) дістанемо:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{1}{u} u' v.$$

$$\text{Звідси } y' = y \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right) = u^v \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right).$$

Таким чином, дістали формулу для знаходження похідної від степенево-показникової функції виду (2.4.5).

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right). \quad (2.4.7)$$

У даному випадку формула (4.7) виглядає як

$$y' = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4 \cos 4x \cdot \ln \operatorname{tg} 3x + \frac{3 \sin 4x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \cos^2 3x} \right).$$

Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається *похідною другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається *похідною третього порядку* і позначається y''' , $f'''(x)$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

Похідна від похідної $(n - 1)$ -го порядку $(y^{(n-1)})'$ називається *похідною n -го порядку* і позначається $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $n = 1, 2, \dots$

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y = \sin(5x + 4)$.

$$y' = 5 \cos(5x + 4); \quad y'' = -25 \sin(5x + 4); \quad y''' = -125 \cos(5x + 4).$$

Зразки розв'язування вправ

Приклад 1. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

Надамо x приросту Δx , тоді y набуде приросту Δy :

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = (2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4) - \\ &- (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) = 6x^2 \Delta x + 6x \Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x \Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x. \end{aligned}$$

За означенням похідної маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x^2 + 6x \Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Приклад 2. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = -\operatorname{ctg}x - x$.

Використовуючи формулу $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$, знаходимо приріст функції:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = -\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - (x + \Delta x) + \operatorname{ctg}x + x = \\ &= \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - \Delta x.\end{aligned}$$

Звідки

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - 1 \right) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Приклад 3. Який кут утворює з віссю Ox дотична до кривої $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$?

Знаходимо похідну $y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$; при $x = 1$, $y' = 3$, таким чином $\operatorname{tg}\alpha = 3$, звідки $\alpha = \operatorname{arctg}3 \approx 71^\circ 34'$.

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

Приклад 4. $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$.

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) \right)' = x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) = 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x - 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x} \ln x.$$

Приклад 5. $y = \sin(2x + 3)$.

$$y' = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2\cos(2x + 3).$$

Приклад 6. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Приклад 7. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \sqrt{x} + \ln \cos \sqrt{x}$.

$$y' = \operatorname{tg}\sqrt{x} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos \sqrt{x}} (-\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg}\sqrt{x} \left(\frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} - 1 \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}.$$

Приклад 8. $y = x^{x^2}$.

Логарифмуючи функцію, дістаємо $\ln y = x^2 \ln x$.

Звідки: $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$,

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x, \quad \frac{y'}{y} = x(1 + 2 \ln x),$$

$$y' = xy(1 + 2 \ln x) = xx^{x^2}(1 + 2 \ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2 \ln x).$$

Приклад 9. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

Маємо: $\ln y = \operatorname{tg} x \ln \sin x$, $\frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x \frac{1}{\sin x} \cos x +$

$$+ \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x = 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x,$$

$$y' = y \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x \right) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x \right).$$

Приклад 10. Знайти похідну y'_x з рівняння $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Продиференціювавши за x обидві частини рівняння, дістанемо $3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y \cdot y' - 2x e^y = 0$.

Звідки $y' = \frac{(2x y e^y - 3x^2)y}{1 - x^2 y e^y}$.

Приклад 11. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці $M_0(1, -1)$.

З рівняння кривої знайдемо похідну:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3 y' = 0, \text{ тобто } y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Таким чином, $y'(1) = f'(1) = -\frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}$.

Рівняння дотичної буде

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1), \text{ або } x - 4y - 5 = 0.$$

Рівняння нормалі

$$y + 1 = -4(x - 1), \text{ або } 4x + y - 3 = 0.$$

Приклад 12. Задано функцію $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Знайти y', y'', y''', \dots .

Маємо: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$,

$$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2, \quad y''' = 60x^2 + 48x - 18,$$

$$y^{(4)} = 120x + 48, \quad y^{(5)} = 120, \quad y^{(6)} = y^{(7)} = \dots = 0.$$

Приклад 13. $y = \ln x$. Знайти $y^{(n)}$.

Маємо: $y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y'' = -1 \cdot x^{-2}$, $y''' = 1 \cdot 2x^{-3}$, $y^{(4)} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}$, ...

$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}.$$

Приклад 14. Знайти y'_x , якщо $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

Знайдемо $x'_t = 3t^2 + 3 = 3(t^2 + 1)$, $y'_t = 15t^2(t^2 + 1) \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{15t^2(t^2 + 1)}{3(t^2 + 1)} = 5t^2$.

Приклад 15. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ в довільній

точці $t \in [-\pi, \pi]$.

Кутовий коефіцієнт дотичної в кожній точці дорівнює значенню похідної y'_x у цій точці:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

\Rightarrow кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди в кожній точці дорівнює $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$, де t — значення параметра, який відповідає цій точці.

Оскільки кутовий коефіцієнт дорівнює тангенсу кута φ нахилу дотичної до осі Ox , то

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}.$$

Диференціал функції однієї змінної

Означення диференціалу функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ існує і дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємозв'язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можемо записати $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де α — нескінченно мала величина ($\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx , дістанемо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \quad (2.4.8)$$

З виразу (4.8) випливає, що приріст функції Δy складається із суми двох доданків, з яких перший доданок — так звана *головна частина приросту*, лінійна відносно Δx (при $\Delta x \rightarrow 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно мала величина першого порядку відносно Δx). Другий доданок — добуток $\alpha\Delta x$ завжди нескінченно мала величина вищого порядку, ніж Δx .

Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається *диференціалом функції* $y = f(x)$; його позначають символом dy , тобто

$$dy = f'(x)\Delta x \quad (2.4.9)$$

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y' = (x)' = 1$, отже, $dy = dx = \Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx . З огляду на це формулу для диференціала (4.9) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \quad (2.4.10)$$

Приклад. Знайти диференціал dy функції $y = x^2$: 1) при довільних значеннях x та Δx ; 2) при $x = 20$, $\Delta x = 0,1$.

1) $dy = (x^2)' \Delta x = 2x\Delta x$;

2) якщо $x = 20$, $\Delta x = 0,1$, то $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 = 4$.

Приклад. Знайти диференціал dy функції $y = x^2 \operatorname{tg}(3x + 1)$.

Оскільки $y' = 2x \operatorname{tg}(3x + 1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x + 1)}$, то за формулою (2.4.10) дістанемо

$$dy = \left(2x \operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)} \right) dx.$$

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Вираз (2.4.8) з урахуванням (2.4.9) можна записати так:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x. \quad (2.4.11)$$

Якщо $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha \Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з dy .

При малих Δx доданком $\alpha \Delta x$ у виразі (2.4.11) нехтують і користуються наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, або в розгорнутому вигляді: $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідки

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (2.4.12)$$

Остання наближена рівність тим точніша, чим менше Δx .

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$$27 = 25 + 2 = 25 \left(1 + \frac{2}{25} \right), \text{ звідки } \sqrt{27} = \sqrt{25 \left(1 + \frac{2}{25} \right)} = 5 \sqrt{1 + \frac{2}{25}}. \quad (2.4.13)$$

При обчисленні $\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула (4.12) у нашому випадку запишеться так:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x, \text{ де } x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}.$$

Інакше

$$\sqrt{1 + \frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1,04. \quad (2.4.14)$$

Підставивши (2.4.14) у рівність (2.4.13), дістанемо

$$\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1,04 = 5,2.$$

Правила знаходження диференціала

Застосовуючи формулу (4.10) та властивості похідних, дістаємо правила знаходження диференціала:

1. $y = c; dy = 0;$
2. $y = uv, dy = u dv + v du;$
3. $y = u + v, dy = du + dv;$
4. $y = \frac{u}{v}, dy = \frac{v du - u dv}{v^2}.$

Теорема. Форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент незалежною змінною або функцією.

Зразки розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = \operatorname{arctg} x$.

$$\text{Маємо: } dy = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Приклад 2. Знайти диференціал функції $s = e^{t^2}$.

Маємо: $ds = e^{t^2} \cdot 2t \cdot dt$.

Приклад 3. Обчислити наближено значення $\arcsin 0,51$.

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Візьмемо $x = 0,5$, $\Delta x = 0,01$ та, застосовуючи формулу $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$, одержимо

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 = 0,513.$$