

Приклади розв'язання задач

37. Користуючись лише означенням, довести неперервність на всій числовій прямій функцій:

а) $f(x) = \sin x$; б) $\varphi(x) = x^3$.

Будемо використовувати означення неперервності в термінах приростів. Обидві функції існують при $\forall x \in \mathbb{R}$.

► а) Розглянемо довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Надамо аргументу x приросту Δx в точці

x_0 . Тоді $f(x)$ одержить приріст $\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)$.

Оскільки $\left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq \left| \frac{\Delta x}{2} \right|$, $\left| \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 1$, то $|\Delta f(x_0)| \leq 2 \cdot \left| \frac{\Delta x}{2} \right| = |\Delta x|$. Тому

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$, з чого і випливає неперервність досліджуваної функції в довільно вибраній точці, а отже, і на всій числовій прямій. ◀

► б) Як і вище, розглянемо

$$\Delta \varphi(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Тоді $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \varphi(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3) = 0$. ◀

38. Дослідити на неперервність функції:

а) $y = \frac{1}{x^3}$; б) $y = \log_a x (a > 1)$;

в) $y = \cos \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{1-x}}}$;

г) $y = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{1-x}$; д) $y = \frac{x}{x^2-1}$.

Всі задані тут функції – елементарні. Тому проміжками неперервності є області їх існування.

► а) Областю існування функції є множина точок $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. В усіх точках цієї області функція неперервна. Межовою точкою області існування є точка $x_0 = 0$. Оскільки $x_0 \notin D(f)$, то x_0 – точка розриву. Знаходимо односторонні границі: $f(+0) = +\infty$, $f(-0) = +\infty$. Отже, x_0 – точка розриву другого роду. ◀

►б) Функція визначена на інтервалі $(0; +\infty)$. Там же вона неперервна. Межовою точкою області визначення є точка $x_0 = 0$. Права границя функції в цій точці дорівнює $-\infty$. Отже, x_0 – точка розриву другого роду. ◀

►в) Задана функція є складеною з двох елементарних функцій $u = \frac{1}{x}$ і $y = \sin u$.

Отже, вона – елементарна і область її визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Межова точка області визначення $-x_0 = 0$. Жодна з односторонніх границь функції $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ в точці x_0 не існує. Отже, x_0 – точка розриву другого роду. ◀

►г) Функція існує, а отже, і неперервна при всіх $x \neq 1$, тобто $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Межовою точкою області визначення є $x_0 = 1$. Оскільки ця точка не належить $D(f)$, то $x_0 = 1$ – точка розриву. Знаходимо односторонні границі.

При $x \rightarrow 1-0$ вираз $x-1 < 0$, а тому

$$\left(\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \right) \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0 \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} \rightarrow \frac{1}{1+0} = 1 \right).$$

Аналогічно, при $x \rightarrow 1+0$ вираз $x-1 > 0$, тому

$$(x \rightarrow 1+0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \right) \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow +\infty \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} \rightarrow 0 \right).$$

Таким чином, обидві односторонні границі існують і скінченні, але не дорівнюють одна одній. Отже, $x_0 = 1$ є точкою розриву першого роду. „Сстрибок“ функції складає $|h| = |0-1| = 1$. ◀

►г) Область існування функції встановлюємо з умов

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 1,$$

тобто $D(f) = [-1; 1)$. Межевими точками області існування функції є $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Точка $x_1 = -1$ входить в область існування, а при $x_2 = 1$ функція не існує. Тому функція неперервна в проміжку. Оскільки при $x \rightarrow 1-0$ маємо $1-x > 0$, то $\frac{1}{1-x} \rightarrow +\infty$; тому

$f(1-0) = -\infty$. Отже, в точці $x_2 = 1$ функція має розрив другого роду. ◀

► д) Функція існує і неперервна в усіх точках, де знаменник не дорівнює нулю, тобто $D(f) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Межевими точками області визначення є $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. В цих точках функція не існує, отже, вони є точками розриву. Оскільки односторонні границі в цих точках нескінченні, то $x = \pm 1$ – точки розриву другого роду. ◀

39. Дослідити на неперервність функції:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sin x}{x};$$

$$\text{б) } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{в) } \psi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Всі три наведені тут функції – різні: перша не визначена в точці $x_0 = 0$, а дві інші в точці $x_0 = 0$ набувають певних значень.

► а) Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ – елементарна, її область визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В межевій точці області визначення $x_0 = 0$ дана функція не визначена, отже, $x_0 = 0$ – точка розриву. Як відомо, границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, тобто існує і скінченна (перша важлива границя). Тому $x_0 = 0$ – точка розриву першого роду, до того ж розрив функції у цій точці усувний, бо $\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x) = 1$. ◀

► б) Функція $\varphi(x)$ неелементарна; вона визначена на всій числовій осі, тобто $D(\varphi) = \mathbb{R}$. На інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ дана функція неперервна. Дослідимо цю функцію ще в точці $x_0 = 0$: $\varphi(-0) = \varphi(+0) = 1$, але $\varphi(0) = 2 \neq 1$. Отже, $x_0 = 0$ – точка усувного розриву. ◀

► в) Функція $\psi(x)$ також неелементарна. Вона, як і попередня функція, визначена на всій числовій прямій і неперервна на інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Дослідимо цю функцію ще в точці $x_0 = 0$

$$\begin{cases} \psi(+0) = \psi(-0) = 1, \\ \psi(0) = 1, \end{cases} \Rightarrow \psi(-0) = \psi(+0) = \psi(0),$$

тобто $\psi(x)$ неперервна також і в точці 0. Таким чином, областю неперервності функції $\psi(x)$ є множина точок: $(-\infty, 0) \cup (0; \infty) \cup \{0\} = \mathbb{R}$, тобто вся числова пряма. ◀

40. Дослідити на неперервність функції:

а) $y = E(x)$ (цілочислова функція);

б) $y = \lambda(x)$ (функція Діріхле);

в) $y = \operatorname{sign} x$.

Означення цих функцій були дані в § 2. Всі задані тут функції неелементарні.

► а) Функція $y = E(x)$ була означена у § 2 описово. Для зручності її дослідження на неперервність охарактеризуємо $E(x)$ аналітично: якщо x знаходиться між двома послідовними цілими числами m і $m+1$, то $E(x) = m$; точніше $E(x) = m$ при $m \leq x < m+1$, $m \in \mathbb{Z}$.

Останню рівність запишемо так

$$E(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots, \\ m-1 \text{ при } x \in [m-1, m), \\ m \text{ при } x \in [m, m+1), \\ m+1 \text{ при } x \in [m+1, m+2), \\ \dots\dots\dots, \end{cases} \quad \text{де } m \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Всередині проміжків, що фігурують в (9), тобто в інтервалах $(m, m+1)$, функція $y = E(x)$ – стала і тому неперервна. Точками стику цих інтервалів є сусідні цілі числа. Оскільки стрибки в точках стику

$$h = E(m+0) - E(m-0) = m - (m-1) = 1 \neq 0,$$

то всі цілі числа є точками розриву першого роду функції $E(x)$. Зазначимо також, що $E(m+0) = E(m)$, тобто функція $y = E(x)$ неперервна в точках $x = m$ справа. ◀

► б) Покажемо, що $y = \lambda(x)$ розривна в кожній точці x_0 числової осі. Для цього досить переконатись, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda(x)$ не існує при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$.

Нехай x_0 – довільне дійсне число. Тоді можемо вибрати послідовності дійсних чисел $\{x_n\}$ що прямують до x_0 .

Нехай одна з цих послідовностей $\{x'_n\}$ складається з раціональних чисел, а друга $\{x''_n\}$ – з ірраціональних чисел: $x'_n \rightarrow x_0$, $x''_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$.

Розглянемо границі відповідних послідовностей значень функції $\lambda(x)$ в цих точках:

$$\lambda(x'_n) = 1 \rightarrow 1, \quad \lambda(x''_n) = 0 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Одержані границі послідовностей значень функції – різні. Тому $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda(x)$ не існує

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$. Отже, в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$ функція Діріхле $\lambda(x)$ має розрив другого роду.

Графічно зобразити функцію Діріхле неможливо.

Зауваження. Послідовності раціональних $\{x'_n\}$ і ірраціональних чисел $\{x''_n\}$, збіжних до x_0 , можна вибирати, зокрема, наступним чином. Нехай $\{\varepsilon_n\}$ – нескінченно мала послідовність додатних чисел. В кожному з ε_n -околів точки x_0 існує хоча б одне раціональне число x'_n і хоча б одне ірраціональне число x''_n ; утворюємо з цих чисел послідовності $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$, які при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ мають своїми границями x_0 . ◀

► в) Функція $y = \operatorname{sign} x$ визначена на всій числовій осі. На інтервалі $(-\infty; 0)$ вона дорівнює -1 , тобто є сталою, а отже, і неперервною. Аналогічно, $\operatorname{sign} x$ неперервна на $(0; +\infty)$, тому що і там є сталою, дорівнює 1 . Знайдемо односторонні границі цієї функції в точці $x_0 = 0$:

$$\operatorname{sign}(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1, \quad \operatorname{sign}(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1.$$

Таким чином, $x = 0$ – точка розриву першого роду функції $y = \operatorname{sign} x$. Позаяк $\operatorname{sign}(-0) \neq \operatorname{sign} 0$ і $\operatorname{sign}(+0) \neq \operatorname{sign} 0$, то $y = \operatorname{sign} x$ не є неперервною в точці $x = 0$ ні справа, ні зліва. ◀

41. Задано функції:

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^3}{x}; \quad \text{б) } \varphi(x) = \frac{1}{x^3};$$

$$\text{в) } \psi(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}; \quad \text{г) } \gamma(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x};$$

$$\text{г) } \nu(x) = x \cos \frac{1}{x},$$

які не визначені в точці $x = 0$, але визначені і неперервні в деякому околі цієї точки. Чи можна визначити (довизначити) кожен з цих функцій в точці $x = 0$ так, щоб вона стала неперервною і в цій точці?

► а) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Отже, якщо за значення функції в точці $x = 0$

взяти число нуль, то одержимо функцію неперервну і в точці $x = 0$. Це вже буде інша функція

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Функцію $F(x)$ можна записати простішим аналітичним виразом $F(x) = x^2$. ◀

► б) $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = +\infty$, тому точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду. При

будь-якому довизначенні $\varphi(0)$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ A & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

ця функція залишається розривною в точці $x = 0$. ◀

► в) $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \arctg \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$. Отже, якщо за значення функції в точці $x = 0$ взяти

число $\frac{\pi}{2}$, то нова функція

$$\Psi(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

буде неперервною в точці $x = 0$. ◀

► г) Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = 0$

$$\gamma(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \text{arcctg} \frac{1}{x} = \text{arcctg}(-\infty) = \pi, \quad \gamma(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \text{arcctg} \frac{1}{x} = \text{arcctg}(+\infty) = 0 \neq \gamma(-0),$$

тобто границя $\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{arcctg} \frac{1}{x}$ не існує. Тому при будь-якому довизначенні функції

в точці $x = 0$

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \text{arcctg} \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ \Delta & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

нова функція $\Gamma(x)$ не буде неперервною в точці $x = 0$. ◀

► г) $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos \frac{1}{x} \right) = 0$, як границя добутку нескінченно малої функції на

обмежену, а тому, якщо змінити дану функцію у такий спосіб

$$H(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

то одержимо нову функцію, яка буде неперервною в точці $x = 0$. ◀

42. Дослідити на неперервність функції:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \varphi(x) = \begin{cases} x-1 & \text{при } 0 \leq x < 3, \\ 3-x & \text{при } 3 \leq x \leq 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } \psi(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{при } x < -1, \\ 1 & \text{при } x = -1, \\ x-1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{г) } \gamma(x) = \begin{cases} x^4 & \text{при } x < 0, \\ x+2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

► а) Функція $f(x)$ неелементарна. Вона визначена на всій числовій прямій. При $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ вона дорівнює функції $f(x)$, яка є елементарною і, отже, неперервною в області свого визначення. Тому про функцію $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ можна також сказати, що в області $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ вона неперервна. Знайдемо ще односторонні границі цієї функції в точці $x = 0$: $f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, бо $e > 1$ і $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -0$;

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \text{ бо } e > 1 \text{ і } \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +0.$$

Оскільки одна з односторонніх границь – нескінченна, робимо висновок, що $x = 0$ є точкою розриву другого роду функції $f(x)$. Рівність $f(-0) = f(0) = 0$ вказує на те, що $f(x)$ в точці $x = 0$ неперервна зліва.

Висновок: функція $f(x)$ неперервна при всіх $x \neq 0$, а в точці $x = 0$ має розрив другого роду, причому у цій точці функція є неперервною зліва. ◀

►б) Функція $\varphi(x)$ визначена на проміжку $[0; 4]$, вона неелементарна, тобто на різних ділянках області визначення задається різними аналітичними виразами. Дослідимо $\varphi(x)$ в точці „стику“ цих ділянок – в точці $x = 3$:

$$\varphi(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (x-1) = 3-1 = 2, \quad \varphi(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (3-x) = 3-3 = 0,$$

$$\varphi(3) = (3-x)|_{x=3} = 3-3 = 0.$$

Таким чином, $\varphi(3-0)$ і $\varphi(3+0)$ – скінченні і різні, тому $x = 3$ – точка розриву першого роду функції $\varphi(x)$. Оскільки $\varphi(3+0) = \varphi(3)$, то функція $\varphi(x)$ неперервна в точці $x = 3$ справа.

На проміжку $[0; 3)$ вона задана неперервною елементарною функцією $\varphi^*(x) = x-1$. Отже, $\varphi(x)$ на проміжку $[0; 3)$ неперервна. Аналогічно переконуємося, що $\varphi(x)$ неперервна на $[3; 4]$.

Отже, функція $\varphi(x)$ неперервна на $[0; 3]$ і на $[3; 4]$, $x = 3$ – точка розриву першого роду, в якій задана функція є неперервною справа. ◀

►в) Областю визначення функції $\psi(x)$ є вся числова пряма $D(\psi(x)) = \mathbb{R}$. Вона неелементарна, тому що на різних проміжках області визначення функція $\psi(x)$ задається різними аналітичними виразами. Зокрема, при $x \in (-\infty; -1)$ функція $\psi(x) = -x-1$ – лінійна функція, отже, неперервна. Аналогічно переконуємось в неперервності $\psi(x)$ при $x \in (-1; +\infty)$. Залишається з'ясувати поведінку функції $\psi(x)$ в точці $x = -1$ (точка „стику“ областей задання функції різними аналітичними виразами):

$$\psi(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (-x-1) = 1-1 = 0,$$

$$\psi(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (x-1) = -1-1 = -2,$$

$\psi(-1-0) \neq \psi(-1+0)$ – скінченні, різні. Отже, $x = -1$ – точка розриву першого роду, причому досліджувана функція розривна і справа і зліва, оскільки $\psi(-1 \pm 0) \neq \psi(-1)$. ◀

►г) Функція $\gamma(x)$ визначена при всіх $x \in \mathbb{R}$, тобто $D(\gamma) = \mathbb{R}$. На різних проміжках своєї області визначення вона задається різними аналітичними виразами. Елементарні функції $y = x^3$ і $y = x+2$ неперервні скрізь, зокрема, відповідно на $(-\infty; 0]$ і $(0; +\infty)$. В точці „стику“ $x = 0$: $\gamma(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} x^3 = 0$, $\gamma(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} (x+2) = 2$, $\gamma(0) = 0^3 = 0$. Оскільки

$\gamma(-0)$, $\gamma(+0)$ – скінченні, різні, то $x=0$ – точка розриву першого роду. Крім того, дана функція неперервна в точці $x=0$ зліва, бо $\gamma(-0)=\gamma(0)$.

Отже, функція $\gamma(x)$ неперервна на проміжках $(-\infty; 0]$ і $(0; +\infty)$, $x=0$ – точка розриву першого роду. ◀