

Функції комплексної змінної

Якщо задано закон f , згідно з яким кожному значенню z , яке належить множині E , відповідає певне значення $w \in E_1$, то кажуть, що задана **однозначна функція** $w = f(z)$, яка визначена на E та набуває значень в E_1 . Якщо значенню z відповідає декілька значень w , то функція є **багатозначною**.

Функцію комплексної змінної можна записати у вигляді

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \cdot \operatorname{Im} f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

де $u(x, y)$ та $v(x, y)$ – функції дійсних змінних x та y .

Існування границі функції комплексної змінної $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ еквівалентне одночасному існуванню границь дійсної та уявної частин $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y)$ та $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y)$. Аналогічно неперервність

функції $f(z)$ у точці z_0 еквівалентна неперервності функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$ у точці (x_0, y_0) .

Функція, неперервна у кожній точці області D , називається неперервною у цій області.

Елементарні функції комплексної змінної.

Введемо показникову функцію комплексної змінної $z = x + iy$ за правилом

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Тригонометричні та гіперболічні функції зв'язані з показниковою співвідношеннями

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Функції, які введені за цими формулами, по-перше, для дійсних значень аргументу $z = x$ співпадають з відповідними функціями дійсної змінної, та, по-друге, зберігають всі властивості функцій дійсної змінної.

Також є очевидними властивості

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z; \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z; \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z; \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin z.$$

Функції $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$ визначають як обернені до функцій e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ відповідно. Зокрема,

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + i \cdot 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а головне значення логарифмічної функції визначається як

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad (\text{величина } \ln|z| \text{ є функцією дійсного аргументу}).$$

Диференційовність функцій. Умови Коші-Рімана.

Околом точки z_0 називається внутрішність деякого круга на комплексній площині з центром у вказаній точці, тобто множина $|z - z_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Функція $f(z)$, яка визначена у деякому околі точки z_0 , називається **диференційовною** у цій точці, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

яку називають **похідною** від функції $f(z)$ в точці z_0 .

Функція $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ є диференційовною в точці $z = x + iy$ тоді та тільки тоді, коли виконуються **умови Коші-Рімана**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

при цьому

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Однозначну функцію $f(z)$, яка у всіх точках деякої області є неперервно диференційовною (має неперервну похідну), називають **аналітичною (регулярною)** в цій області.

Однозначні елементарні функції є аналітичними.

Елементарні функції комплексної змінної можна диференціювати за тими ж формулами, що і функції дійсної змінної.

Інтегрування комплексних функцій. Інтегральна формула Коші

Розглянемо спрямлювану криву Γ , в кожній точці якої задано функцію $f(z)$.

Інтегралом від функції $f(z)$ вздовж Γ називають

$$\lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k) = \int_{\Gamma} f(z) dz,$$

де криву поділено на малі частки $[z_k; z_{k+1}]$, ξ_k – довільна точка, яка лежить на відповідній частці кривої, а границя існує і не залежить від способу поділу кривої на частки та від способу вибору точок ξ_k .

Якщо Γ є кусочно гладкою кривою, а функція $f(z)$ – кусочно неперервна та обмежена, то цей інтеграл завжди існує. Він зводиться до обчислення вздовж кривої Γ криволінійних інтегралів за координатами від функцій дійсних змінних

$$\int_L f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \cdot \int_{\Gamma} v dx + u dy.$$

Теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична у однозв'язній області D , межею якої є кусочно гладкий контур Γ , та неперервна у замкненій області $D + \Gamma$, то інтеграл від цієї функції вздовж лінії Γ дорівнює нулю:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Теорема Коші для багатозв'язної області. Розглянемо область D , межа якої Γ складається з замкненої лінії Γ_0 та ліній $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, які лежать всередині Γ_0 та попарно не перетинаються. Тоді, якщо функція $f(z)$ аналітична у області D та неперервна у замкненій області $D + \Gamma$, то інтеграл від цієї функції вздовж повного контуру Γ дорівнює нулю:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{тобто} \quad \oint_{\Gamma_0^+} f(z) dz = \sum_i \oint_{\gamma_i^+} f(z) dz.$$

Інтегральна формула Коші. Розглянемо однозв'язну область D та замкнену криву Γ , яка повністю міститься у D разом з своєю внутрішністю G . Якщо функція $f(z)$ аналітична у області D , то для будь-якої точки $z_0 \in G$ має місце рівність

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Інтеграл $\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ називається **інтегралом Коші**.

Формула типу Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична у області D та неперервна у замкненій області $D + \Gamma$, то у довільній внутрішній точці області $z_0 \in D$ функція $f(z)$ має похідну будь-якого порядку, та

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Приклад 1. Зобразити геометричне місце точок, які задовольняють умові $|z + 1 - 2i| = 3$.

Розв'язання.

$$z = x + i y$$

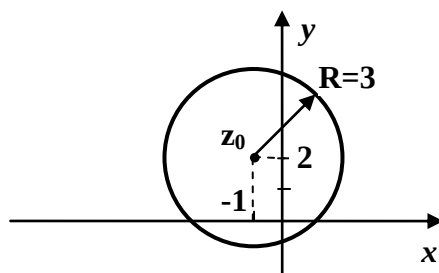
$$z + 1 - 2i = x + i y + 1 - 2i = (x + 1) + (y - 2)i$$

$$|(x + 1) + (y - 2)i| = 3$$

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = 3$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

Це рівняння кола з центром у точці $C(-1; 2)$, яка відповідає комплексному числу $z_0 = -1 + 2i$. Радіус кола дорівнює $R = 3$.



Приклад 2. Обчислити значення функцій комплексної змінної.

$$\text{а) } \sin(5 - i); \quad \text{б) } \cos(2 - 3i); \quad \text{в) } \operatorname{Ln}(-1); \quad \text{г) } \operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i).$$

Розв'язання.

а) $\sin(5-i)$.

1 спосіб. Значення синуса комплексного аргументу можна обчислити з використанням зв'язку цієї тригонометричної та показникової функції.

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz});$$

$$\begin{aligned}\sin(5-i) &= \frac{1}{2i}(e^{i(5-i)} - e^{-i(5-i)}) = \frac{1}{2i}(e^{5i-i^2} - e^{-5i+i^2}) = \frac{1}{2i}(e^{5i+1} - e^{-5i-1}) = \\ &= \frac{1}{2i}(e^{1+5i} - e^{-1-5i}) = \frac{1}{2i}(e^1(\cos 5 + i \sin 5) - e^{-1}(\cos(-5) + i \sin(-5))) = \\ &= \frac{i}{2i^2}(e^1(\cos 5 + i \sin 5) - e^{-1}(\cos 5 - i \sin 5)) = -\frac{i}{2}(e^1 \cos 5 + i e^1 \sin 5 - e^{-1} \cos 5 + i e^{-1} \sin 5) = \\ &= \frac{1}{2}(-i e^1 \cos 5 - i^2 e^1 \sin 5 + i e^{-1} \cos 5 - i^2 e^{-1} \sin 5) = \\ &= \frac{1}{2}(-i e^1 \cos 5 + e^1 \sin 5 + i e^{-1} \cos 5 + e^{-1} \sin 5) = \frac{1}{2}(e^1 + e^{-1}) \sin 5 - i \cdot \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}) \cos 5 = \\ &= ch 1 \cdot \sin 5 - i \cdot sh 1 \cdot \cos 5.\end{aligned}$$

2 спосіб. Для тригонометричних функцій комплексної змінної є вірними всі властивості функцій дійсної змінної.

$$\sin(5-i) = \sin 5 \cos i - \cos 5 \sin i = \begin{cases} \cos iz = ch z \\ \sin iz = i \cdot sh z \end{cases} = \sin 5 ch 1 - i \cos 5 sh 1.$$

б) $\cos(2-3i)$.

1 спосіб.

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz});$$

$$\begin{aligned}\cos(2-3i) &= \frac{1}{2}(e^{i(2-3i)} + e^{-i(2-3i)}) = \frac{1}{2}(e^{2i-3i^2} + e^{-2i+3i^2}) = \frac{1}{2}(e^{2i+3} + e^{-2i-3}) = \\ &= \frac{1}{2}(e^{3+2i} + e^{-3-2i}) = \frac{1}{2i}(e^3(\cos 2 + i \sin 2) + e^{-3}(\cos(-2) + i \sin(-2))) = \\ &= \frac{1}{2}(e^3(\cos 2 + i \sin 2) + e^{-1}(\cos 2 - i \sin 2)) = \frac{1}{2}(e^3 \cos 2 + i e^3 \sin 2 + e^{-3} \cos 2 - i e^{-3} \sin 2) = \\ &= \frac{1}{2}(e^3 + e^{-3}) \cos 2 + i \cdot \frac{1}{2}(e^3 - e^{-3}) \sin 2 = ch 3 \cdot \cos 2 + i \cdot sh 3 \cdot \sin 2.\end{aligned}$$

2 спосіб.

$$\cos(2-3i) = \cos 2 \cos 3i + \sin 2 \sin 3i = \begin{cases} \cos iz = ch z \\ \sin iz = i \cdot sh z \end{cases} = \cos 2 ch 3 + i \sin 2 sh 3.$$

в) $Ln(-1)$.

$$Ln z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$z = -1, \quad x = \operatorname{Re} z = -1, \quad y = \operatorname{Im} z = 0,$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1;$$

$$\varphi = \arg z = \arccos \frac{x}{|z|} = \arccos(-1) = \pi;$$

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \cdot \pi + 2\pi k i = (1 + 2k)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{г) } \operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i).$$

$$z = \sqrt{3} + i, \quad x = \operatorname{Re} z = \sqrt{3}, \quad y = \operatorname{Im} z = 1,$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2;$$

$$\varphi = \arg z = \arccos \frac{x}{|z|} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6};$$

$$\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i \cdot \frac{\pi}{6} + 2\pi k i = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 3. З'ясувати, чи є функція $w = e^z$ аналітичною.

Розв'язання.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

$$\text{Отже, } u(x, y) = e^x \cos y; \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Обчислимо частинні похідні цих функцій.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y; & \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y; & \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

Умови Коші – Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ виконуються для будь-яких дійсних x та y ,

отже, функція $w = e^z$ є аналітичною на всій комплексній площині.

Приклад 4. Обчислити інтеграли по замкнутому контуру.

$$\text{а) } \oint_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{z+2i}; \quad \text{б) } \oint_{|z|=2} \frac{\sin z dz}{z - \frac{\pi}{6}}; \quad \text{в) } \oint_{|z+2i|=2} \frac{dz}{z^2+1};$$

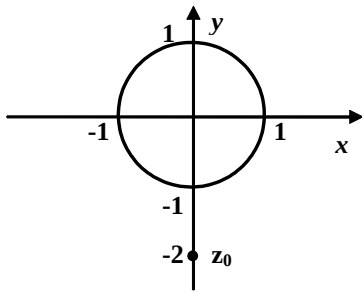
$$\text{г) } \oint_{|z|=2} \frac{z dz}{z^2+2z-3}; \quad \text{д) } \oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z dz}{z(z-2)^2}.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \oint_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{z+2i}.$$

Функція $f(z) = \frac{z^2}{z+2i}$ аналітична на всій комплексній площині, крім точки $z_0 = -2i$.

Побудуємо контур інтегрування – коло $|z| = 1$.



Точка $z_0 = -2i$ розташована поза колом $|z| = 1$, тому $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{z + 2i} = 0$.

$$\text{б) } \oint_{|z|=2} \frac{\sin z \, dz}{z - \frac{\pi}{6}}.$$

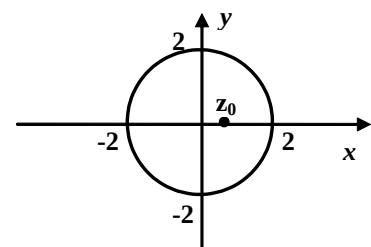
Функція $f(z) = \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{6}}$ аналітична на всій комплексній площині, крім

точки $z_0 = \frac{\pi}{6}$. Побудуємо контур інтегрування – коло $|z| = 2$. Точка $z_0 = \frac{\pi}{6}$ – внутрішня точка

цього кола, функція $\varphi(z) = \sin z$ аналітична, тому за інтегральною формулою Коші

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz \quad \text{або} \quad \oint_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot \varphi(z_0) \quad \text{отримаємо}$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z \, dz}{z - \frac{\pi}{6}} = 2\pi i \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$



$$\text{в) } \oint_{|z+2i|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Функція $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ аналітична на всій комплексній площині, крім точок, в яких

справджується рівність $z^2 + 1 = 0$, тобто крім точок $z_1 = i$ та $z_2 = -i$. Побудуємо контур інтегрування – лінію $|z + 2i| = 2$. Це коло з центром в точці $z_0 = -2i$ та радіусом $R = 2$.

Точка $z_2 = -i$ – внутрішня точка цього кола, точка $z_1 = i$ лежить поза колом. Тоді підінтегральну функцію $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ можна

записати у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z + i}$, де $\varphi(z) = \frac{1}{z - i}$ – функція,

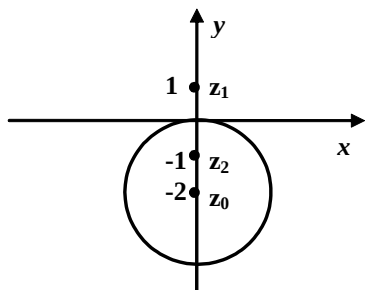
аналітична у всіх точках області, обмеженої контуром інтегрування. Тоді згідно з інтегральною формулою Коші

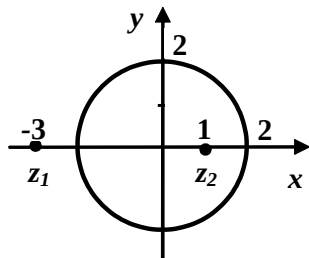
$$\oint_{|z+2i|=2} \frac{dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \cdot \varphi(-i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{-i - i} = \frac{2\pi i}{-2i} = -\pi.$$

$$\text{г) } \oint_{|z|=2} \frac{z \, dz}{z^2 + 2z - 3}.$$

Функція $f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 3}$ аналітична на всій комплексній площині, крім точок, в яких

справджується рівність $z^2 + 2z - 3 = 0$, тобто крім точок $z_1 = -3$ та $z_2 = 1$. Побудуємо контур інтегрування – лінію $|z| = 2$. Це коло з центром у початку координат та радіусом $R = 2$. Точка





$z_2 = 1$ – внутрішня точка цього кола, точка $z_1 = -3$ лежить поза колом. Тоді підінтегральну функцію $f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 3}$ можна записати у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z-1}$, де $\varphi(z) = \frac{z}{z+3}$ – функція, аналітична у всіх точках області, обмеженої контуром інтегрування. Згідно з

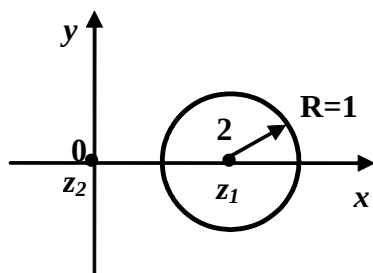
інтегральною формулою Коші

$$\oint_{|z|=2} \frac{z dz}{z^2 + 2z - 3} = 2\pi i \cdot \varphi(1) = 2\pi i \cdot \frac{1}{1+3} = 2\pi i \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}.$$

д) $\oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z dz}{z(z-2)^2}.$

Функція $f(z) = \frac{\cos z}{z(z-2)^2}$ аналітична на всій комплексній площині, крім точок, в яких справджується рівність $z(z-2)^2 = 0$, тобто крім точок $z_1 = 2$ та $z_2 = 0$.

Побудуємо контур інтегрування – лінію $|z-2|=1$. Це коло з центром у точці $z_1 = 2$ та радіусом $R=1$. Точка $z_1 = 2$ – внутрішня точка цього кола, точка $z_2 = 0$ лежить поза колом. Тоді підінтегральну функцію $f(z) = \frac{\cos z}{z(z-2)^2}$ можна записати у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-2)^2}$, де $\varphi(z) = \frac{\cos z}{z}$ – функція, аналітична у всіх точках області, обмеженої контуром інтегрування.



Для обчислення інтеграла від цієї функції можна застосувати інтегральну формулу типу Коші

$$\varphi^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz.$$

Для $k=1$ отримаємо $\oint_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^2} dz = 2\pi i \cdot \varphi'(z_0).$

Тоді

$$\varphi'(z) = \left(\frac{\cos z}{z} \right)' = \frac{-\sin z \cdot z - \cos z}{z^2}, \quad \varphi'(2) = -\frac{2\sin 2 + \cos 2}{4},$$

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z dz}{z(z-2)^2} = 2\pi i \cdot \varphi'(2) = -\frac{2\sin 2 + \cos 2}{4} \cdot 2\pi i = -\frac{2\sin 2 + \cos 2}{2} \cdot \pi i.$$