

§ 1. Функція, її границя та неперервність

1.1 Поняття функції декількох змінних. Лінії та поверхні рівня

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ і $G \subset \mathbb{R}$ — дві непорожні множини (нагадаємо, що $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел). Якщо кожній впорядкованій парі дійсних чисел $(x; y) \in D$ за певним правилом ставиться у відповідність одне і тільки одне число $z \in G$, то кажуть, що на множині D задано *функцію двох змінних* $z = f(x, y)$. Змінні x, y — незалежні змінні (аргументи), z — залежна змінна. Множину D називають *областю визначення (існування) функції*, а множину G , що складається з усіх чисел виду $f(x, y)$, де $(x, y) \in D$, — *множиною (областю) значень* функції. Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ називають частинним (окремим) її значенням і позначають $f(x_0; y_0)$, або $f(M_0)$.

Областю визначення функції $z = f(x, y)$ в простих випадках є частина площини xOy (обмежена замкненою лінією, причому точки цієї лінії (межі області) можуть належати або не належати області визначення), або вся площина, або сукупність декількох частин площини xOy .

Якщо множина D є областю, а функція $f(x, y)$ неперервна, то сукупність точок простору з координатами (x, y, z) , де $z = f(x, y)$ утворює деяку поверхню, яку й називають *графіком* функції (геометричним зображенням функції). Проекція її на площину xOy збігається з областю D . Таким чином, графік — це повна таблиця функції: у ньому міститься вся інформація про функцію. Якщо побудувати графік, то можна «побачити» функцію. Форма графіка відображає властивості функції.

Аналогічно визначаються функція трьох змінних $u = f(x, y, z)$ та більшого скінченного числа змінних $u = f(x, y, z, \dots, t)$. Областю визначення функції трьох змінних є увесь простір або його частина. Усі такі функції називаються функціями багатьох змінних.

Із аналітичної геометрії відомо, що точки площини можна задавати впорядкованими парами дійсних чисел, а точки тривимірного простору — впорядкованими трійками, а саме їх координатами. Тому функцію двох змінних $z = f(x, y)$ можна розглядати як функцію точки $M(x; y)$: $f(x, y) = f(M)$; функцію трьох змінних $u = f(x, y, z)$ — як функцію точки $M(x; y, z)$: $f(x, y, z) = f(M)$ і т.д. Для функції багатьох змінних $u = f(x, y, z, \dots, t)$ використовують запис $u = f(M)$, де $M = M(x, y, z, \dots, t)$.

Надалі будемо розглядати функції двох або трьох змінних. Це зумовлено тим, що ми проживаємо у тривимірному просторі.

Якщо для функції, заданої аналітично, не вказують явно область визначення, то в цьому разі вважають, що область визначення функції $z = f(x, y)$ ($u = f(x, y, z)$) збігається з областю визначення виразу $f(x, y)$ ($f(x, y, z)$), тобто з множиною тих значень x і y (x, y і z), для яких вираз $f(x, y)$ ($f(x, y, z)$) має зміст. Для функції трьох і більшого числа змінних геометричного зображення немає.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається лінія $f(x, y) = c$ на площині xOy , в точках якої функція набуває одного й того самого значення $z = c$.

Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається поверхня $f(x, y, z) = c$, в точках якої функція зберігає стає значення $u = c$.

1.2 Границя і неперервність функції

Поняття границі і неперервності функції декількох змінних залишаються такими ж, як і у випадку функцій однієї дійсної змінної.

Околом (δ – околom) точки M_0 називається множина усіх точок M , таких що $|\overline{M_0 M}| < \delta$. З цього випливає, що на площині δ – околom точки $M_0(x_0, y_0)$ буде відкритий круг з радіусом δ і центром в точці M_0 , а в просторі δ – околom точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – відкрита куля з радіусом δ і центром в точці M_0 .

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D площини xOy і точка $M_0(x_0, y_0)$ є граничною для цієї області, тобто в будь-якому околі цієї точки є точки із D , відмінні від M_0 .

Число A називається границею функції двох змінних $z = f(x, y) = f(M)$ при $M \rightarrow M_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий δ – окіл точки $M_0(x_0, y_0)$, що для будь-якої точки $M(x, y) \in D$ з цього околу (за винятком точки M_0) справджується нерівність

$$|f(M) - A| < \varepsilon \quad \text{або} \quad |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Це позначається так

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

оскільки при $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$, очевидно, $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$.

Відзначимо, що до точки M_0 можна наближатись різними шляхами. У випадку існування границі ми повинні отримувати одне і те саме значення по кожному зі шляхів. Тому, якщо можна вказати хоча б два шляхи руху до точки M_0 , по яких отримаємо різні значення, то в точці M_0 функція не має границі.

Функція двох змінних називається нескінченно малою, якщо її границя рівна нулю.

Функція двох змінних $u = f(M)$ називається неперервною в точці $M_0 \in D$, якщо існує границя функції в цій точці і ця границя дорівнює $f(M_0)$, тобто $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$.

Точки, в яких умова неперервності функції порушується, називаються точками розриву функції. Точки розриву можуть бути ізольовані, утворювати лінії розриву, поверхні розриву.

Оскільки означення границі та неперервності функції декількох змінних за формою дослівно збігаються з відповідними означеннями для функції однієї змінної, для випадку функції декількох змінних зберігаються всі властивості границь функцій і неперервних функцій однієї змінної, крім, природно, тих, для яких суттєвою є впорядкованість точок числової прямої.

Функція називається неперервною в області D , якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.