

Приклади розв'язання задач

28. Скласти рівняння площини якщо:

а) площина проходить через точку $A(-3; 7; 2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$, якщо $B(3; 5; 1)$, $C(4; 5; 3)$;

б) площина проходить через точки $M_1(3; 3; -1)$ та $M_2(5; -4; 2)$ паралельно осі Oy .

► а) Вектор $\overrightarrow{BC} = (1; 0; 2)$ є нормальним вектором даної площини. Тому запишемо шукане рівняння як рівняння площини, що проходить через точку $A(-3; 7; 2)$ перпендикулярно заданому вектору $\vec{n} = (1; 0; 2)$,

$$1 \cdot (x + 3) + 0 \cdot (y - 7) + 2 \cdot (z - 2) = 0, \text{ звідси } x + 2z - 1 = 0. \blacktriangleleft$$

► б) Зауважимо, що вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; -7; 3)$ належить даній площині, отже, паралельний до неї, а за напрямний вектор осі Oy можна взяти вектор $\vec{j} = (0; 1; 0)$. Запишемо рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3; 3; -1)$ паралельно векторам $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\vec{j}$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z+1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{звідси } -3(x-3) - 0 \cdot (y-3) + 2 \cdot (z+1) = 0, \quad 3x - 2z - 11 = 0. \blacktriangleleft$$

29. Обчислити об'єм піраміди, яку відтинає площина $7x + 4y - 14z - 28 = 0$ від координатного кута.

► Перейдемо від загального рівняння площини $7x + 4y - 14z - 28 = 0$, до рівняння площини у відрізках. Запишемо дане рівняння у вигляді $7x + 4y - 14z = 28$ і поділимо його на 28. Отримаємо $\frac{x}{4} + \frac{y}{7} - \frac{z}{2} = 1$. Як відомо об'єм піраміди $V = abc / 6$. У нашому випадку

$$a = 4, \quad b = 7, \quad c = 2, \text{ тому } V = 4 \cdot 7 \cdot 2 / 6 = 28 / 3 \text{ (куб. од.)}. \blacktriangleleft$$

30. Знайти відстань від точки $M_0(1; -6; -5)$ до площини, яка проходить через три точки $M_1(-1; 2; -3)$, $M_2(4; -1; 0)$, $M_3(2; 1; -2)$.

► Складемо рівняння площини, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3 , і зведемо його до загального рівняння

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 4+1 & -1-2 & 0+3 \\ 2+1 & 1-2 & -2+3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{звідси } 0 \cdot (x+1) + 4 \cdot (y-2) + 4 \cdot (z+3) = 0, \quad y + z + 1 = 0.$$

Отже, відстань від $M_0(1; -6; -5)$ до площини $y + z + 1 = 0$ складе

$$d = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot (-6) + 1 \cdot (-5) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}. \blacktriangleleft$$

31. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь Oz та точку $M_0(-3; 1; -2)$.

► Рівняння площини, яка проходить через вісь Oz , $Ax + By = 0$. Тут обов'язково $A \neq 0$, бо інакше площина не проходила б через точку $M_0(-3; 1; -2)$. Поділивши обидві частини рівняння на A , дістанемо $x + B/A y = 0$.

Так як шукана площина проходить через точку $M_0(-3; 1; -2)$, то її координати задовольняють рівняння цієї площини, тобто $-3 + B/A = 0$, звідси $B/A = 3$.

Отже, $x + 3y = 0$ – рівняння шуканої площини. $\blacktriangleleft$

32. Знайти кут між площинами $5x + 9y - 3z - 1 = 0$ та $3x - y + 2z + 15 = 0$.

► Кут між площинами знаходимо з формули

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|5 \cdot 3 + 9 \cdot (-1) - 3 \cdot 2|}{\sqrt{5^2 + 9^2 + (-3)^2} \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleleft$$

33. Пряма задана загальними рівняннями: $\begin{cases} x - 5y - 2z + 2 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases}$ Записати канонічні та

параметричні рівняння цієї прямої.

► Напрямний вектор цієї прямої є перпендикулярним до нормальних векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ площин, які задають загальні рівняння прямої. Тоді $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, де $\vec{n}_1 = (1; -5; -2)$, $\vec{n}_2 = (1; -1; -1)$, тобто

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Виберемо довільну точку, що лежить на прямій, розв'язавши систему рівнянь. Нехай $x = 1$

, тоді $\begin{cases} -5y - 2z = -3, \\ -y - z = 0, \end{cases} \quad y = -z, \quad 3z = -3, \quad z = -1, \quad y = 1$. Записуємо шукані канонічні рівняння

прямої, що проходить через точку $M_0(1; 1; -1)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (3; -1; 4)$,

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{4}.$$

Від канонічних рівнянь прямої легко переходимо до її параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = -1 + 4t. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

34. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-3; -5; 6)$, $B(-3; 1; -4)$.

► Рівняння прямої запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки,

$$\frac{x+3}{-3+3} = \frac{y+5}{1+5} = \frac{z-6}{-4-6}, \quad \frac{x+3}{0} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-6}{-10}.$$

З отриманих рівнянь бачимо, що пряма паралельна осі Ox . ◀

35. Знайти кут між прямими

$$\begin{cases} 3x + y - 5z + 2 = 0, \\ 2x + 3y - 8z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = 3t. \end{cases}$$

► Бачимо, що для другої прямої напрямний вектор $\vec{s}_2 = (-1; -2; 3)$. Направний вектор першої прямої знаходимо із формули

$$\vec{s}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 14\vec{j} + 7\vec{k}. \text{ Тоді}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|7 \cdot 1 + 14 \cdot (-2) + 3 \cdot 7|}{\sqrt{7^2 + 14^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 7^2}} = 0.$$

Отже, кут між прямими складає $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто дані прямі перпендикулярні. ◀

36. Знайти проекцію точки $M(2; -2; 3)$ на площину $2x - 3y + z + 1 = 0$.

► Проекцією точки M на площину буде основа перпендикуляра проведеного з цієї точки на площину. Отже, шукану проекцію знаходимо як точку перетину заданої площини прямою, проведеною через M перпендикулярно площині. В якості напрямного вектора цієї прямої можемо взяти нормальний вектор $\vec{n} = (2; -3; 1)$ площини. Записавши канонічні

рівняння прямої $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{1}$, перейдемо до параметричних рівнянь $x = 2 + 2t$,

$y = -2 - 3t$, $z = 3 + t$. Знайдемо значення параметра t , яке відповідає проекції P .

Координати точки P повинні задовольняти рівнянню площини, тобто

$2 \cdot (2 + 2t) - 3 \cdot (-2 - 3t) + 3 + t + 1 = 0$, звідки $14t = -14$, $t = -1$. Тоді $x = 2 + 2 \cdot (-1) = 0$, $y = -2 - 3 \cdot (-1) = 1$, $z = 3 - 1 = 2$. Отже, $P(0; 1; 2)$ – проекція точки $M(2; -2; 3)$ на площину $2x - 3y + z + 1 = 0$. ◀

37. Задано піраміду з вершинами $A(2; -1; 0)$, $B(5; 5; 3)$, $C(3; 2; -2)$, $D(4; 1; 2)$. Знайти:

- а) рівняння прямої, що проходить через точки A і B ;
- б) рівняння площини, що проходить через точки A, B, C ;
- в) рівняння висоти опущеної з вершини D на грань ABC та її довжину;
- г) кут α між ребрами AB і AD ;
- д) кут β між ребром AD і гранню ABC .

► а) Рівняння прямої, що проходить через точки $A(2; -1; 0)$ і $B(5; 5; 3)$, є таким

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y+1}{5+1} = \frac{z-0}{3-0}, \quad \text{звідси} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{3},$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}; \quad \blacktriangleleft$$

► б) Рівняння площини, що проходить через точки A, B, C , має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-0 \\ 5-2 & 5+1 & 3-0 \\ 3-2 & 2+1 & -2-0 \end{vmatrix} = 0, \quad 7x - 3y - z + 11 = 0. \quad \blacktriangleleft$$

► в) Нормальний вектор $\vec{n} = (7; -3; -1)$ площини грані ABC є напрямним вектором висоти, тому канонічні рівняння висоти матимуть вигляд

$$\frac{x-4}{7} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{-1}.$$

Довжину висоти обчислимо як відстань від точки D до площини $7x - 3y - z + 11 = 0$

$$d = \frac{|7 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 11|}{\sqrt{7^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{33}{\sqrt{59}} \text{ (лін. од.)}. \quad \blacktriangleleft$$

► г) Кут α між ребрами AB і AD знаходимо як кут між векторами $\overrightarrow{AB} = (3; 6; 3)$ та $\overrightarrow{AD} = (2; 2; 2)$

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{24}{18\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \alpha = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

► д) Кут β між ребром AD і гранню ABC шукаємо за формулою

$$\sin \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{|7 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{7^2 + (-3)^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{708}}, \quad \text{звідки} \quad \beta = \arcsin \frac{6}{\sqrt{708}}. \quad \blacktriangleleft$$

38. Знайти точку K , симетричну точці $P(1;2;3)$ відносно прямої $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$.

► Через точку P проведемо площину, перпендикулярну даній прямій, і знайдемо координати точки O перетину площини і даної прямої. Напрямний вектор прямої $\vec{s} = (-1; -1; 4)$ є перпендикулярним до площини. Запишемо рівняння площини, що проходить через точку $P(1;2;3)$ перпендикулярно вектору $\vec{s} = (-1; -1; 4)$, отримаємо $-(x-1) - (y-2) + 4(z-3) = 0$, звідси $x + y - 4z + 9 = 0$. Координати точки O шукаємо із системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, \\ x + y - 4z + 9 = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 - t, \\ z = -1 + 4t, \\ 2 - t + 3 - t - 4(-1 + 4t) + 9 = 0, \end{cases} \begin{cases} t = 1, \\ x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3. \end{cases}$$

Точка $O(1;2;3)$ є серединою відрізка PK , тому

$$x_K = 2x_O - x_P = 0, \quad y_K = 2y_O - y_P = 2, \quad z_K = 2z_O - z_P = 3,$$

тобто $K(0;2;3)$. ◀

39. Визначити координати центра сфери і її радіус, якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 25 = 0$.

► Дане рівняння можемо перетворити так:

$$x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 + y^2 + 2 \cdot 4y + 4^2 - 4^2 + z^2 + 2 \cdot 5z + 5^2 - 5^2 + 25 = 0, \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 25.$$

Отже, центр сфери – точка $O(3; -4; -5)$, а радіус $R = 5$. ◀

40. Які поверхні визначаються рівняннями:

$$\begin{aligned} 1) x^2 + z^2 &= 9, & 2) \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{6} &= 1, \\ 3) z &= 2x^2, & 4) \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{5} &= 1? \end{aligned}$$

► Кожне із цих рівнянь містить тільки дві змінні x і z та визначає в площині xOz криві:

1) коло; 2) еліпс; 3) параболу; 4) гіперболу.

У просторі ж кожне із них визначає циліндричну поверхню з твірними, що паралельні осі Oy , так як ці рівняння не містять змінної y . Напрямними цих циліндричних поверхонь є вказані криві. Отже:

1) $x^2 + z^2 = 9$ – рівняння прямого кругового циліндра;

- 2) $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1$ – рівняння еліптичного циліндра;
- 3) $z = 2x^2$ – рівняння параболічного циліндра;
- 4) $\frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 1$ – рівняння гіперболічного циліндра. ◀