

1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1 Поняття та властивості подвійного інтеграла

Узагальненням визначеного інтеграла на випадок функції двох змінних є подвійний інтеграл.

Нехай в замкненій області D , що належить площині Oxy , задано неперервну функцію $u = f(x; y)$. Розіб'ємо задану область на n елементарних областей D_i ($i = \overline{1; n}$). Площі отриманих областей будемо позначати відповідно через ΔS_i , а найбільшу відстань між точками області – через d_i (рис. 1.1).

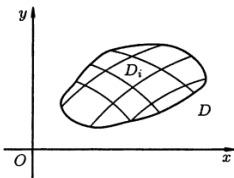


Рис. 1.1

Означення 1.1 У кожній елементарній області D_i оберемо довільну точку $M_i(x_i; y_i)$. Значення функції $f(x_i; y_i)$ в цій точці помножимо на площу відповідної елементарної області, складемо суму всіх таких добутків:

$$f(x_1; y_1)\Delta S_1 + f(x_2; y_2)\Delta S_2 + \dots + f(x_n; y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i)\Delta S_i.$$

Отримана сума називається **інтегральною сумою** функції $u = f(x; y)$ в області D .

Означення 1.2 Розглянемо границю інтегральної суми, коли n прагне до нескінченності таким чином, що $\max d_i \rightarrow 0$. Якщо така границя існує та не залежить ні від способу розбиття області D на елементарні області, ні від способу вибору в них точок, то її називають **подвійним інтегралом** від функції $u = f(x; y)$ по області D та позначають $\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_D f(x; y) ds$.

Отже, подвійний інтеграл визначається рівністю:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta S_i.$$

Область D називають **областю інтегрування**, x та y – **змінними інтегрування**, підінтегральну функцію $u = f(x; y)$ – **інтегровною в області D** ; $dx dy = dS$ – **елементом площі**.

З фізичної точки зору подвійний інтеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ при $f(x, y) > 0$ дорівнює масі пластини з щільністю $f(x, y)$, що має форму обмеженої замкненої області D .

Теорема 1.1 (Достатня умова інтегрованості функції). Якщо функція $u = f(x; y)$ неперервна в замкненій області D , то вона інтегровна в цій області.

Наведемо основні властивості подвійного інтеграла

$$1. \iint_D C \cdot f(x; y) dx dy = C \cdot \iint_D f(x; y) dx dy, \text{ де } C = \text{const}.$$

$$2. \iint_D [f(x; y) \pm g(x; y)] dx dy = \iint_D f(x; y) dx dy \pm \iint_D g(x; y) dx dy.$$

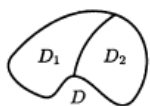


Рис. 1.2

3. Якщо область інтегрування D можна розбити лінією на дві області D_1 та D_2 , наприклад, як це показано на рисунку 1.2, то

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D_1} f(x; y) dx dy + \iint_{D_2} f(x; y) dx dy.$$

4. Якщо в області інтегрування D функція $f(x; y) \geq 0$, то і подвійний інтеграл $\iint_D f(x; y) dx dy \geq 0$.

5. Якщо функції $f(x; y)$ та $g(x; y)$ в області інтегрування D задовольняють нерівності $f(x; y) \geq g(x; y)$, то справедлива і нерівність

$$\iint_D f(x; y) dx dy \geq \iint_D g(x; y) dx dy.$$

$$6. \iint_D dx dy = \iint_D dS = S.$$

7. Якщо функція $u = f(x; y)$ неперервна в замкненій області D , площа якої дорівнює S , то

$$m \cdot S \leq \iint_D f(x; y) dx dy \leq M \cdot S,$$

де m та M – найменше та найбільше значення підінтегральної функції в області D відповідно.

8. Якщо функція $u = f(x; y)$ неперервна в замкненій області D , площа якої дорівнює S , то в цій області існує така точка $M_0(x_0; y_0)$, що виконується рівність:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = f(x_0; y_0) \cdot S.$$

Означення 1.3 Величину $\bar{f} = \frac{1}{S} \iint_D f(x; y) dx dy$ називають **середнім значенням функції** $u = f(x; y)$ в області D .

1.2 Подвійний інтеграл у декартовій системі координат

Нехай область інтегрування D – це прямокутник зі сторонами, паралельними координатним осям, які визначаються рівняннями $x = a$, $x = b$ ($a \leq x \leq b$); $y = c$, $y = d$ ($c \leq y \leq d$) (рис. 1.3). У цьому випадку подвійний інтеграл обчислюється за однією з формул:

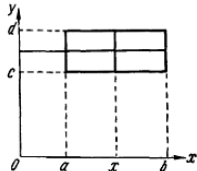


Рис. 1.3

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x; y) dy, \quad (1.1)$$

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x; y) dx. \quad (1.2)$$

Означення 1.4 Інтеграли, що знаходяться в правих частинах цих формул, називають **повторними** або **двократними**.

Означення 1.5 У формулі (1.1) інтеграл $\int_c^d f(x; y) dy$ називають **внутрішнім**.

Обчислення повторного інтеграла потрібно починати з обчислення внутрішнього інтеграла. Він обчислюється в припущенні, що змінна x зберігає на відрізку $[c; d]$ сталі фіксовані значення (тобто є константою). Тоді підінтегральна функція $f(x; y)$ є функцією однієї змінної y . У результаті обчислення цього інтеграла отримаємо функцію змінної x . Після того, як ця функція визначена, потрібно виконати зовнішнє інтегрування – проінтегрувати отриману функцію за змінною x . У результаті другого інтегрування отримуємо вже число.

Отже, при обчисленні подвійного інтеграла за формулою (1.1) перше (внутрішнє) інтегрування проводиться за змінною y при сталому значенні змінної x , а друге інтегрування – за змінною x .

Якщо ж для обчислення подвійного інтеграла $\iint_D f(x; y) dx dy$ застосовується формула (1.2), то порядок інтегрування змінюється: внутрішнє інтегрування ведеться за змінною x у припущенні, що змінна y на відрізку $[a; b]$ приймає сталі значення, а повторне (зовнішнє) інтегрування – за змінною y . Аналогічно, у результаті обчислення внутрішнього інтеграла $\int_a^b f(x; y) dx$

отримаємо функцію змінної y , а у результаті повторного інтегрування за змінною y отримуємо числове значення інтеграла.

Приклад 1.1 Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (6xy^2 - 12x^2y) dx dy$, де область D – це квадрат зі сторонами $x=0$, $x=1$, $y=2$, $y=3$. У повторному інтегралі внутрішній інтеграл спочатку обчислити за змінною y , а зовнішній – за змінною x . Обчислити цей же інтеграл, змінивши порядок інтегрування.

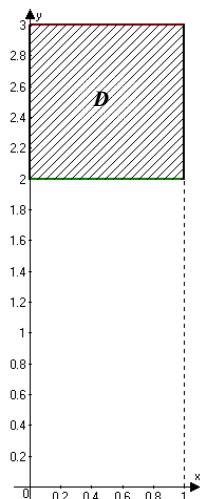


Рис. 1.4

Розв'язання. Спочатку зобразимо область інтегрування (рис. 1.4). Для обчислення скористаємося формулою (1.1) (оскільки за умовою внутрішній інтеграл обчислюємо за змінною y). Запишемо заданий подвійний інтеграл через повторний:

$$\iint_D (6xy^2 - 12x^2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y) dy.$$

Внутрішнє (перше) інтегрування будемо виконувати за змінною y , а зовнішнє (друге) – за змінною x .

Обчислення починаємо із внутрішнього інтеграла $\int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y) dy$, в якому змінна x розглядається як стала:

$$\begin{aligned} \int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y) dy &= \int_2^3 6xy^2 dy - \int_2^3 12x^2y dy = 6x \int_2^3 y^2 dy - 12x^2 \int_2^3 y dy = \\ &= 6x \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_2^3 - 12x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_2^3 = 2x(3^3 - 2^3) - 6x^2(3^2 - 2^2) = 38x - 30x^2. \end{aligned}$$

Отримали функцію змінної x . Обчислюємо тепер зовнішній інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (38x - 30x^2) dx &= \int_0^1 38x dx - \int_0^1 30x^2 dx = 38 \int_0^1 x dx - 30 \int_0^1 x^2 dx = \\ &= 38 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - 30 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 19(1^2 - 0^2) - 10(1^3 - 0^3) = 19 - 10 = 9. \end{aligned}$$

Отже, маємо:

$$\iint_D (6xy^2 - 12x^2y) dx dy = \int_0^1 (38x - 30x^2) dx = 9.$$

Зауважимо, що всі наведені обчислення можна було б зробити й не обчислюючи кожний інтеграл окремо, а саме:

$$\begin{aligned} \iint_D (6xy^2 - 12x^2y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y) dy = \\ &= \int_0^1 dx \left[6x \int_2^3 y^2 dy - 12x^2 \int_2^3 y dy \right] = \int_0^1 \left(6x \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_2^3 - 12x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_2^3 \right) dx = \\ &= \int_0^1 [2x(3^3 - 2^3) - 6x^2(3^2 - 2^2)] dx = \int_0^1 (38x - 30x^2) dx = \\ &= \int_0^1 38x dx - \int_0^1 30x^2 dx = 38 \int_0^1 x dx - 30 \int_0^1 x^2 dx = 38 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - 30 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \\ &= 19(1^2 - 0^2) - 10(1^3 - 0^3) = 19 - 10 = 9. \end{aligned}$$

Обчислимо тепер заданий подвійний інтеграл, змінивши порядок інтегрування: внутрішнє інтегрування будемо проводити за змінною x (вважаючи, що y є сталою), а зовнішнє – за змінною y :

$$\begin{aligned} \iint_D (6xy^2 - 12x^2y) dx dy &= \int_2^3 dy \int_0^1 (6xy^2 - 12x^2y) dx = \\ &= \int_2^3 \left[6y^2 \int_0^1 x dx - 12y \int_0^1 x^2 dx \right] dy = \int_2^3 \left[6y^2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - 12y \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right] dy = \\ &= \int_2^3 (3y^2 - 4y) dy = \left(3 \cdot \frac{y^3}{3} - 4 \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_2^3 = 27 - 8 - 2(9 - 4) = 19 - 10 = 9. \end{aligned}$$

Відповідь: $\iint_D (6xy^2 - 12x^2y) dx dy = 9$.

Розглянемо обчислення подвійного інтеграла, якщо область інтегрування D є довільною плоскою фігурою. У випадку, коли D обмежена кривою, яку кожна пряма, що паралельна осі Oy , перетинає не більше, ніж у двох точках (рис. 1.5), то подвійний інтеграл по цій області обчислюється за формулою:

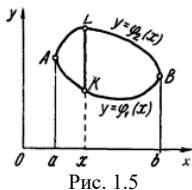


Рис. 1.5

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y) dy. \quad (1.3)$$

Внутрішній інтеграл у цій формулі відрізняється від внутрішнього інтеграла у формулі (1.1) тим, що тут межі інтегрування не сталі величини, а є функціями змінної x . При обчисленні внутрішнього інтеграла в підінтегральній функції $f(x; y)$ потрібно x розглядати як сталу величину.

Межі інтегрування у повторному інтегралі в правій частині формули (1.3) знаходяться наступним чином.

1. Область D проектується на вісь Ox . Визначимо відрізок $[a; b]$, на якому в області D змінюється x : $a \leq x \leq b$. Числа a та b ($a < b$) є відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування у зовнішньому інтегралі.

Отже, межі інтегрування за змінною x визначені.

2. Для знаходження меж інтегрування за змінною y у внутрішньому інтегралі, позначимо на контурі Γ , який обмежує область інтегрування D , точки A та B з абсцисами a та b . Ці дві точки розділять контур Γ на дві частини: нижню та верхню, з рівнянь яких потрібно явно виразити змінну y .

Припустимо, що ці частини задаються відповідно рівняннями $y = \varphi_1(x)$ й $y = \varphi_2(x)$, причому вважається, що функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ на проміжку $[a; b]$ неперервні, однозначні й зберігають аналітичний вираз. Зафіксуємо на осі абсцис будь-яку точку $x \in [a; b]$ та проведемо через неї вертикальну пряму. Розглянемо відрізок KL , який лежить в області D . Тепер легко бачити, що змінна y змінюється в області D від її значення $\varphi_1(x)$ на нижній частині контуру Γ до її значення $\varphi_2(x)$ на його верхній частині: $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$.

Таким чином, нижня та верхня межі при інтегруванні за y у внутрішньому інтегралі відповідно дорівнюють $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$. Після того, як цей інтеграл буде обчислено, отримаємо функцію змінної x .

Зауваження 1.1 У внутрішньому інтегралі при інтегруванні за змінною y межі інтегрування в загальному випадку є функціями змінної x , тобто тієї змінної, за якою обчислюється зовнішній інтеграл і яка при обчисленні внутрішнього інтеграла вважається сталою.

2. Якщо область інтегрування D обмежена кривою, яку довільна горизонтальна пряма перетинає не більш ніж у двох точках (рис. 1.6), то подвійний інтеграл по цій області може бути обчислений за формулою:

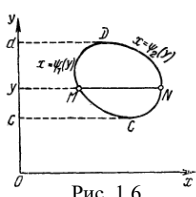


Рис. 1.6

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x; y) dx. \quad (1.4)$$

Тут також межі інтегрування у внутрішньому інтегралі не числа, як у (1.2), а функції змінної y .

Щоб знайти межі у зовнішньому інтегралі, область інтегрування D проектується на вісь ординат. Таким чином визначається відрізок $[c; d]$, на якому в області D змінюється змінна y , тобто $c \leq y \leq d$. Отримані числа c та

d будуть відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування у зовнішньому інтегралі. Внутрішній інтеграл обчислюється за змінною x .

У підінтегральній функції $f(x; y)$ потрібно у розглядати як величину сталу. Щоб визначити межі інтегрування змінної x в області D , позначимо на контурі Γ точки C й D , ординати яких c та d відповідно. Ці дві точки розділяють контур Γ на ліву та праву частини, із рівнянь яких потрібно знайти змінну x .

Нехай цими рівняннями будуть відповідно $x = \psi_1(y)$ та $x = \psi_2(y)$, причому ці функції на відрізку $[c; d]$ неперервні, однозначні й зберігають аналітичний вираз. Зафіксуємо на вісі Oy довільну точку y й проведемо через неї горизонтальну пряму. Тоді частина цієї прямої, що належить області D , – це відрізок MN .

У області інтегрування змінна x буде змінюватися від її значення $\psi_1(y)$ на лівій частині контуру Γ до її значення $\psi_2(y)$ на його правій частині, тобто $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$. Отже, верхня й нижня межі у внутрішньому інтегралі дорівнюють відповідно $\psi_1(y)$ та $\psi_2(y)$. Тут у внутрішньому інтегралі при інтегруванні за змінною x межі інтегрування в загальному випадку – функції змінної y . Після обчислення внутрішнього інтегралу отримаємо функцію змінної y .

Відзначимо, що у зовнішньому інтегралі в обох випадках межі інтегрування – сталі величини, тому у результаті обчислення подвійного інтеграла повинні отримати константу.

Зауваження 1.2 Якщо функція $f(x; y)$ є неперервною в області D , то значення повторного інтеграла по цій області не залежить від порядку інтегрування за різними аргументами.

Властивості визначених інтегралів розповсюджуються й на подвійні інтеграли. В формулах (1.3), (1.4) при обчисленні подвійного інтеграла вважалося, що крива Γ , яка є контуром області інтегрування D , перетинається всякою прямою, що паралельна одній з координатних вісей, не більше ніж у двох точках. Якщо ця умова не виконується, то область D потрібно розбити на частини так, щоб у кожній із них ця умова виконувалася.

Приклад 1.2 Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x^2 + 2y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2$, $x = 2$, $y = 2x - 1$. Обчислити цей же інтеграл, змінивши порядок інтегрування.

Розв'язання. Побудуємо задану область D (рис. 1.7):

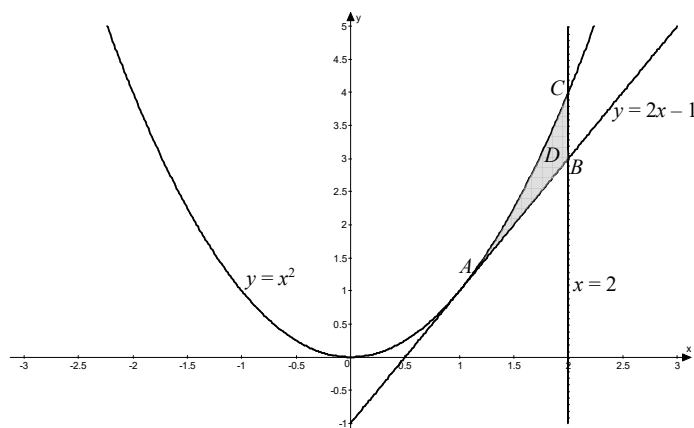


Рис. 1.7

Використаємо для обчислення інтеграла спочатку формулу (1.3), тобто внутрішнє інтегрування будемо проводити за змінною y , а зовнішнє – за x :

$$\iint_D (x^2 + 2y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (x^2 + 2y) dy.$$

Контур області D перетинається будь-якою прямою, що паралельна осі ординат, у двох точках (рис. 1.8).

Знайдемо межі інтегрування. Змінна x змінюється від абсциси точки A до абсцис точок B та C . Координати точки A знайдемо як координати точки перетину графіків функції $y = x^2$ та $y = 2x - 1$:

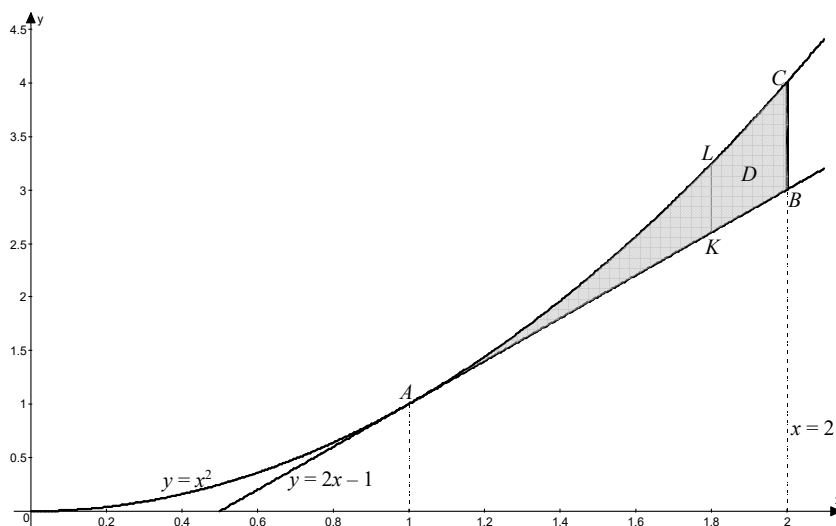


Рис. 1.8

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_A = 1.$$

Оскільки точки B та C лежать на прямій $x = 2$, то $x_B = x_C = 2$. Отже, $1 \leq x \leq 2$. Далі на відрізку $[1; 2]$ обираємо довільну точку x , через неї проводимо пряму,

паралельну вісі Oy , та на цій прямій розглядаємо відрізок KL , який знаходиться в області D .

Область D обмежена знизу прямою $y = 2x - 1$, а зверху – дугою параболи $y = x^2$. Змінна y змінюється в заданій області D від її значення $2x - 1$ на нижній частині контура ABC до її значення x^2 на верхній частині цього контура.

Зауваження 1.3 Рівняння ліній, які обмежують контур, повинні бути розв'язані відносно тієї змінної, за якою обчислюється внутрішній інтеграл.

Таким чином, $2x - 1 \leq y \leq x^2$, тому область D задається наступними нерівностями:

$$D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 2x - 1 \leq y \leq x^2. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + 2y) dx dy &= \int_1^2 dx \int_{2x-1}^{x^2} (x^2 + 2y) dy = \int_1^2 dx (x^2 y + y^2) \Big|_{2x-1}^{x^2} = \\ &= \int_1^2 \left[x^2 \cdot x^2 + (x^2)^2 - (x^2 \cdot (2x-1) + (2x-1)^2) \right] dx = \\ &= \int_1^2 (2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) dx = \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 - x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{64}{5} - 8 - 8 + 8 - 2 - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2} - 1 + 2 - 1 \right) = \frac{29}{10}. \end{aligned}$$

Обчислимо тепер заданий подвійний інтеграл, змінивши порядок інтегрування: внутрішнє інтегрування будемо проводити за змінною x , а зовнішнє – за y :

$$\iint_D (x^2 + 2y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} (x^2 + 2y) dx.$$

З рисунка 1.8 видно, що ліва межа контуру, що є межею області D , – одна лінія (дуга параболи $y = x^2$ при $x \geq 0$), а його права частина складається з двох ліній: AB (відрізок прямої $y = 2x - 1$) та BC (відрізок прямої $x = 2$), тобто задається різними рівняннями. У цьому випадку область D потрібно розбити на частини так, щоб кожна з них обмежувалася справа однією лінією. У нашому випадку такими частинами будуть $D_1 - ABF$ та $D_2 - BCF$. Задана область D є сумою

областей D_1 та D_2 (рис. 1.9). Тоді шуканий інтеграл буде дорівнювати сумі інтегралів по кожній з областей:

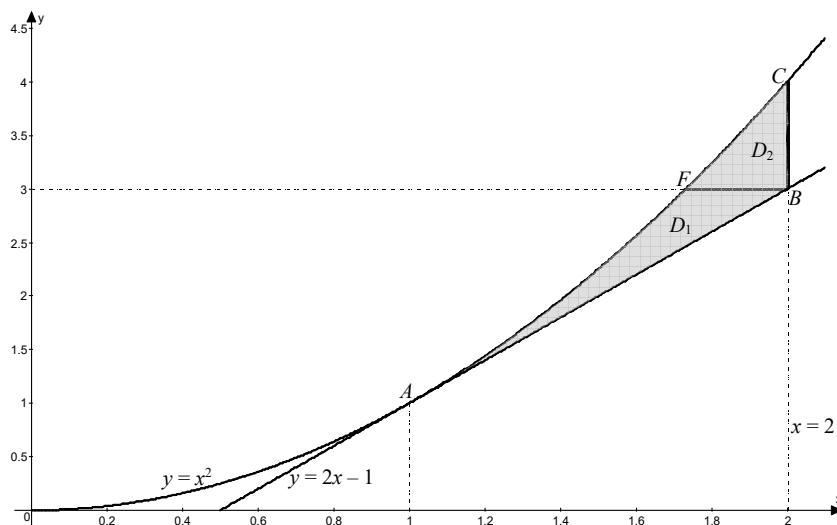


Рис. 1.9

$$\iint_D (x^2 + 2y) dx dy = \iint_{D_1} (x^2 + 2y) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + 2y) dx dy.$$

Оскільки у даному випадку внутрішнє інтегрування здійснюється за змінною x , то рівняння ліній, що обмежують область, потрібно розв'язати відносно цієї змінної:

$$AB: y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}; \quad AC: y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}.$$

Знайдемо межі інтегрування для кожної з областей. У області D_1 змінна y змінюється від ординати точки A до ординат точок B та F . Точка A належить параболі $y = x^2$ та вище було знайдено, що абсциса цієї точки $x_A = 1$, отже $y_A = 1^2 = 1$. Точка B є точкою перетину двох прямих $x = 2$ та $y = 2x - 1$, а отже $y_B = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Тоді маємо, що $1 \leq y \leq 3$. Змінна x в області D_1 змінюється від вітки параболи $x = \sqrt{y}$ до прямої $x = \frac{y+1}{2}$, тобто

$$D_1: \begin{cases} 1 \leq y \leq 3, \\ \sqrt{y} \leq x \leq \frac{y+1}{2}. \end{cases}$$

Аналогічно для області D_2 знаходимо, що

$$D_2 : \begin{cases} 3 \leq y \leq 4, \\ \sqrt{y} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + 2y) dx dy &= \int_1^3 dy \int_{\sqrt{y}}^2 (x^2 + 2y) dx + \int_3^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 (x^2 + 2y) dx = \\ &= \int_1^3 \left(\frac{x^3}{3} + 2xy \right) \bigg|_{\sqrt{y}}^2 dy + \int_3^4 \left(\frac{x^3}{3} + 2xy \right) \bigg|_{\sqrt{y}}^2 dy = \\ &= \int_1^3 \left(\frac{(y+1)^3}{24} + y^2 + y - \frac{7}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) dy + \int_3^4 \left(\frac{8}{3} + 4y - \frac{7}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \\ &= \left[\frac{(y+1)^4}{96} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} - \frac{14}{15} \sqrt{y^5} \right]_1^3 + \left[\frac{8y}{3} + 2y^2 - \frac{14}{15} \sqrt{y^5} \right]_3^4 = \\ &= \left[\frac{8}{3} + 9 + \frac{9}{2} - \frac{42\sqrt{3}}{5} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{14}{15} \right) \right] + \\ &+ \left[\frac{32}{3} + 32 - \frac{448}{15} - \left(8 + 18 - \frac{42\sqrt{3}}{5} \right) \right] = \frac{29}{10}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\iint_D (x^2 + 2y) dx dy = \frac{29}{10}.$

1.3 Подвійний інтеграл у полярній системі координат

У полярній системі координат диференціал площі $ds = \rho d\rho d\varphi$, а подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x; y) ds = \iint_D f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Приклад 1.3 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D xy dx dy, \text{ де область } D - \text{ круг } x^2 + y^2 \leq 4.$$

Розв'язання. Зобразимо область D , що є кругом радіуса 2 з центром у початку координат (рис. 1.10).

Уведемо полярну систему координат (ПСК) так, щоб її полюс співпадав з початком декартової системи

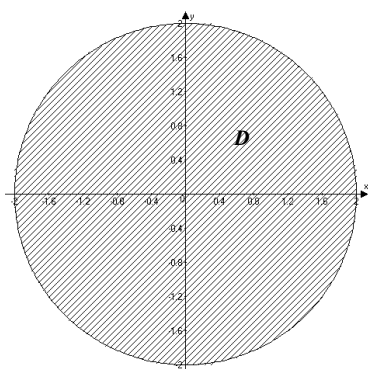


Рис. 1.10

координат, а полярна вісь з додатним напрямком осі абсцис:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

Рівняння кола, що обмежує задану область, у ПСК має вигляд:

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2.$$

Запишемо область D у ПСК, будемо мати:

$$D: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \iint_D \rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^2 = \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} \cdot (2^4 - 0^4) = -(\cos 4\pi - \cos 0) = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $\iint_D xy dx dy = 0.$