

## 1.4 Застосування подвійного інтеграла

**Обчислення площ плоских фігур.** Площа плоскої фігури обчислюється за формулою:

$$S = \iint_D dx dy.$$

Якщо фігура задається в ПСК, то

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi.$$

**Приклад 1.4** Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = -2$ ,  $y = x + 2$ ,  $y = 2$ ,  $x = y^2$ .

**Розв'язання.** Зобразимо фігуру, площу якої потрібно знайти (рис. 1.11):

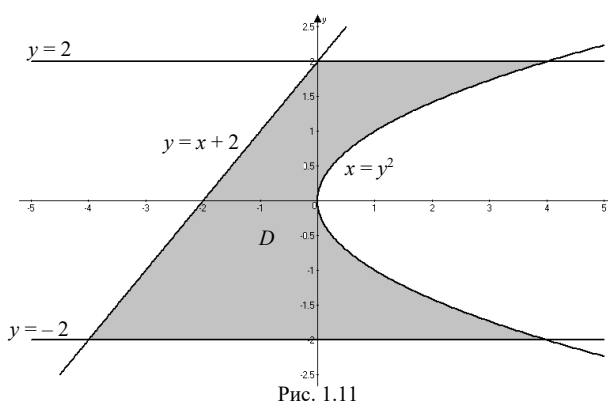


Рис. 1.11

Змінна  $y$  змінюється від  $-2$  до  $2$ . Змінна  $x$  змінюється від прямої  $y = x + 2$  (або, якщо рівняння цієї прямої розв'язати відносно змінної  $x$ , то  $x = y - 2$ ) до параболи  $x = y^2$ . Тобто область  $D$  має вигляд:  $D: \begin{cases} -2 \leq y \leq 2, \\ y - 2 \leq x \leq y^2. \end{cases}$  Тоді шукана площа:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{-2}^2 dy \int_{y-2}^{y^2} dx = \int_{-2}^2 [y^2 - (y-2)] dy = \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right) \Big|_{-2}^2 = \\ &= \frac{8}{3} - 2 + 4 - \left( -\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{16}{3} + 8 = \frac{16 + 24}{3} = \frac{40}{3} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

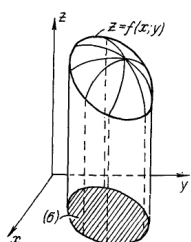


Рис. 1.12

**Обчислення об'єму циліндричних тіл.** Нехай задано циліндричне тіло, що обмежене з боків циліндричною поверхнею,

твірні якої паралельні осі  $Oz$  (рис. 1.12). Її напрямною є контур  $l$ , який обмежує область інтегрування  $\sigma$ , що лежить в площині  $Oxy$ , й є нижньою основою цього циліндричного тіла. Зверху тіло обмежене поверхнею, що задається рівнянням  $z = f(x; y)$ .

Об'єм заданого циліндричного тіла визначається за формулою:

$$V = \iint_{\sigma} f(x; y) dx dy. \quad (1.5)$$

У полярних координатах остання формула набуває вигляду:

$$V = \iint_{\sigma} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

**Приклад 1.5** Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$ ,  $x + y - 3 = 0$  та координатними площинами.

**Розв'язання.** Перша поверхня  $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$  – еліптичний параболоїд з віссю симетрії  $Oz$ , який піднято на одну одиницю вгору вздовж цієї осі. Рівняння  $x + y - 3 = 0$  визначає площину, паралельну осі  $Oz$ . Також тіло обмежене координатними площинами  $x = 0$ ,  $y = 0$  та  $z = 0$  (рис. 1.13, а).

На площину  $Oxy$  тіло проектується у трикутник, який обмежений координатними осями й прямою  $x + y - 3 = 0$  (рис. 1.13, б).

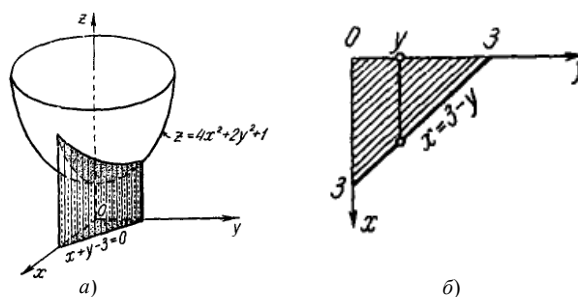


Рис. 1.13

Об'єм заданого тіла будемо обчислювати за формулою (1.5), у якій область інтегрування  $\sigma$  є трикутник, зображений на рисунку 1.13 б, а  $f(x; y) = 4x^2 + 2y^2 + 1$ , тобто маємо:

$$V = \iint_{\sigma} (4x^2 + 2y^2 + 1) dx dy.$$

Запишемо область  $\sigma$ :

$$\sigma: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 3 - x. \end{cases}$$

Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (4x^2 + 2y^2 + 1) dy = \int_0^3 \left( 4x^2 y + \frac{2y^3}{3} + y \right) \Big|_0^{3-x} dx = \\
 &= \int_0^3 \left( 4x^2 y + \frac{2y^3}{3} + y \right) \Big|_0^{3-x} dx = \int_0^3 \left( 4x^2(3-x) + \frac{2}{3}(3-x)^3 + 3-x \right) dx = \\
 &= \int_0^3 \left( 12x^2 - 4x^3 + \frac{2}{3}(3-x)^3 + 3-x \right) dx = \\
 &= \left( 4x^3 - x^4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{(3-x)^4}{4} + 3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = 108 - 81 + 9 - \frac{9}{2} - \left( -\frac{27}{2} \right) = \\
 &= 108 - 81 + 9 - \frac{9}{2} - \left( -\frac{27}{2} \right) = 45 \text{ (куб. од.)}.
 \end{aligned}$$

**Обчислення площ поверхонь.** Нехай поверхня задана рівнянням  $z = f(x; y)$ , тоді площа тієї частини поверхні, яка проектується на площину  $Oxy$  в область  $\sigma$ , обчислюється за формулою:

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Тут функція  $f(x; y)$  – неперервна та однозначна в області  $\sigma$  та має в цій області неперервні частинні похідні першого порядку  $\frac{\partial z}{\partial x}$  та  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**Зауваження 1.4** У деяких випадках для спрощення обчислень проектувати поверхню, площа якої обчислюється, краще не на площину  $Oxy$ , а на  $Oxz$  або  $Oyz$ .

**Приклад 1.6** Обчислити площу частини поверхні  $ay = x^2 + z^2$ , яка знаходиться в першому октанті та обмежена площиною  $y = 2a$ .

**Розв’язання.** Поверхня, площу якої потрібно обчислити, – частина параболоїда з віссю обертання  $Oy$ , яка знаходиться в першому октанті та обмежена площиною  $y = 2a$ , що паралельна координатній площині  $Oxz$  (рис. 1.14 а). Спроекуємо поверхню на площину  $Oxz$ . Проекцією є чверть круга (рис. 1.14 б). Рівняння його межі знайдемо, виключаючи змінну  $y$  з

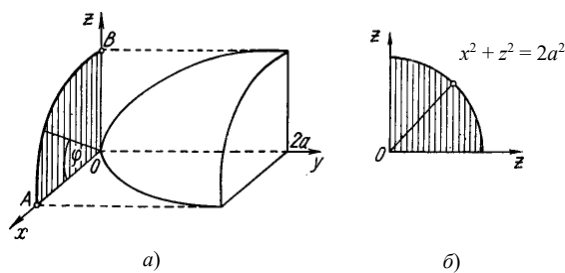


Рис. 1.14

рівнянь заданих поверхонь, тобто з системи  $\begin{cases} ay = x^2 + z^2, \\ y = 2a. \end{cases}$  Отже рівняння межі

має вигляд:  $x^2 + z^2 = 2a^2$ .

У зв'язку з тим, що проекція здійснювалася на площину  $Oxz$  ( $y = 0$ ), рівняння поверхні повинно бути розв'язане відносно змінної  $y$ , тому рівняння частини параболоїда запишемо у вигляді:  $y = \frac{x^2 + z^2}{a}$ .

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{a}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{a}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{a}\right)^2 + \left(\frac{2z}{a}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4z^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4(x^2 + z^2)}. \end{aligned}$$

Отже,

$$S = \frac{1}{a} \iint_{\sigma} \sqrt{a^2 + 4(x^2 + z^2)} dx dz.$$

Тут  $\sigma$  – область, що обмежена чвертю круга:

$$\sigma: \begin{cases} 0 \leq x \leq a\sqrt{2}, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{2a^2 - x^2}. \end{cases}$$

Оскільки інтегрування здійснюється по частині круга та в інтегральній функції під коренем стоїть сума квадратів  $x^2 + z^2$ , то доцільніше буде перейти до ПСК

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ z = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Тоді область  $\sigma$  в ПСК визначається умовами:

$$\sigma: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a\sqrt{2}, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + 4\rho^2} \rho d\rho \left\| \begin{array}{l} a^2 + 4\rho^2 = t^2 \\ 8\rho d\rho = 2tdt \Rightarrow \rho d\rho = \frac{tdt}{4} \\ \rho = 0 \Rightarrow t = a; \rho = a\sqrt{2} \Rightarrow t = 3a \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \varphi \left|_0^{\pi/2} \int_a^{3a} t \cdot \frac{tdt}{4} = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \right| \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_a^{3a} = \frac{\pi}{24a} (27a^3 - a^3) = \frac{13\pi a^2}{12} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Знайдемо шукану площу, проектуючи тепер задану поверхню на площину  $Oxy$  (рис. 1.15).

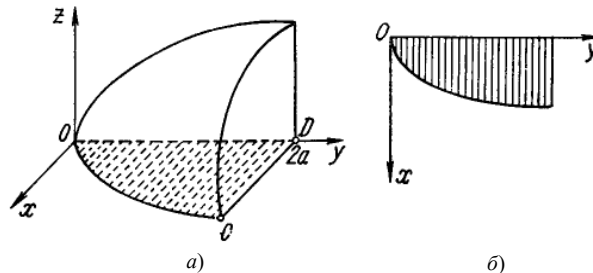


Рис. 1.15

Рівняння поверхні повинно бути розв'язане відносно змінної  $z$ ; враховуючи, що  $z \geq 0$ , отримаємо  $z = \sqrt{ay - x^2}$ . Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{ay - x^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{a}{2\sqrt{ay - x^2}}.$$

Отримуємо:

$$\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{ay - x^2} + \frac{a^2}{4(ay - x^2)}} = \frac{\sqrt{4ay + a^2}}{2\sqrt{ay - x^2}}.$$

Отже,

$$S = \frac{1}{2} \iint_{\sigma} \frac{\sqrt{4ay + a^2}}{2\sqrt{ay - x^2}} dx dy.$$

Тут область  $\sigma$  – проекція заданої поверхні на площину  $Oxy$ . Вона обмежена прямою  $y = 2a$  (проекція площини) та параболою  $ay = x^2$  (проекція параболоїда на площину  $z = 0$ ) (рис. 1.15 б). Таким чином,  $\sigma: \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{ay}, \\ 0 \leq y \leq 2a. \end{cases}$

Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \iint_{\sigma} \frac{\sqrt{4ay + a^2}}{2\sqrt{ay - x^2}} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2a} \sqrt{4ay + a^2} dy \int_0^{\sqrt{ay}} \frac{dx}{\sqrt{ay - x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2a} \sqrt{4ay + a^2} \cdot \arcsin \frac{x}{\sqrt{ay}} \Big|_0^{\sqrt{ay}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{2a} \sqrt{4ay + a^2} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) dy = \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{2a} \sqrt{4ay + a^2} dy \left\| \begin{array}{l} 4ay + a^2 = t^2 \\ 4ady = 2tdt \Rightarrow dy = \frac{tdt}{2a} \\ y = 0 \Rightarrow t = a; y = 2a \Rightarrow t = 3a \end{array} \right\| = \frac{\pi}{4} \int_a^{3a} t \cdot \frac{tdt}{2a} = \\ &= \frac{\pi}{8a} \int_a^{3a} t^2 dt = \frac{\pi}{8a} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_a^{3a} = \frac{\pi}{24a} \cdot (27a^3 - a^3) = \frac{13\pi a^2}{12} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Порівняння двох способів розв'язання вказує на те, що при проекції на площину  $Oxz$  розв'язання прикладу є простішим.

**Зауваження 1.5** Рекомендується проектувати поверхню на ту з координатних площин, у якій область інтегрування буде найпростішою.