2.5 Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. **Якщо диференційована на проміжку D функція $y = f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці ξ цього проміжку, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(\xi) = 0$.**

Припустимо, для визначеності, що $f(x)$ набуває в точці ξ найбільшого значення, тобто для всіх $x \in D$ $f(x) \le f(\xi)$.

За означенням похідної

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

причому ця границя не залежить від того, як наближається x до ξ — справа чи зліва.

Розглянемо відношення $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$.

Для всіх x, достатньо близьких до точки $\xi (x \ne \xi)$, маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0 \text{ при } x > \xi, \\ \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0 \text{ при } x < \xi. \end{cases}$$

Перейдемо в останніх нерівностях до границі при $x \to \xi$. Дістанемо

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi + 0} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0 \\ \lim\limits_{x \to \xi - 0} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли функція $f(x)$ набуває в точці $x = \xi$ найменшого значення.

Геометричний зміст теореми Ферма. Геометричний зміст похідної $y' = f'(x)$ являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$. Звідси рівність нулю похідної $f'(\xi)$ геометрично означає, що у відповідній точці цієї кривої дотична паралельна осі Ox.

Теорема Ролля. **Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на сегменті $[a; b]$; 2) диференційовна на інтервалі $(a; b)$; 3) на кінцях сегмента набуває рівних між собою значень, тобто $f(a) = f(b)$, то на інтервалі $(a; b)$ існує хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$, для якої $f'(\xi) = 0$.**

Геометричний зміст теореми Ролля. Якщо крайні ординати неперервної кривої $y = f(x)$, яка має в кожній точці дотичну, рівні, то на цій кривій знайдеться принаймні одна точка з абсцисою $\xi (a < \xi < b)$, в якій дотична паралельна осі Ox (рис.1).

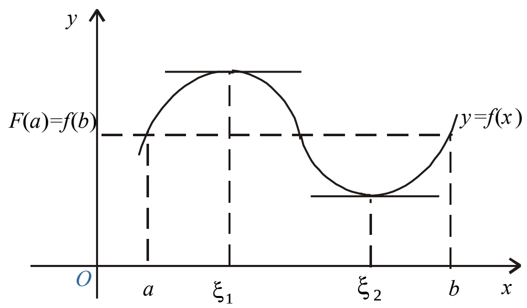

Рис. 1

Теорема Лагранжа **(теорема про скінченні прирости функції).**

Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на сегменті $[a;\ b]$; 2) диференційовна на інтервалі $(a;\ b)$, то на інтервалі знайдеться хоча б одна точка $x=\xi(a<\xi<b)$, така що

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi). \qquad (2.5.1)$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо формулу (2.5.1) у вигляді

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \qquad (2.5.2)$$

З рис. 2 бачимо, що величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ є тангенсом кута α нахилу хорди, що проходить через точки A і B графіка функції $y=f(x)$ з абсцисами a і b.

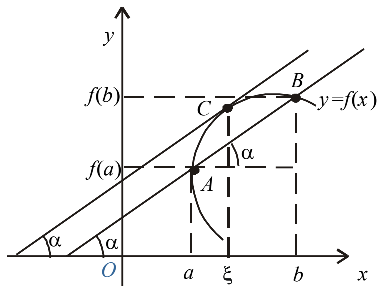

Рис. 2

Водночас, $f'(\xi)$ — тангенс кута нахилу дотичної до кривої у точці C з абсцисою ξ. Таким чином, геометричний зміст рівності (2.5.2) або рівносильної для неї рівності можна визначити так: якщо для всіх точок кривої $y=f(x)$ існує дотична, то на цій кривій знайдеться точка з абсцисою ξ, в якій дотична паралельна хорді AB, що сполучає точки A і B.

Теорема Коші. **Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ дві функції: 1) неперервні на сегменті $[a;\ b]$; 2) диференційовні на інтервалі $(a;\ b)$; 3) $\varphi'(x)\neq 0$ для $x\in(a;b)$, то на інтервалі $(a;\ b)$ знайдеться хоча б одна точка $x=\xi(a<\xi<b)$, така що**

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Зразки розв'язування вправ

Приклад 1. Чи буде виконуватися теорема Ролля для функції $f(x)=x^2-6x+100$, якщо $a=1$, $b=5$? При якому значенні ξ?

Оскільки функція $f(x)$ неперервна та диференційовна на всій числовій прямій і значення функції $f(x)$ на границях сегмента [1, 5] рівні між собою $f(1)=f(5)=95$, то теорема Ролля буде виконуватись на інтервалі (1, 5). Значення ξ визначаємо з рівняння $f'(x)=2x-6=0$, тобто $\xi=3$.

Приклад 2. Знайти координати точки M на дузі AB кривої $y = 2x - x^2$, в якій дотична паралельна хорді AB, якщо A (1; 1) та B (3; –3).

Функція $y = 2x - x^2$ неперервна та диференційовна при всіх значеннях x. За теоремою Лагранжа між двома значеннями a = 1 та b = 3 існує значення $x = \xi$, яке задовольняє рівності $y(b) - y(a) = (b - a)y'(\xi)$, де $y' = 2 - 2x$. Підставимо дані умови задачі: $y(3) - y(1) = (3 - 1)y'(\xi)$, тобто $\left(2 \cdot 3 - 3^2\right) - \left(2 \cdot 1 - 1^2\right) = (3 - 1) \cdot (2 - 2\xi)$. Звідки $\xi = 2, y(2) = 0$. Таким чином, точка M має координати (2; 0).

Правило Лопіталя

Розглянемо відношення $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені й диференційовні в деякому околі точки a, виключаючи, можливо, саму точку a. Може бути, що при $x \to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞, тобто ці функції одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими величинами при $x \to a$. Тоді говорять, що в точці a функція f (x) має невизначеність виду

$$\left[\frac{0}{0}\right] \text{або} \left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \qquad (2.5.3)$$

У цьому випадку, використовуючи похідні $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$, можна сформулювати правило для знаходження границі функції f (x) при $x \to a$, тобто визначити спосіб для розкриття невизначеностей виду (4.17).

Теорема (правило Лопіталя). **Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує.**

Зауваження. Якщо $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$ при $x \to a$ прямують одночасно до 0 або до ∞ і задовольняють ті умови, які були накладені теоремою на функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то до відношення $\varphi'(x)/\psi'(x)$ знову застосовуємо правило Лопіталя і виводимо формулу

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$$

і т. п.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 7x)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{7\cos x}{2} = \frac{7}{2}.$$

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 7x + 5}$.

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x+3\right)'}{\left(6x^2+7\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0\,.$$

Перетворення невизначеностей виду

$[0\cdot\infty]$; $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $[\infty-\infty]$ до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Нехай $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$.

Потрібно знайти

$$\lim_{x\to a}\left(u(x)\cdot v\cdot(x)\right). \qquad (2.5.4)$$

Це невизначеність типу $[0\cdot\infty]$.

Якщо вираз (4.18) записати у вигляді

$$\lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{u}{\frac{1}{v}} \text{ або } \lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при $x\to a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Невизначеність вигляду $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$. Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$.

При $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u\to 0,\ v\to 0$ маємо невизначеність виду $\left[0^0\right]$;

б) $u\to\infty,\ v\to 0$ дістанемо невизначеність $\left[\infty^0\right]$;

в) $u\to 1,\ v\to\infty$ маємо невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $[0\cdot\infty]$. Справді, позначимо дану функцію через y, тобто візьмемо $y=u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y=v\ln u(u>0)$.

Легко перевірити, що при $x \to a$ добуток $v \ln u$ буде невизначеністю $[0 \cdot \infty]$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $[0 \cdot \infty]$, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{x \to a} \ln y = k$ (k — скінченне або ∞).

Звідси $\lim\limits_{x \to a} y = \lim\limits_{x \to a} u^v = e^k$.

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^x$.

Це невизначеність виду $[0^0]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y = (\sin x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin x \left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^x = e^0 = 1$.

Приклад 7. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

При $x \to 1$ маємо невизначеність $[1^\infty]$.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}}, \quad \ln y = \frac{\ln x}{x-1}; \quad \lim_{x \to 1} \ln y = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

Невизначеність $[\infty - \infty]$. Якщо функції $u(x) \to \infty$, $v(x) \to \infty$ при $x \to a$ (a — скінченне або нескінченне), то різниця $u - v$ при $x \to a$ дає невизначеність $[\infty - \infty]$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 8. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$.

Маємо невизначеність виду $[\infty - \infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$