

Приклади розв'язання задач

20. Розвинути функцію $f(x) = \operatorname{ch} x$ в ряд за степенями x .

► Знайдемо похідні даної функції $f'(x) = \operatorname{sh} x$, $f''(x) = \operatorname{ch} x$, $f'''(x) = \operatorname{sh} x, \dots$; тобто $f^{(n)}(x) = \operatorname{ch} x$, якщо n – парне, і $f^{(n)}(x) = \operatorname{sh} x$, якщо n – непарне. При $x_0 = 0$ отримавмо $f^{(n)}(0) = 1$, якщо n – парне, і $f^{(n)}(0) = 0$, якщо n – непарне. Звідси маємо

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (6)$$

Знайдемо інтервал збіжності утвореного ряду за ознакою Даламбера. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

для будь-яких x . Отже ряд збігається в інтервалі $-\infty < x < \infty$ і тому рівність. ◀

21. Розвинути в ряд за степенями x функції:

а) $f(x) = \cos^2 x$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $f(x) = \arcsin x$; г) $f(x) = \frac{(2+x)^2}{1-x^2}$.

► а) Як відомо, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Скористаємося розкладом

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Поклавши у розкладі $2x$ замість x , дістанемо

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} - \frac{(2x)^6}{2 \cdot 6!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots \end{aligned}$$

Оскільки розклад в ряд функції $\cos x$ має місце для всіх x , то і розклад в ряд заданої функції справедливий для всіх x . ◀

► б) Запишемо функцію у вигляді $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Скористаємося біноміальним розкладом

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

Поклавши у розкладі $-x^2$ замість x , при $\alpha = -\frac{1}{2}$ одержимо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1; 1). \blacktriangleleft$$

► в) Інтегруючи знайдений в попередньому прикладі ряд в межах від 0 до x , $|x| < 1$, будемо мати

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in (-1; 1).$$

Можна довести, що ця рівність справедлива і в точках $x = \pm 1$. $\blacktriangleleft$

► г) Маємо неправильний раціональний дріб. Виділивши цілу частину

$$\frac{(2+x)^2}{1-x^2} = \frac{4+4x+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{4x+5}{(1-x)(1+x)},$$

отриманий правильний раціональний дріб розкладемо на суму найпростіших дробів:

$$\frac{4x+5}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \Rightarrow A(1+x) + B(1-x) = 4x+5;$$

$$\text{при } x=1: 2A=9 \Rightarrow A=\frac{9}{2},$$

$$\text{при } x=-1: 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Отже, } \frac{4x+5}{(1-x)(1+x)} = \frac{9}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}.$$

Скориставшись розкладами

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{отримаємо } \frac{(2+x)^2}{1-x^2} &= -1 + \frac{9}{2}(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots) + \\ &+ \frac{1}{2}(1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+\dots) = 4 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots, \end{aligned}$$

$$\text{тобто } \frac{(2+x)^2}{1-x^2} = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{де } c_n = \begin{cases} 4, & n=2k-1; \\ 5, & n=2k. \end{cases}$$

Хоча задана функція нескінченно диференційовна на всій числовій осі, за винятком точок $x = \pm 1$, отриманий розклад має місце тільки при $x \in (-1; 1)$, бо, як легко переконатись, областю збіжності степеневого ряду є саме цей інтервал. $\blacktriangleleft$

22. Знайти похідну 10-го порядку від функції $f(x) = x^4 \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ в точці $x = 0$.

► Користуючись табличним розкладом

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

одержимо

$$\begin{aligned} x^4 \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) &= x^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 6} + \frac{x^7}{2^7 \cdot 7} - \dots \right) = \\ &= \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^7}{2^3 \cdot 3} - \frac{x^8}{2^4 \cdot 4} + \frac{x^9}{2^5 \cdot 5} - \frac{x^{10}}{2^6 \cdot 6} + \frac{x^{11}}{2^7 \cdot 7} - \dots, \end{aligned}$$

звідки $f^{(10)}(0) = c_{10} \cdot 10! = -\frac{10!}{2^6 \cdot 6} = -\frac{10!}{384} = 9450.$ ◀

23. Обчислити з точністю до 0,0001:

а) $\cos 10^\circ$; б) число e ; в) $\sqrt[5]{32}$.

► а) Використаємо розклад

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

В ньому під x розуміють радіанну міру кута, тобто $x = 10^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 10 = \frac{\pi}{18}$. Тому

$$\cos 10^\circ = \cos \frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^6}{6!} + \dots$$

Одержали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$|u_3| = \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} < \frac{1}{10^4},$$

то для забезпечення заданої точності досить в ряді взяти два перші члени, тобто

$$\cos 10^\circ = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} \approx 1 - 0,0152 = 0,9848. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Підставимо $x = 1$ в розклад

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Маємо $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$

Оцінімо залишок

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \dots k} < \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

Отже, рівність $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ має абсолютну похибку, яка не перевищує $\frac{1}{n!n}$. Знайдемо n ,

для якого $\frac{1}{n!n} < 0,0001$ або $n!n > 10000$. Отримаємо $n \geq 7$. Обчислюючи $2 + \sum_{k=2}^7 \frac{1}{k!}$ і

округлюючи, знаходимо з заданою точністю $e \approx 2,7183$. ◀

► в) Очевидно, $\sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{32+4} = \sqrt[5]{2^5+4} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$. Тому скористаємось розкладом

для функції $(1+x)^\alpha$ при $x = \frac{1}{8}$, $\alpha = \frac{1}{5}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}} &= 2 \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}}{1!} + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right) \left(\frac{1}{5} - 2\right)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots\right) = \\ &= 2 + \frac{2}{5 \cdot 8} - \frac{2 \cdot 4}{2! \cdot 5^2 \cdot 8^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{3! \cdot 5^3 \cdot 8^3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{4! \cdot 5^4 \cdot 8^4} + \dots \end{aligned}$$

Останній ряд є рядом лейбніцевого типу. Оскільки $\frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{4! \cdot 5^4 \cdot 8^4} < 0,0001$, то з точністю

до 0,0001 маємо

$$\sqrt[5]{36} \approx 2 + \frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{3}{16000} = 2,00000 + 0,05000 - 0,00250 + 0,00019 = 2,04769.$$

Отже, $\sqrt[5]{36} \approx 2,0477$. ◀

24. Обчислити інтеграл $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ з точністю до 0,001.

► Обчислити даний визначений інтеграл з допомогою формули Ньютона-Лейбніца

не можна, бо $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ не виражається через елементарні функції. Замінюючи x в

розкладі функції e^x на $-\frac{x^2}{2}$, знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \dots\right) dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 2^2 \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 2^3 \cdot 7} + \dots\right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2^3 \cdot 3\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2^7 \cdot 5\sqrt{\pi}} - \frac{1}{3! \cdot 2^9 \cdot 7\sqrt{\pi}} + \dots \end{aligned}$$

Одержали ряд лейбніцевого типу. З точністю до 0,001

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx \frac{1}{\sqrt{3,1415}} \left(1 - \frac{1}{24}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{3,1415}} (1 - 0,0416) \approx 0,5205 \approx 0,521. \blacktriangleleft$$

25. Знайти перші п'ять членів розкладу в ряд розв'язку задачі Коші: $y'' = x \sin y'$,

$$y(1) = 0, y'(1) = \frac{\pi}{2}.$$

► Ми розв'язуємо дану задачу Коші в припущенні, її розв'язок можна розвинути в ряд Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n. \quad (7)$$

Використовуючи початкові умови $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$, із заданого рівняння

знаходимо $y''(1) = 1 \cdot \sin y'(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Далі диференціюючи послідовно рівняння, маємо

$$y'''(x) = \sin y' + x \cos y' \cdot y'', y'''(1) = \sin \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot 1 = 1,$$

$$y^{(IV)}(x) = \cos y' \cdot y'' + \cos y' \cdot y'' - x \cdot \sin y' \cdot (y'')^2 + x \cdot \cos y' \cdot y''',$$

$$y^{(IV)}(1) = 2 \cos \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot (1)^2 + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot 1 = -1,$$

.....

Підставивши задані та обчислені значення похідних в (7), отримуємо

$$y(x) = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{24}(x-1)^4 + \dots \blacktriangleleft$$

26. Знайти розв'язок (у вигляді степеневого ряду) рівняння $y'' - xy' + y = 1$, який задовольняє умови $y(0) = y'(0) = 0$.

► Шукаємо розв'язок у вигляді ряду $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, в якому з початкових умов

$y(0) = y'(0) = 0$ маємо $c_0 = c_1 = 0$. Тому $y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$. Підставимо цей вираз в задане

рівняння, отримаємо $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 1$.

Звідси знаходимо, що $2 \cdot 1 \cdot c_2 = 1$, тобто $c_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, і $(n+1)(n+2)c_{n+2} = (n-1)c_n$, для

$n = 1, 2, \dots$.

Оскільки $c_1 = 0$, то $c_{2m+1} = 0$ для всіх $m = 0, 1, \dots$, а для $n = 2m$, $m = 1, 2, \dots$, отримаємо рекурентну формулу

$$c_{2m+2} = \frac{(2m-1)c_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \quad m=1,2,\dots,$$

з якої виводимо рівність $c_{2m+2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}$.

Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!} x^{2m+2}.$$

Отриманий ряд збігається для всіх $x \in \mathbb{R}$. ◀