

Завдання для самостійного розв'язання

У задачах 146 – 157 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$).

$$146. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

$$147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$$

$$148. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

$$149. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}.$$

$$150. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}.$$

$$151. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}, \quad a > 0.$$

$$152. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$$

$$153. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}.$$

$$154. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x}.$$

$$155. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x}.$$

$$156. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2\arctg x}{\frac{3}{e^x} - 1}.$$

$$157. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

У задачах 158 – 165 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$).

$$158. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$159. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^5}.$$

$$160. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}.$$

$$161. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^m}, \quad m > 0.$$

$$162. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}.$$

$$163. \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{\cos x \cdot \ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}.$$

$$164. \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$165. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

У задачах 166 – 171 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\{0 \cdot \infty\}$).

$$166. \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1).$$

$$167. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}.$$

$$168. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x}.$$

$$169. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$170. \lim_{x \rightarrow +0} x \ln^3 x.$$

$$171. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

У задачах 172 – 177 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\{\infty - \infty\}$).

$$172. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$$

$$173. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$174. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$175. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$176. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$177. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

У задачах 178 – 189 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$).

$$178. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

$$179. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$180. \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}.$$

$$181. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x.$$

$$182. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$183. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$184. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}.$$

$$185. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}.$$

$$186. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

$$187. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$188. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{3}{x}}.$$

$$189. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

190. Довести, що задані границі не можуть бути знайдені за правилом Лопіталя. Знайти границі безпосередньо:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

У задачах 224 – 227 перевірити справедливість теореми Ролля для заданої функції $f(x)$ на даному відрізку $[a; b]$.

$$224. f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10, \quad [-1; 2].$$

$$225. f(x) = \ln \sin x, \quad [\pi/6; 5\pi/6].$$

226. $f(x) = 4^{\sin x}$, $[0; \pi]$.

227. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$, $[1; 2]$.

228. Функція $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ на кінцях відрізка $[0; 4]$ приймає рівні значення $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$. Чи справедлива для цієї функції теорема Ролля на відрізку $[0; 4]$?

229. Чи виконані умови теореми Ролля для функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ на відрізку $[0; \pi]$?

230. Чи виконані умови теореми Ролля для функції $f(x) = (2 - x^2) / x^4$ на відрізку $[-1; 1]$?

231. Перевірити виконання умов теореми Лагранжа і знайти відповідну проміжну точку c для функції $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ на відрізку $[-1; 1]$?

232. Записавши формулу Лагранжа на відрізку $[0; 1]$ для функції $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$, знайти на інтервалі $(0; 1)$ відповідне значення c .

233. Для дуги параболи $y = x^2$, що міститься між точками $A(1; 1)$ та $B(3; 9)$, знайти точку, дотична до якої паралельна хорді AB .

234. Записавши формулу Коші на відрізку $[0; 2]$ для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ та $g(x) = x^2 + 4$, знайти відповідне значення c .

235. Для заданих функцій $f(x)$ та $g(x)$ перевірити виконання умов теореми Коші на заданому відрізку $[a; b]$ та знайти відповідне значення c :

а) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^3 - 1$, $[1; 2]$;

б) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $[0; \pi / 2]$.

236. Розкласти многочлен $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ за степенями двочлена $x - 4$.

237. Розкласти многочлен $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $x + 1$.

238. Нехай $P(x)$ – многочлен четвертого степеня. Обчислити $P(-1)$, $P'(0)$, $P''(1)$, коли відомо, що $P(2) = -1$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 2$, $P'''(2) = -12$, $P^{(4)}(2) = 24$.

239. Розкласти задану функцію $f(x)$ за формулою Маклорена до члена вказаного порядку включно:

а) $f(x) = e^{-x}$, до члена з x^n ;

б) $f(x) = e^{2x-x^2}$, до члена з x^5 ;

в) $f(x) = \sqrt{1-x+2x^2}$, до члена з x^3 ;

г) $f(x) = xe^x$, до члена з x^n .

240. Розкласти задану функцію $f(x)$ за формулою Тейлора з центром розкладу у

точці $x = a$ (за степенями $(x - a)$) до члена вказаного порядку включно:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1$, до члена з $(x + 1)^n$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, до члена з $(x - 4)^2$;

в) $f(x) = x^3 \ln x$, $a = 1$, до члена з $(x - 1)^4$;

г) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $a = 1$, до члена з $(x - 1)^4$.

241. Написати формулу Тейлора для заданої функції $f(x)$ з центром у точці $x = a$ до члена вказаного порядку включно. Побудувати графік даної функції та її многочлена Тейлора:

а) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, до члена з x ;

б) $f(x) = \arcsin x$, $a = 0$, до члена з x^3 ;

в) $f(x) = \ln x$, $a = 1$, до члена з $(x - 1)^2$.

242. За допомогою формули Тейлора обчислити наближені значення чисел з точністю до 10^{-3} :

а) $\sin 1$; б) $\sqrt{e}$; в) $\ln 1,05$; г) $\sqrt[5]{33}$.

243. Використовуючи розклади функцій за формулою Маклорена, обчислити задані границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3 + x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 + x^4}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2\operatorname{tg} x}{\ln(1+x^3)}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

146. $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. 147. 0. 148. 1. 149. $\frac{\alpha}{\beta}$. 150. $\frac{1}{3}$.

151. $\frac{m}{n} a^{m-n}$. 152. 2. 153. $\frac{3}{5}$. 154. $\frac{2}{3}$. 155. $\frac{1}{2}$.

156. $\frac{2}{3}$. 157. $\ln \frac{a}{b}$. 158. 5. 159. $+\infty$. 160. $\frac{1}{2}$.

161. 0. 162. $-\infty$. 163. $\cos 3$. 164. 0. 165. 1.

166. 1. 167. 0. 168. a . 169. ∞ . 170. 0. 171. 2.

172. -1 . 173. 0 . 174. $\frac{1}{2}$. 175. 0 . 176. -1 .

177. $\frac{2}{3}$. 178. e^{-6} . 179. e^2 . 180. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 181. 1 .

182. $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$. 183. $\frac{1}{e}$. 184. 1 . 185. 1 . 186. e . 187. 1 .

188. 8 . 189. 1 . 190. а) 0 ; б) 1 .

228. Ні, бо $f'(2)$ не існує.

229. Ні, бо $x = \frac{\pi}{2}$ – точка розриву функції.

230. Ні, бо $x = 0$ – точка розриву функції.

231. $c = 0$. 232. $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 233. $(2, 4)$.

234. $c_1 = \frac{1}{2}$; $c_2 = \frac{5}{3}$. 235. а) $c = \frac{14}{9}$; б) $c = \frac{\pi}{2}$.

236. $P(x) = (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$.

237. $P(x) = (x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.

238. $P(-1) = 143$, $P'(0) = -60$, $P''(0) = 26$.

239. а) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

б) $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$;

в) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)$;

г) $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{(k-1)!} + o(x^n)$.

240. а) $\sum_{k=1}^n (-1)(x+1)^k + o((x+1)^n)$;

б) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + o((x-4)^2)$;

в) $(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$;

г) $1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + \frac{\pi^4}{384}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$.

241. а) $x + o(x^3)$; б) $x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$;

$$\text{в)} (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

242. а) 0,842; б) 1,648; в) 0,049; г) 2,012.

243. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $-\frac{1}{12}$; д) -2; е) $\frac{1}{2}$.