§ 5. Неперервність і точки розриву

5.1 Різні означення неперервності функції в точці

Неперервність функції $f(x)$ характеризує плавність проходження процесу, що описується цією функцією: якщо незалежна змінна x наближається до точки x_0, то значення функції $y=f(x)$ наближаються до значення цієї функції в точці x_0, тобто до $f(x_0)$.

Дамо тепер строгі означення неперервності функції.

Означення 4. *Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0 якщо: функція визначена в точці x_0 і в деякому її околі, що містить цю точку; функція має границю при $x\to x_0$, границя функції при $x\to x_0$ дорівнює значенню функції в точці x_0, тобто*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \tag{7}$$

Якщо в точці x_0 функція неперервна, то точка x_0 називається *точкою неперервності* даної функції.

Розшифровуючи поняття границі функції можемо дати ще такі означення неперервності.

Означення 5. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 якщо вона визначена в цій точці і в деякому її околі, існують обидві односторонні границі функції у цій точці, причому $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Дамо означення неперервності функції в термінах „приростів“. При цьому під приростом деякої величини розуміють різницю двох її значень. Зокрема, для функції $y=f(x)$ можна розглядати приріст аргументу

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (x+\Delta x)-x, \quad (x_2 = x+\Delta x,\ x_1 = x)$$

і приріст функції, що відповідає цьому приросту аргументу, $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Якщо тепер врахувати, що в наших означеннях $(x\to x_0)\Leftrightarrow(\Delta x\to 0)$, а $(f(x)\to f(x_0))\Leftrightarrow(\Delta f(x)\to 0)$, то маємо таке означення неперервності функції.

Означення 6. Функція $f(x)$, що визначена в точці x_0 і в деякому її околі, називається *неперервною* в цій точці, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0\,. \tag{8}$$

Рівності (7) і (8) можна записати у вигляді $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, тобто визначальним в означенні неперервності функції $f(x)$ в точці x_0 є „комутативність“ понять (символів, слів) „границя“ і „функція“ $(\lim i\ f)$.

Якщо скористатись означеннями границі функції за Коші чи за Гейне, то можемо одержати ще два означення неперервності функції. Зупинимось лише на одному з них (на „мові $\varepsilon-\delta$“).

Означення 7. *Функція* $f(x)$, *що визначена в точці* x_0 *і в деякому її околі, називається неперервною в цій точці, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \left(0 < |x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Останнє означення заслуговує на увагу тим, що в ньому явно не використовується поняття границі функції.

Функцію, що неперервна в кожній точці проміжку $\langle a, b \rangle$, називають неперервною на цьому проміжку. Множину таких функцій позначають $C_{\langle a, b \rangle}$.

5.2 Одностороння неперервність

Якщо функція $f(x)$, визначена в деякому правому півоколі точки x_0, включаючи його лівий край, тобто в $[x_0; x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, має в точці x_0 правосторонню границю $f(x_0 + 0)$, що дорівнює значенню функції в цій точці $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то кажуть, що функція $f(x)$ *неперервна в* x_0 *справа*. Аналогічно, якщо функція визначена на проміжку $[x_0 - \delta; x_0]$, $\delta > 0$ та існує $f(x_0 - 0)$, причому $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то кажуть, що функція $f(x)$ *неперервна в* x_0 *зліва*.

Зрозуміло, що твердження „функція $f(x)$ неперервна в точці x_0“ і „функція $f(x)$ одночасно неперервна в точці x_0 і зліва і справа“ еквівалентні.

Під неперервністю функції на замкненому проміжку $a \le x \le b$ (на відрізку $[a, b]$) розуміють її неперервність в інтервалі (a, b) і односторонню неперервність в лівому кінці a справа, а в правому кінці b – зліва.

Аналогічно, неперервність функції на проміжку $[a, b)$ означає неперервність в інтервалі (a, b) і правосторонню неперервність в лівому кінці a проміжку. Подібним чином розшифровується неперервність функції в $(a, b]$.

5.3 Властивості функцій, неперервних в точці

Розглянемо властивості неперервних функцій. Доведення їх випливає з означення неперервності та властивостей границь функції.

Теорема 11 *(про арифметичні операції над неперервними функціями). Нехай функції* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$ *неперервні в точці* x_0. *Тоді функції*

$$f_1(x) + f_2(x),\;\; f_1(x) - f_2(x),\;\; f_1(x) \cdot f_2(x),\; i \;\; f_1(x) / f_2(x)$$

неперервні в точці x_0 *(частка – за умови, що* $f_2(x) \neq 0$).

Теорема 12 *(про неперервність складеної функції). Якщо функція* $u = \varphi(x)$ *неперервна в точці* x_0, *а функція* $y = f(u)$ *неперервна в точці* $u_0 = \varphi(x_0)$, *то складена функція* $y = f\left[\varphi(x)\right] = F(x)$ *неперервна в точці* x_0.

5.4 Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку

Теорема 13 *(про обмеженість неперервної функції). Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$*, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Теорема 14 *(про досягнення найбільшого і найменшого значень). Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$*, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого і найменшого значень.*

Теорема 15 *(про проміжні значення). Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$ *і на його кінцях набирає різних значень* $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$, *то для будь-якого числа* C, *що лежить між* A *і* B *всередині сегмента* $[a,b]$ *знайдеться хоча б одна точка* c *така, що* $f(c)=C$.

На практиці *теорему 15* зручно використовувати в такому формулюванні:

Теорема 16 *(про нуль неперервної функції). Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$ *і на його кінцях набирає значення різних знаків* $(f(a)\cdot f(b)<0)$, *то всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка, в якій функція дорівнює нулю.*

Теорема 17 *(про існування і неперервність оберненої функції). Нехай функція* $y=f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$ *і зростає (спадає) на цьому відрізку, тоді обернена функція* $x=f^{-1}(y)\equiv\varphi(y)$ *на відповідному відрізку осі* Oy *існує і є також неперервною зростаючою (спадною) функцією.*

5.5 Точки розриву та їх класифікація

Для глибшого розуміння поняття „неперервність функції $f(x)$ в точці x_0 “ потрібно розглянути його „заперечення“ – так званий „розрив функції“. З цією метою введемо поняття „межі“ (краю, границі) області визначення (існування) функції.

Означення 8. *Точка* x_0 *називається межовою (крайовою, граничною) точкою області існування функції, якщо будь-який окіл цієї точки містить як точки області визначення функції, так і точки, які в цю область не входять.*

Означення 9. *Сукупність всіх межових точок області існування функції називається межею (краєм, границею) цієї області.*

Так, для функцій $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ межею області їх існування є сукупність точок $x_1=1$ і $x_2=-1$, а для функцій $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\log_a x$ межовою є точка $x=0$.

Означення 10. *Точка* x_0 *називається точкою розриву функції* $f(x)$ *якщо вона належить області визначення цієї функції або її межі і не є точкою неперервності. Про саму функцію* $f(x)$ *кажуть, що вона розривна в точці* x_0

Точки розриву функції поділяють на два типи (роди).

Означення 11. *Точка* x_0 *розриву функції* $f(x)$ *називається точкою розриву першого роду, якщо обидві односторонні границі* $f(x_0-0)$ *і* $f(x_0+0)$ *існують і скінченні.*

Означення 12. *Точка* x_0 *розриву функції* $f(x)$ *називається точкою розриву другого роду, якщо хоча б одна з односторонніх границь* $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ *не існує або дорівнює* ∞.

Для точок розриву першого роду вводять поняття *стрибка* функції, під яким розуміють різницю $h=f(x_0+0)-f(x_0-0)$.

Точки розриву, в яких стрибок $h=0$, тобто коли $f(x_0+0)=f(x_0-0)$, називаються *усувними* точками розриву (або точками усувного розриву). У цьому випадку функцію можна „підправити“ – перевизначити або довизначити в точці x_0 так, щоб одержати неперервну функцію (але це вже буде інша функція).

5.6 Дослідження функції на неперервність

При дослідженні на неперервність не виникає проблеми з елементарними функціями. Насправді основні елементарні функції неперервні у всіх точках, в яких вони визначені. Тоді з теорем 11-12 випливає: кожна елементарна функція неперервна в усіх точках з області її визначення. Точками розриву тут можуть бути хіба що межові точки області її існування.

Якщо ж функція $f(x)$ неелементарна, то, не вдаючись до загальних рекомендацій, обмежимось лише випадком, коли на різних ділянках області свого визначення вона задається різними аналітичними виразами. Розриви тут можуть бути не тільки в точках, де функція не існує, але і в точках, в яких змінюється аналітичний вираз функції – в так званих „точках стику“ областей задання різними аналітичними виразами.

Дослідити функцію на неперервність – означає встановити проміжки неперервності, знайти точки розриву і класифікувати їх.

Означення 13. *Функція* $y=f(x)$ *називається кусково-неперервною на відрізку* $[a,b]$, *якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках цього відрізка за винятком скінченної кількості точок, у яких функція має розрив першого роду; крім того існують односторонні границі функції в точках* a *і* b .

Функція називається *кусково-неперервною на числовій прямій*, якщо вона є кусково-неперервною на будь-якому відрізку.