## Завдання для самостійного розв'язання

**20.** Розвинути функцію $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ в ряд за степенями $x+2$.

При розв’язуванні багатьох задач рекомендується користуватися наступними розкладами елементарних функцій:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\qquad\left(-\infty<x<+\infty\right);$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}\qquad\left(-\infty<x<+\infty\right);$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}\qquad\left(-\infty<x<+\infty\right);$$

$$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}\qquad\left(-1<x\le 1\right);$$

$$\mathrm{arctg}x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{7}}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\qquad\left(-1\le x\le 1\right);$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\qquad\left(-1<x<1\right);$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-x^{3}+x^{4}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{n}\qquad\left(-1<x<1\right);$$

$$\left(1+x\right)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!}x^{2}+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)}{3!}x^{3}+\;+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\left(\alpha-3\right)}{4!}x^{4}+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^{n}\qquad\left(-1<x<1\right).$$

Для кожного випадку в дужках вказана область, в якій степеневий ряд збігається до відповідної функції. Останній ряд, який називається *біноміальним*, на кінцях інтервалу збіжності веде себе по-різному в залежності від $\alpha\in\mathbb{R}$: при $\alpha\ge 0$ абсолютно збігається в точках $x=\pm 1$; при $-1<\alpha<0$ розбігається в точці $x=-1$ і умовно збігається в точці $x=1$; при $\alpha\le -1$ розбігається в точках $x=\pm 1$.

Часто для розкладу функції в ряд зручно користуватись диференціюванням чи інтегруванням відомих розкладів, а при розкладі раціонального дробу розкласти його на найпростіші.

**21.** Розвинути в ряд за степенями $x$ функції:

а) $f\left(x\right)=\dfrac{\sin 2x}{x}$; б) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{8+x}$;

в) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$; г) $f(x)=\dfrac{2}{(1+x)(1-3x)}$.

**22.** Знайти похідну 11-го порядку від функції $f(x)=(1+x)e^{x}$ в точці $x=0$.

**23.** Обчислити з точністю до 0,0001:

а) $\sin\dfrac{\pi}{5}$; б) $\sqrt[3]{520}$.

**24.** Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{0,3}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до 0,0001.

**25.** Знайти чотири перші члени розкладу у степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'=xy+e^{y}$, $y(0)=0$.

**26.** Знайти розв'язок (у вигляді степеневого ряду) рівняння $y''+xy'+y=x$, якщо $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

## Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

**20.** $-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^{n}}{2^{n}},\ -4<x<0.$

**21. а)** $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m}2^{2m+1}x^{2m}}{(2m+1)!},\quad x\in R;$

**б)** $2+\dfrac{2x}{2^{3}\cdot 3\cdot 1!}-\dfrac{2x^{2}}{2^{5}\cdot 3^{2}\cdot 2!}+\dfrac{2\cdot 5x^{3}}{2^{8}\cdot 3^{3}\cdot 3!}+\ldots$
$\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)x^{n}}{2^{3n-1}\cdot 3^{n}\cdot n!}+\ldots\ x\in R;$

**в)** $x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{x^{n}}{(n-1)n},\quad |x|\le 1;$

**г)** $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n}+3\cdot 3^{n}\right)x^{n}\quad f(x)=\dfrac{2}{(1+x)(1-3x)}.$

**22.** 11. **23. а)** 0,5878; **б)** 8,0414. **24.** 0,2800.

**25.** $y(x)=x+\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{2}{3}x^{3}+\dfrac{11}{24}x^{4}.$

**26.** $y(x)=x+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m}}{(2m+1)!!}x^{2m+1},\quad x\in R.$