ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Приклад 1. Дана система лінійних алгебраїчних рівнянь. Довести її сумісність і знайти загальний розв'язок трьома методами: за формулами Крамера; методом матричного числення; методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$$

Розв'язання.

Доведемо сумісність системи. Для цього запишемо матрицю A і розширену матрицю B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right).$$

Обчислимо ранг матриці A і ранг матриці B. Для цього знайдемо значення мінорів другого і третього порядків матриць A і B. Оскільки мінори третього порядку матриць A і B відмінні від нуля, то r(A)=r(B)=3.

Отже, система рівнянь є сумісною.

Знайдемо розв'язок системи за **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Обчислимо визначники третього порядку:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot(-1)\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot 0 - 4\cdot(-1)\cdot(-2) - 3\cdot 1\cdot(-1) = 5 \neq 0.$$

Отже, головний визначник системи рівнянь відмінний від нуля. За правилом Крамера така система має єдиний розв'язок, знайдемо його. Для цього утворимо і обчислимо ще три визначники, які утворені з головного визначника заміною відповідного стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 0 - 0 + 1 - 4 = 5, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 0 - 0 + 12 + 8 = 10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 2 - 2 - 3 + 8 = -5.$$

За правилом Крамера маємо розв'язки:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1.$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ — єдиний розв'язок.

Запишемо систему в **матричному вигляді** $AX = B$, де

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -4\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot B,\quad \text{де}\quad A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Для матриці *A* знайдемо обернену.

Матриця А невироджена, оскільки $\Delta(A)=5\neq 0$, і, отже існує обернена. Система рівнянь має єдиний розв'язок.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці А:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Тоді обернена матриця має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\\ 2-\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\\ 0-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$ — розв'язок системи.

Знайдемо розв'язок даної системи **методом Гаусса**. Для цього запишемо розширену матрицю В і виконаємо над нею елементарні перетворення.

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 4 & -4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 5 & -5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right).$$

$$\begin{cases}x_1-\frac{1}{3}x_2=\frac{1}{3},\\ x_2+3x_3=-1,\\ x_3=-1.\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 2=1,\\ x_2=-1-3x_3=-1-3\cdot(-1)=2,\\ x_3=-1.\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1=1,\\ x_2=2,\\ x_3=-1.\end{cases}$$

Отже, розв'язок системи: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$.

Приклад 2. Задані координати вершин піраміди A_1, A_2, A_3, A_4. Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ на напрям вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
6) рівняння площини $A_1A_2A_3$ та кут між нею і ребром A_1A_4;
7) кут між гранями $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$;
8) рівняння і довжину висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}=(-4;5;-3)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(-4;0;2)$, $\overrightarrow{A_1A_4}=(-3;3;-5)$. Тоді

1) Довжина ребра A_1A_2 дорівнює $A_1A_2=\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

2) Нехай φ – кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4, тоді $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$.

$$\cos\varphi=\frac{-4\cdot(-3)+5\cdot 3+(-3)\cdot(-5)}{\sqrt{(-4)^2+(5)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}}=\frac{42}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{43}}\approx 0{,}9058.$$

Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 приблизно дорівнює $\varphi\approx\arccos 0{,}9058\approx 25^0$.

3) Проекція вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ на напрям вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$ дорівнює

$$\text{пр}_{\overrightarrow{A_1A_4}}\overrightarrow{A_1A_2}=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{-4\cdot(-5)+5\cdot 3+(-3)\cdot(-5)}{\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}}=\frac{42}{\sqrt{43}}.$$

4) Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ та $\overrightarrow{A_1A_3}$: $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$.

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 5 & -3\\ -4 & 0 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-4 & -3\\ -4 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -4 & 0\end{vmatrix}=10\vec{i}+20\vec{j}+20\vec{k},$$

тоді $S_{A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10^2+20^2+20^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{900}=\dfrac{30}{2}=15$ (кв. од.).

5) Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ дорівнює шостій частині модуля мішаного добутку трьох векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ та $\overrightarrow{A_1A_4}$: $V_{A_1A_2A_3A_4}=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$.

Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}-4 & 5 & -3\\ -4 & 0 & 2\\ -3 & 3 & -5\end{vmatrix}=0+(-30)+36-0-(-24)-100=-70,$$

тоді $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|-70\right| = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$ (куб. од.).

6) Скласти рівняння площини $A_1A_2A_3$ та знайти кут між площиною $A_1A_2A_3$ і ребром A_1A_4.

Складемо рівняння площини $A_1A_2A_3$, що проходить через 3 точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ 0-4 & 7-2 & 2-5 \\ 0-4 & 2-2 & 7-5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + (z-5)\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$10\cdot(x-4) + 20\cdot(y-2) + 20\cdot(z-5) = 0,$$

$$10x + 20y + 20z - 180 = 0,$$

$$x + 2y + 2z - 18 = 0.$$

Звідси знаходимо координати вектора нормалі площини $A_1A_2A_3$: $\vec{n} = (1;\, 2;\, 2)$.

Нехай α – кут між ребром A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$, тоді $\sin\alpha = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$.

$$\sin\alpha = \frac{\left|1\cdot(-3) + 2\cdot 3 + 2\cdot(-5)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}} = \frac{\left|-7\right|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{43}} = \frac{7}{\sqrt{387}} \approx 0{,}3558.$$

Кут між ребром A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$ приблизно дорівнює $\alpha \approx \arcsin 0{,}3558 \approx 21^0$.

7) Нехай β – кут між гранями $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$, тоді $\cos\beta = \dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}$.

Координати вектора нормалі площини $A_1A_2A_3$: $\vec{n}_1 = (1;\, 2;\, 2)$.

Складемо рівняння площини $A_1A_2A_4$.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ 0-4 & 7-2 & 2-5 \\ 1-4 & 5-2 & 0-5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + (z-5)\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$-16\cdot(x-4) - 11\cdot(y-2) + 3\cdot(z-5) = 0,$$

$$-16x - 11y + 3z + 71 = 0,$$

$16x + 11y - 3z - 71 = 0.$

Звідси знаходимо координати вектора нормалі площини $A_1A_2A_4$: $\overrightarrow{n_2} = (16; 11; -3)$.

Отже,

$$\cos\beta = \frac{1\cdot 16 + 2\cdot 11 + 2\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{16^2+11^2+(-3)^2}} = \frac{16+22-6}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{386}} = \frac{32}{\sqrt{3474}} \approx 0{,}5429,$$

$\beta \approx \arccos 0{,}5429 \approx 57^0.$

8) Скласти рівняння і знайти довжину висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Оскільки висота піраміди, опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ перпендикулярна до $A_1A_2A_3$, то $\vec{n} = \vec{s} = (1; 2; 2)$ і рівняння висоти має вигляд: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{l}$. Тоді

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{2}.$$

Довжина висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$, знайдемо як відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1\cdot 1 + 2\cdot 5 + 2\cdot 0 - 18|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|-7|}{3} = \frac{7}{3} \text{ (од. довж.)}$$

Приклад 3. Складти канонічні рівняння:

а) еліпса, якщо $b = 15$, $F(-10;0)$;

б) гіперболи, якщо $a = 13$, $\varepsilon = \frac{14}{13}$;

в) параболи, якщо рівняння директриси $x = -4$.

Розв'язання.

а) Рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

За умовою задачі $b = 15$, $c = 10$, *бо* F(-10;0).

Тоді $a^2 = b^2 + c^2 = 225 + 100 = 325.$

Отже, $\frac{x^2}{325} + \frac{y^2}{225} = 1.$

б) Рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

За умовою задачі $a = 13$, $\varepsilon = \frac{14}{13}$.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $c = \varepsilon \cdot a = \frac{14}{13}\cdot 13 = 14,$

$c^2 = a^2 + b^2$, $b^2 = c^2 - a^2 = 196 - 169 = 27.$

Отже, $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{27} = 1.$

в) Рівняння параболи $y^2 = 2px$.

Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$, за умовою $x = -4$, *тоді* $-\frac{p}{2} = -4$, $p = 8.$

Отже, $y^2 = 2\cdot 8\cdot x = 16x.$

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x-2y-7=0$ і $x+3y-6=0$, і відтинає на осі абсцис відрізок рівний 1.

Розв'язання.

Знайдемо точку перетину прямих, розв'язавши систему

$$\begin{cases}3x-2y-7=0,\\ x+3y-6=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}3(6-3y)-2y-7=0,\\ x=6-3y.\end{cases}$$

$$18-9y-2y-7=0,$$

$$-11y+11=0,$$

$$y=1,\quad x=6-3=3.\quad A(3;1).$$

Рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Пряма проходить через точку A і відтинає на осі абсцис відрізок рівний 1, тобто $a=1$. Тоді

$$\frac{3}{1}+\frac{1}{b}=1,\quad \frac{1}{b}=1-3=-2,\quad b=-\frac{1}{2}.$$

Отже, $x-2y=1$.

Приклад 5. Знайти область визначення функції $y=\frac{\ln(1+x)}{x-1}$.

Розв'язання.

Функція визначена, якщо $\begin{cases}x-1\neq 0,\\ 1+x>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 1,\\ x>-1.\end{cases}$

Таким чином, областю визначення функції є: $x\in(-1;\,1)\cup(1;\,+\infty)$.

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання.

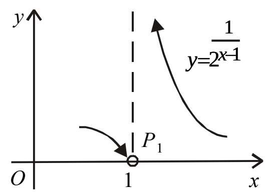
Знайдемо область визначення функції: $x-1\neq 0,\quad x\neq 1$.

Отже, $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Скінченною граничною точкою D функції буде $x=1$. Обчислимо лівосторонню та правосторонню границі:

$$\lim_{x\to 1-0}y=\lim_{x\to 1-0}2^{\frac{1}{x-1}}=\left|\begin{array}{l}x\to 1-0(x<1)\\ x-1\to -0\\ \frac{1}{x-1}\to-\infty\\ 2^{-\infty}\to\frac{1}{2^{+\infty}}\to+0\end{array}\right|=+0;\qquad \lim_{x\to 1+0}y=\lim_{x\to 1+0}2^{\frac{1}{x-1}}=\left|\begin{array}{l}x\to 1+0(x>1)\\ x-1\to +0\\ \frac{1}{x-1}\to+\infty\\ 2^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty\end{array}\right|=+\infty.$$

Отже, $x=1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує. Граничні точки графіка функції: $P_1(1-0;\,+0)$, $P_2(1+0;\,+\infty)$. Зауважимо, що гранична точка $P_2(1+0;\,+\infty)$ лежить на нескінченності. Графік функції $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву зображено на рисунку.



Приклад 7. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$.

Розв'язання.

$$а)\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-5}{5x^2-x-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left|\begin{array}{c}\text{поділимо чисельник і знаменник}\\ \text{на старший степінь } x\text{, тобто } x^2\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{5}{x}-\frac{5}{x^2})}{x^2(5-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{5}{x^2}}{5-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{5}.$$

$$б)\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{c}\text{розкладемо на множники чисельник}\\ \text{та знаменник дробу}\end{array}\right|=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

$$в)\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{c}\text{домножимо чисельник і знаменник дробу}\\ \text{на спряжений вираз до виразу } \sqrt{x-1}-2\end{array}\right|=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

$$г)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos5x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\right|=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=\left|\begin{array}{c}\text{скористаємось першою визначною}\\ \text{границею} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1\end{array}\right|=$$

$$=2\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=2\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

$$д)\lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{l}1-x=y\\ x=1-y\\ x\to1\\ y\to0\end{array}\right|=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

$$е)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to\infty}(3x+4)=\infty\end{array}\right|=\{1^\infty\}=\left|\begin{array}{c}\text{скористаємось другою визначною}\\ \text{границею} \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}\cdot\frac{5}{x}\cdot(3x+4)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{15x+10}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x+10}{x}}=e^{15}.$$

Приклад 8. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ даних функцій:

а) $y = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ і знайти $y'(1)$;   б) $y = \arcsin\sqrt{x}$ і знайти $y'\left(\frac{1}{2}\right)$;

в) $y = (x^3 + 2)e^{4x+3}$;   г) $y = \frac{\arccos x}{2^x}$;   д) $y = (x+1)^{\ln x}$;

е) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;   є) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

Розв’язання.

а) $y' = \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$, $y'(1) = \frac{3}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{1} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

б) $y' = (\arcsin\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1.$

в) $y' = \left(\left(x^3 + 2\right) \cdot e^{4x+3}\right)' = (x^3 + 2)' \cdot e^{4x+3} + (e^{4x+3})' \cdot (x^3 + 2) = 3x^2 e^{4x+3} + 4(x^3 + 2)e^{4x+3} =$
$= e^{4x+3}(3x^2 + 4x^3 + 8)$;

г) $y' = \left(\frac{\arccos x}{2^x}\right)' = \frac{(\arccos x)' 2^x - (2^x)'(\arccos x)}{\left(2^x\right)^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2^x - \left(2^x \ln 2\right) \cdot \arccos x}{2^{2x}} =$

$\frac{-\frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}} - 2^x\left(\arccos x\right)\ln 2}{2^{2x}} = \frac{-1 - \left(\arccos x\right)\sqrt{1-x^2}\,\ln 2}{2^x\sqrt{1-x^2}}$;

д) $y = (x+1)^{\ln x}$.

Прологарифмуємо:

$\ln y = \ln(x+1)^{\ln x}$,

$\ln y = \ln x \cdot \ln(x+1)$, $y = y(x)$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x}\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\ln x$,

$y' = y\left(\frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{\ln x}{x+1}\right)$, $\Rightarrow$ $y' = (x+1)^{\ln x}\left(\frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{\ln x}{x+1}\right)$.

е) $(x^3 + y^3 - 3xy)' = 0'$,

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - (3y + 3xy') = 0$,

$3y^2 y' - 3xy' = 3y - 3x^2$,

$y'(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$,

$y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$.

є) Функцію задано параметричними рівняннями, тому $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Знайдемо $x'_t = 3t^2 + 3 = 3\left(t^2 + 1\right)$, $y'_t = 15t^2\left(t^2 + 1\right)$. Отже, $y'_x = \frac{15t^2\left(t^2 + 1\right)}{3\left(t^2 + 1\right)} = 5t^2$.

Приклад 9. Знайти границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\ln(1-\sin^2 x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{ctg^2 x}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos 2x\right)'}{\left(\ln\left(1-\sin^2 x\right)\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{\dfrac{-2\sin x\cos x}{1-\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\left(1-\sin^2 x\right)}{-\sin 2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(1-\sin^2 x\right)}{-1}=-2$.

б) Маємо невизначеність типу $\left\{1^\infty\right\}$. Введемо позначення $y=\cos x^{ctg^2 x}$. Тоді $\ln y = ctg^2 x \ln\cos x$ є невизначеністю типу $\left\{\infty\cdot 0\right\}$. Представимо вираз $\ln y$ у вигляді $\dfrac{\ln\cos x}{tg^2 x}$, знайдемо границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2tgx\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x}{2}=-\frac{1}{2}.$$

$\ln y=-\dfrac{1}{2}$, $y=e^{-\frac{1}{2}}$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{ctg^2 x}=e^{-\frac{1}{2}}$.

Приклад 10. Дослідити на екстремум функцію $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

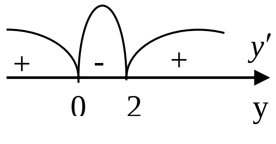
Розв'язання.

Функція визначена при $x\neq 0$. Таким чином, областю визначення функції є: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Знайдемо першу похідну.

$$y'=\frac{\left(x^3+4\right)'\cdot x^2-\left(x^2\right)'\cdot\left(x^3+4\right)}{\left(x^2\right)^2}=\frac{3x^4-2x^4-8x}{x^4}=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}.$$

$y'=0$ при $x^3-8=0$; звідси $x=2$ (стаціонарна точка); y' не існує $\left(y'=\infty\right)$ при $x\neq 0$.



При $x=2$ функція має мінімум: $y_{\min}(2)=\dfrac{2^3+4}{2^3}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{4}{3}$.

У критичній точці $x=0$ екстремуму немає, бо за означенням точками екстремуму можуть бути лише внутрішні точки області визначення функції.

Приклад 11. Знайти асимптоти кривої $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

Розв'язання.

Функція визначена при $\begin{cases} \dfrac{x^3}{x-2} \ge 0, \\ x-2 \ne 0. \end{cases}$ Таким чином, областю визначення функції є: $(-\infty, 0)$ та $(2, +\infty)$.

Із-за того, що $\lim\limits_{x \to 2+0} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}} = +\infty$, пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою кривої.

Визначимо тепер існування похилих асимптот: $y = kx + b$.

1) $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x/(x-2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1/\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = 1;$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - k_1 x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right)} = 1.$$

2) $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{(-x)^3}{2-x}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}{x} = -\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{x}}} = -1;$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - k_2 x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}\left(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}\right)} = -1.$$

Таким чином, існують права $y = x+1$ та ліва $y = -x-1$ похилі асимптоти кривої.

Отже, $x = 2$ – вертикальна асимптота, $y = x+1$, $y = -x-1$ – похилі асимптоти.

Приклад 12. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Розв’язання.

Область визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо похідні першого та другого порядків функції.

$y' = \left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$,

$y'' = \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right)' = (-2x)' e^{-x^2} + \left(e^{-x^2}\right)'(-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = 4e^{-x^2}\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right) = 4\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли $x^2 - \dfrac{1}{2} = 0$, звідки $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Визначимо знак другої похідної. Результати дослідження заносимо в таблицю:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак.

Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції. Графік функції на інтервалах $\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

Приклад 13. Дослідити функцію і побудувати графік $x=\frac{2t}{1+t^3},\qquad y=\frac{2t^2}{1+t^{3.}}$.

Розв'язання.

1. Область визначення. Функції $x(t)$ і $y(t)$ визначені при всіх значеннях t, крім $t=-1$.

$$\lim_{t\to -1-0} x(t)=\lim_{t\to -1-0}\frac{2t}{1+t^3}=+\infty, \qquad \lim_{t\to -1-0} y(t)=\lim_{t\to -1-0}\frac{2t^2}{1+t^3}=+\infty.$$

$$\lim_{t\to -1+0} x(t)=\lim_{t\to -1+0}\frac{2t}{1+t^3}=-\infty, \qquad \lim_{t\to -1+0} y(t)=\lim_{t\to -1+0}\frac{2t^2}{1+t^3}=+\infty.$$

2. Точки перетину з осями координат

$$x=0,\qquad \frac{2t}{1+t^3}=0 \quad\Rightarrow\quad t=0,\qquad y(0)=0.$$

Графік проходить через початок координат. Крім того $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)=0,\qquad \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t)=0$.

3. Проміжки зростання, спадання. Точки екстремуму.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\qquad x'(t)=2\frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2},\qquad y'(t)=2\frac{\left(2-t^3\right)t}{\left(1+t^3\right)^2},\qquad y'_x=\frac{\left(2-t^3\right)t}{1-2t^3}.$$

одержуємо критичні значення t: $t_1=-1;\quad t_2=0;\quad t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\quad t_4=\sqrt[3]{2}.$

Досліджуємо знак похідної $\frac{dy}{dx}$ зліва і справа від кожної з критичних точок:

$$-\infty<t<-1;\quad 0<x<+\infty,\quad -\infty<y<0;\quad \frac{dy}{dx}<0 \text{ (функція спадна)};$$

$$-1<t<0;\quad -\infty<x<0,\quad 0<y<+\infty;\quad \frac{dy}{dx}<0 \text{ (функція спадна)};$$

$$0<t<\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\quad 0<x<\frac{2}{3}\sqrt[3]{4},\quad 0<y<\frac{2}{3}\sqrt[3]{2};\quad \frac{dy}{dx}>0 \text{ (функція зростає)};$$

при t=0 - мінімум $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<t<\sqrt[3]{2};\quad \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}<x<\frac{2}{3}\sqrt[3]{4},\quad \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}<y<\frac{2}{3}\sqrt[3]{4};\quad \frac{dy}{dx}<0$ (спадання);

при $t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ - максимум; і $\sqrt[3]{2}<t<+\infty;\quad 0<x<\frac{2}{3}\sqrt[3]{2},\quad 0<y<\frac{2}{3}\sqrt[3]{4};\quad \frac{dy}{dx}>0$ (зростання);

Далі маємо:

$$\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=0.\quad (x=0, y=0);\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}=\infty\quad (x=0, y=0).$$

Початок координат графік перетинає двічі, з дотичною, паралельною осі Ox, і з дотичною, паралельною осі Oy.

$$\lim_{t\to t_3}\frac{dy}{dx}=\infty \qquad (x=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}, \qquad y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{2});$$ (дотична вертикальна);

$$\lim_{t\to t_4}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (x=\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}, \qquad y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4});$$ (дотична горизонтальна).

4. Асимптоти.

Рівняння асимптоти шукаємо у вигляді: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1-0}\frac{\frac{2t^2}{1+t^3}}{\frac{2t}{1+t^3}}=\lim_{t\to-1-0}t=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to-1-0}\left(\frac{2t^2}{1+t^3}+\frac{2t}{1+t^3}\right)=\lim_{t\to-1-0}\frac{2t(t+1)}{t^3+1}=\lim_{t\to-1-0}\frac{2t}{t^2-t+1}=-\frac{2}{3}.$$

Отже, асимптотою є пряма $y=-x-\frac{2}{3}$.

При $x\to-\infty$, також одержуємо $k=-1, \qquad b=-\frac{2}{3}$.

5. Побудова графіка функції.