

## Приклади розв'язання задач

**15.** Знайти області збіжності функціональних рядів:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}$ ; б)  $1 + 2x + 3^2 x^2 + \dots + (n+1)^n x^n + \dots$

► а) Маємо  $|u_n(x)| = \frac{1}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}$ . Використовуючи ознаку Коші в граничній формі,

запишемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 \sqrt{x+2} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3 \sqrt{x+2}}.$$

Отже, ряд збігається, якщо  $\frac{1}{3 \sqrt{x+2}} < 1$ , тобто при  $x > -\frac{17}{9}$ . При  $x = -\frac{17}{9}$  отримаємо

знакопереміжний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ , який збігається за ознакою Лейбніца. Таким чином,

$\left[-\frac{17}{9}; +\infty\right)$  – область збіжності ряду. ◀

► б) До ряду, складеного з абсолютних величин даного ряду, тобто  $1 + 2|x| + 3^2 x^2 + \dots + (n+1)^n |x|^n + \dots$ , застосуємо ознаку Коші. Маємо

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)^n |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty$ , якщо  $x \neq 0$ , отже, не виконується необхідна умова

збіжності і тому ряд розбіжний. При  $x = 0$  всі члени ряду, крім першого, дорівнюють нулю, значить, ряд збігається.

Остаточно можемо сказати, що даний функціональний ряд збігається лише при  $x = 0$ .

◀

**16.** Довести рівномірну збіжність у зазначених проміжках таких функціональних рядів:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$  на всій числовій осі;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  на відріжку  $[-1; 1]$ .

► а) Скористаємось ознакою Вейерштрасса. Оскільки при  $-\infty < x < +\infty$  і усіх  $n \in \mathbb{N}$  виконується  $\left| \frac{\sin nx}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$  і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  збіжний (за ознакою Даламбера), то заданий

функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій осі. ◀

► б) Для всіх  $x \in [-1; 1]$  виконується нерівність  $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ . Збіжний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  слугує мажорантою заданого функціонального ряду, тому цей функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на  $[-1; 1]$ . ◀

**17.** Знайти суми рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

► а) Даний ряд збігається при  $|x| < 1$  (в цьому можна переконатись за ознакою Даламбера). Ряд, складений з похідних членів цього функціонального ряду, матиме вигляд  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Очевидно, це є сума нескінченної геометричної прогресії. Як відомо, він збігається на  $(-1; 1)$  і для будь-якого додатного числа  $q < 1$  мажорується збіжним рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  на  $[-q; q]$ , отже, рівномірно збігається на  $[-q; q]$ . Тому можемо його почленно проінтегрувати від 0 до  $x$  для довільного  $x \in (-1; 1)$ . Маємо

$$S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{і} \quad \text{тоді}$$

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

До речі, ця рівність вірна і при  $x = -1$ , бо даний ряд збіжний за ознакою Лейбніца. Отже, для всіх  $x \in [-1; 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \quad (3) \quad \blacktriangleleft$$

► б) Поклавши в рівності (3)  $x = \frac{1}{3}$ , отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2}. \quad \blacktriangleleft$$

**18.** Знайти області збіжності степеневих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{2^n}; \quad \text{б) } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}.$$

► а) Тут  $c_n = \frac{n^2}{2^n}$ ,  $c_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$  Отже,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{2^n (n+1)^2} = 2.$$

Інтервал збіжності ряду –  $(1;5)$ . Дослідимо збіжність ряду на краях цього інтервалу.

При  $x=1$  степеневий ряд прийме вигляд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$ , а при  $x=5$  –  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ . Обидва ряди розбігаються (не виконується необхідна умова збіжності). Отже, область збіжності ряду співпадає з його інтервалом збіжності, тобто  $1 < x < 5$ . ◀

► б) Тут  $c_n = n^n$ .  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Тому ряд збігається лише в одній точці

$x = 0$ . ◀

► в) *Перший спосіб*. Складемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{4^{n+1}}$  і застосуємо ознаку Даламбера у граничній формі. Будемо мати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+3}}{4^{n+2}} \cdot \frac{4^{n+1}}{|x|^{2n+1}} = \frac{x^2}{4}.$$

Відповідно до ознаки Даламбера ряд збігатиметься для всіх значень  $x$ , що задовольняють нерівність

$$\frac{x^2}{4} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2.$$

Отже, інтервал збіжності ряду  $(-2;2)$ , радіус збіжності  $R = 2$ .

Дослідимо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу: якщо  $x = -2$ , то  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2}$ ;

якщо  $x = 2$ , то  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2}$ . Обидва ряди розбігаються, тому що не виконується необхідна

умова збіжності числового ряду, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ .

Отже, область збіжності  $(-2;2)$  ряду співпадає з його інтервалом збіжності.

*Другий спосіб*. Степеневий ряд містить лише непарні степені  $x$ , отже, нескінченне число коефіцієнтів цього ряду з парними степенями  $x$  дорівнює нулю. У цьому разі формули для обчислення радіуса збіжності не можуть бути застосовані безпосередньо.

Перепишемо заданий ряд у вигляді  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n}$ . Вводячи нову змінну  $y = x^2$ ,

одержимо ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{4^n}$ . Радіус збіжності цього степеневого ряду тепер можна знайти,

наприклад, за формулою  $R_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$ . Отже,  $|y| = x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2$  і радіус збіжності вихідного ряду  $R_x = 2$ . ◀

**19. Знайти суми поданих рядів:**

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)}.$$

► а) Позначимо суму даного ряду через  $S(x)$ , тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом  $a=1$  і знаменником  $q=-x^2$ . Сума прогресії дорівнює  $S'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Інтегруючи цю рівність на

відрізка  $[0; x] \subset (-1; 1)$ , маємо  $\int_0^x S'(x) dx = \arctg x$ . Отже,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctg x.$$

Зауважимо, що ця рівність виконується і на кінцях інтервала збіжності — точках  $x_1 = -1$  та  $x_2 = 1$ . ◀

► б) Розглянемо степеневий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)} x^{n+2}$ , який у точці  $x=1$  перетворюється

в заданий числовий. Знайдемо радіус збіжності цього ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)} \cdot \frac{5^{n+1} (n+3)}{2^{2n+1}} = \frac{5}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = \frac{5}{4}.$$

Ряд збігається в інтервалі  $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$ .

Нехай  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)} x^{n+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{x^{n+2}}{n+2}$ . Продиференціюємо обидві частини

цієї рівності за змінною  $x$  усередині інтервалу збіжності:

$$S'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n x^{n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n x^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4x}{5}\right)^n.$$

Отримали геометричну прогресію, сума якої дорівнює

$$S'(x) = \frac{x}{2} \frac{\frac{4x}{5}}{1 - \frac{4x}{5}} = \frac{x}{2} \frac{4x}{5 - 4x} = \frac{2x^2}{5 - 4x}.$$

Проінтегрувавши для будь-якого  $x \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$  обидві частини цієї рівності від 0 до  $x$ ,

одержимо

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \frac{2t^2}{5 - 4t} dt = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{t - \frac{5}{4}} dt = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2 - \frac{25}{16} + \frac{25}{16}}{t - \frac{5}{4}} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left( t + \frac{5}{4} + \frac{25}{16(t-5)} \right) dt = -\frac{1}{2} \left( \frac{t^2}{2} + \frac{5}{4}t + \frac{25}{16} \ln \left| t - \frac{5}{4} \right| \right) \Bigg|_0^x = \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x + \frac{25}{16} \ln \left| \frac{4x-5}{5} \right| \right). \end{aligned}$$

Поклавши  $x=1$  в  $S(x)$ , знайдемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{25}{16} \ln \frac{1}{5} \right) = \frac{25}{32} \ln 5 - \frac{7}{8}. \blacktriangleleft$$