## 2.3 Розвинення функцій у степеневі ряди

Функція $f(x)$ розвивається у степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ в інтервалі $(x_0-R;\, x_0+R)$, якщо в цьому інтервалі степеневий ряд збігається і його сума дорівнює $f(x)$, тобто $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$.

***Теорема.*** Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;\, x_0+R)$ можна подати у вигляді степеневого ряду $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, то коефіцієнти такого ряду мають вигляд $c_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ (тут для зручності запису вважають $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$).

Ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$
називається ***рядом Тейлора*** функції $f(x)$.

При $x_0=0$ ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+ \; +\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ називають також ***рядом Маклорена***.

Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, то ця функція нескінченно диференційована. Але обернене твердження місця не має. Тобто, якщо функція нескінченно диференційована в інтервалі $(x_0-R;\, x_0+R)$ і для неї формально побудовано ряд Тейлора, то ще немає гарантії, що цей збіжний в інтервалі $(x_0-R;\, x_0+R)$ ряд матиме сумою функцію $f(x)$.

Сформулюємо умови розкладу функції у степеневий ряд.

***Теорема (необхідна і достатня умова розвинення функції у степеневий ряд).*** Для того, щоб функцію $f(x)$ можна було розвинути у степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ в інтервалі $(x_0-R;\, x_0+R)$, $R\neq 0$, необхідно і достатньо, щоб $f(x)$ мала на цьому інтервалі похідні всіх порядків і щоб залишковий член $R_n(x)$ у формулі Тейлора
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$
прямував до нуля для всіх $x\in(x_0-R;\, x_0+R)$, коли $n\to\infty$.

Для оцінки залишкового члена можна скористатися його виглядом у формі Лагранжа
$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big),\quad \text{де}\quad 0<\theta<1.$$

*Теорема (достатня умова розвинення функції в степеневий ряд).* Якщо похідні довільного порядку функції $f(x)$ рівномірно обмежені на $(x_0-R;\, x_0+R)$, тобто існує число $M>0$, таке, що $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ при $n=0,1,2,\ldots$ і всіх $x\in(x_0-R;\, x_0+R)$, то ряд Тейлора, побудований для функції $f(x)$, збігається до неї.

*Зауваження. Якщо функція має похідні усіх порядків в кожній точці інтервала збіжності її ряду Тейлора, то в усіх точках цього інтервала вона співпадає з цим рядом.*

## 2.4 Застосування степеневих рядів

1. Розклад функції $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0$ дає змогу знаходити значення похідної будь-якого порядку $f^{(n)}(x)$ в точці $x = x_0$. З формули для коефіцієнтів Тейлора $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ випливає $f^{(n)}(x_0) = c_n n!$.

2. За допомогою розкладу функції $f(x)$ в ряд Тейлора можна наближено обчислювати значення функцій. Щоб знайти значення функції $f(x)$ в точці $x_1$, поступають таким чином. Функцію $f(x)$ розкладають у степеневий ряд в околі точки $x_0$, якому належить точка $x_1$. Точку $x_0$ вибирають такою, щоб у ній легко обчислювались значення функції та усіх її похідних, а також, по можливості, щоб вона була якнайближче до точки $x_1$. В одержаному розкладі покладають $x = x_0$. Потім для обчислення $f(x_0)$ з потрібною точністю беруть необхідне число його перших членів $(S_n(x_0))$. Похибку $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $|r_n(x_0)|$.

3. Для обчислення визначених інтегралів за допомогою розкладу підінтегральної функції у степеневий ряд вдаються не тільки тоді, коли первісна функція не є елементарною, але й у випадках, коли пошуки первісної функції зв'язані з громіздкими перетвореннями або виникають труднощі з обчисленнями значень первісної функції в межах інтегрування. Зрозуміло, що проміжок інтегрування повинен знаходитись в області розкладу підінтегральної функції у степеневий ряд.

4. Степеневі ряди використовуються при розв'язуванні диферен-ціальних рівнянь. Для цілого ряду диференціальних рівнянь показано, що розв'язок $y(x)$ можна представити у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

коефіцієнти якого можна визначити з урахуванням заданого рівняння різними способами.

а) Нехай диференціальне рівняння $k$-го порядку розв'язане відносно старшої похідної. Перші $k$ коефіцієнтів $y(x_0)$, $y'(x_0)$, … , $y^{(k-1)}(x_0)$ задаються початковими умовами. Підставляючи ці коефіцієнти і $x = x_0$ у рівняння, знаходять $y^{(k)}(x_0)$. Далі, послідовно диференціюючи рівняння і підставляючи $x = x_0$, та обчислені при $x = x_0$ значення похідних, знаходять $y^{(k+1)}(x_0)$, $y^{(k+2)}(x_0)$, … .

б) Якщо диференціальне рівняння лінійне відносно шуканої функції та її похідних, і коефіцієнт при старшій похідній в точці $x_0$ не дорівнює нулю, то розв'язок можна шукати у вигляді степеневого ряду $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ з невизначеними коефіцієнтами $c_n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Безпосередньо в диференціальне рівняння підставляють ряд і прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях $x$ в лівій і правій частинах рівності.

При розв'язуванні багатьох задач рекомендується користуватися наступними розкладами елементарних функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n}}{n} \quad (-1 < x \le 1);$$

$$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad (-1 \le x \le 1);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1);$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1);$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \; + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

Для кожного випадку в дужках вказана область, в якій степеневий ряд збігається до відповідної функції. Останній ряд, який називається *біноміальним*, на кінцях інтервалу збіжності веде себе по-різному в залежності від $\alpha \in \mathbb{R}$: при $\alpha \ge 0$ абсолютно збігається в точках $x = \pm 1$; при $-1 < \alpha < 0$ розбігається в точці $x = -1$ і умовно збігається в точці $x = 1$; при $\alpha \le -1$ розбігається в точках $x = \pm 1$.

Часто для розкладу функції в ряд зручно користуватись диференціюванням чи інтегруванням відомих розкладів, а при розкладі раціонального дробу розкласти його на найпростіші.