

Завдання для самостійного розв'язання

19. За заданими декількома першими членами послідовності підібрати одну з формул загального члена:

а) $\sqrt{1 \cdot 2}, \sqrt{2 \cdot 3}, \sqrt{3 \cdot 4}, \sqrt{4 \cdot 5}, \dots;$

б) $\frac{1}{11}, \frac{1}{21}, \frac{1}{31}, \frac{1}{41}, \dots;$

в) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4\sqrt{2}}, \dots;$

г) $\frac{3}{4}, -\left(\frac{6}{7}\right)^2, \left(\frac{9}{10}\right)^3, -\left(\frac{12}{13}\right)^4, \dots$

20. Знайти перші п'ять членів послідовності, якщо її загальний член задається формулою:

а) $x_n = 2n \sin \frac{\pi n}{2} - 3n^2 \cos \pi n;$

б) $x_n = 2^{-n} \sin \frac{\pi n}{2};$

в) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k(k+3)};$

г) $x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n^2 - 2n - 5).$

21. Довести, що послідовності зростаючі і обмежені:

а) $x_n = \frac{3n^2}{2n^2 + 3};$ б) $x_n = 3 - \arcsin \frac{1}{n^2 + 4}.$

22. Знайти найбільший член кожної з послідовностей, заданих своїми загальними членами:

а) $x_n = \frac{2n}{n^2 + 100};$ б) $x_n = \cos \pi n;$

в) $x_n = -1 + \frac{1}{n};$ г) $x_n = \frac{n+1}{n!}.$

23. Користуючись означенням границі послідовності, довести граничні рівності:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+5} = \frac{2}{3};$ б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+7}{8n^2-9} = \frac{3}{8};$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} = 0;$ г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3^n} = 0.$

24. Довести збіжність послідовностей $\{x_n\}$ і знайти їхні границі:

а) $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$; б) $x_n = \frac{3n^2 + 2}{n^2}$;

в) $x_n = \frac{n^2 - 5}{2n^2}$; г) $x_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$;

г) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, $x_3 = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$, ...,

$$x_n = \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{3}}}}_{n \text{ доданків}}, \dots$$

25. Знайти границі послідовностей:

а) $x_n = \frac{3 - 2n}{5n + 1} - \frac{2n^2 + 7}{3n^2 + 4}$; б) $x_n = \frac{2n}{2n^2 - 1} \cos \frac{n + 1}{2n - 1}$;

в) $x_n = \frac{1 - n - n^2}{(3n + 1)^3}$; г) $x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2 + n} - \sqrt{n}}$;

г) $x_n = \sqrt{3n}(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n - 4})$; д) $x_n = \frac{(2n)^n (2n + 3)!}{(2n + 1)!(2(n + 1))^{n+1}}$;

е) $x_n = \frac{n^n ((n + 1)!)^3}{(n!)^3 (n + 1)^{n+1}}$; є) $x_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \sin n^2$;

ж) $x_n = (4^{-n} - 2)(5^{-n} - 3)$; з) $x_n = \frac{5}{2^{1/n} - 1}$.

26. Користуючись означенням границі функції, довести що:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} (4x^2 - 3x) = 22$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{5x - 8} = \frac{2}{5}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 2x}{x} = 0$.

27. Довести, що границі функцій не існують:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{1}{x^2 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} 7^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{ctg} x$.

28. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{x - 3} - \frac{5}{9 - x^2} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, де $m, n \in \mathbb{N}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 9}{3x^2 - 7x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 6x + 2}{7x + 8}$;

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}.$$

29. Обчислити границі:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sin 7x}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x-4)}{\sqrt{x-4}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+5} - \sin \sqrt{x}); & \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 8^x}{7^x - 6^x}. \end{aligned}$$

30. Обчислити границі:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+9}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} (\sin 4x)^{\operatorname{tg}^2 4x}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-3}{7x+3}\right)^x; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 3x + 7}\right)^{\frac{5x+3}{4x+7}}; & \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+5x}{7+5x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{Intg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}; & \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + 7 \sin 2x). \end{aligned}$$

31. Вважаючи, що $x \rightarrow \infty$, порівняти н.в.ф.:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 3x^2 + 7x + 8, \quad \varphi(x) = 9x^2 + 2x + 5; \\ \text{б) } f(x) &= 4x^2 + 7x, \quad \varphi(x) = (2x + 5)^2; \\ \text{в) } f(x) &= \sqrt[3]{x+4}, \quad \varphi(x) = \sqrt[3]{x+6}. \end{aligned}$$

32. Нехай $x \rightarrow 0$. Знайти порядок н.м.ф. у порівнянні з x :

$$\begin{aligned} \text{a) } 9 \sin^6 x - x^6; & \quad \text{б) } 4 \sin^3 x - x^5; & \quad \text{в) } \sqrt{4 + x^6} - 2; \\ \text{г) } \sin \sqrt[3]{x}; & \quad \text{г) } \cos x - \sqrt[3]{\cos x}; & \quad \text{д) } e^{3x} - \cos 3x. \end{aligned}$$

33. Знайти границі:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\ln(1+7x)}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{5x} - 1}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 3x)}{\ln^3(\sin 9x + 1)}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\ln(1+x^4)}}{1 - \cos x}; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 6x)}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x - 4x^2 + 7x^3)}{\ln(1 - 2x + 6x^2 + 8x^3)}.$$

34. Знайти односторонні границі функцій при $x \rightarrow x_0$:

$$\text{а) } f(x) = \frac{3+x}{5-5^{\frac{1}{x}}} \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{|\sin 2x|}{x} \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5} \text{ при } x \rightarrow (-5);$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{3x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0 \end{cases} \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} 4^{\frac{5}{x}}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases} \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Відповіді до завдань для самостійного розв'язання

$$19. \quad \text{а) } \sqrt{n(n+1)}; \quad \text{б) } \frac{1}{10n+1}; \quad \text{в) } \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}; \quad \text{г) } (-1)^{n-1} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n.$$

$$20. \quad \text{а) } 5; -12; 21; -48; -65; \quad \text{б) } \frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{8}; 0; \frac{1}{32};$$

$$\text{в) } \frac{1}{12}; \frac{7}{60}; \frac{73}{540}; \frac{139}{945}; \frac{235}{1512}; \quad \text{г) } 6; 5; -2; 3; -10.$$

$$21. \quad \text{а) } \frac{3n^2}{2n^2+4} < \frac{3}{2}; \quad \text{б) } 3 - \arcsin \frac{1}{n^2+4} < 3;$$

$$22. \quad \text{а) } \frac{1}{10}; \quad \text{б) } 1; \quad \text{в) } 0; \quad \text{г) } 2.$$

23. У всіх прикладах цього пункту необхідно розв'язати відносно n таку нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ де число } a \text{ – границя відповідної послідовності.}$$

$$24. \quad \text{а) } 1; \quad \text{б) } 3; \quad \text{в) } \frac{1}{2}; \quad \text{г) } e; \quad \text{г) } \frac{1-\sqrt{13}}{2}.$$

$$25. \quad \text{а) } -\frac{16}{15}; \quad \text{б) } 0; \quad \text{в) } 0; \quad \text{г) } +\infty; \quad \text{г) } 3\sqrt{6};$$

$$\text{е) } \infty; \quad \text{є) } \infty; \quad \text{ж) } 0; \quad \text{з) } \frac{2}{3}; \quad \text{и) } \infty.$$

26. Використайте означення на мові „ $\varepsilon - \delta$ “.

27. а) $x'_n = \sqrt{1 + \frac{1}{\pi n}}, x''_n = \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}}$;

б) $x'_n = \frac{1}{n}, x''_n = -\frac{1}{n}$; в) $x'_n = \frac{\pi}{2} + \pi n, x''_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

28. а) ∞ ; б) 4; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{m}{n}$; д) 0; е) 1; є) 0.

29. а) $\frac{1}{42}$; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) -24; д) не існує; є) $\frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 7 - \ln 6}$.

30. а) e^3 ; б) -2; в) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; г) $e^{\frac{6}{7}}$; д) 2^4 ; е) 1; є) 14.

31. а) одного порядку; б) одного порядку; в) одного порядку.

32. а) 6; б) 3; в) 6; г) $\frac{1}{3}$; д) 2; є) 1.

33. а) $\frac{6}{7}$; б) $\frac{4}{5}$; в) ∞ ; г) 2; д) $\frac{5}{6}$; є) $-\frac{3}{2}$.

34. а) $f(-0) = \frac{3}{5}, f(+0) = 0$; б) $f(-0) = -2, f(+0) = 2$.

в) $f(-5-0) = f(-5+0) = -10$; г) $f(-0) = f(+0) = \frac{1}{3}$;

д) $f(+0) = +\infty, f(-0) = 0$.