

## Приклади розв'язання задач

1. Знайти та зобразити області визначення функцій:

а)  $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$ ;

б)  $z = \frac{5x + 2y}{x^2 - y^2}$ ;

в)  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ ;

г)  $z = \sqrt{(x-2)(y+2)}$ ;

д)  $z = \arccos(x - y)$ ;

е)  $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 3)$ ;

є)  $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ ;

ж)  $u = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16}}$ .

► а) Функція визначена за умови  $x^2 + y^2 - 4 > 0$ , тобто  $x^2 + y^2 > 4$ . Геометрично – це частина площини  $xOy$ , що лежить поза колом із центром  $O(0;0)$  і радіусом  $r = 2$  (точки кола  $x^2 + y^2 = 4$  в область  $D$  не входять) (рис.1). ◀

► б) Областю визначення цієї функції є множина  $\{(x, y)\}$  усіх точок площини  $xOy$ , для яких  $y^2 \neq x^2$ , тобто коли  $y \neq \pm x$ . Геометрично – це множина усіх точок площини, що не лежать на бісектрисах першого й третього та другого й четвертого координатних кутів (рис.2). ◀

► в) Областю визначення такої функції є множина всіх точок площини  $xOy$ , для яких  $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ , тобто  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Це круг із центром у початку координат і радіусом  $r = 3$  разом з його межею, тобто колом  $x^2 + y^2 = 9$  (рис.3). ◀

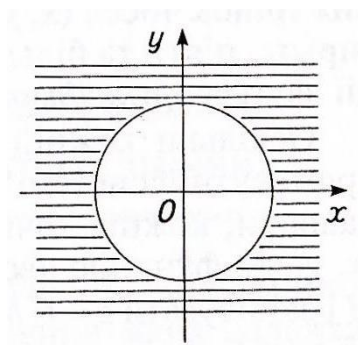


Рисунок 1

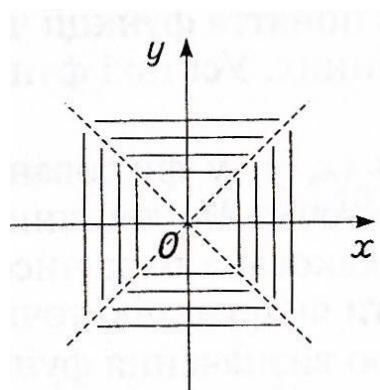


Рисунок 2

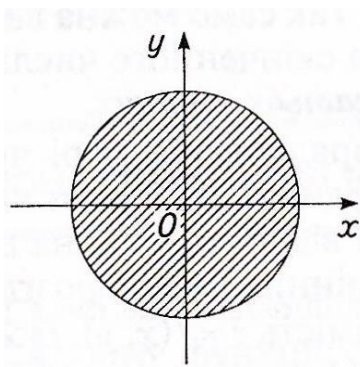


Рисунок 3

► г) Область існування цієї функції визначається з умови, що  $(x-2)(y+2) \geq 0$ . Ця нерівність еквівалентна двом системам нерівностей:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ y+2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-2 \leq 0, \\ y+2 \leq 0. \end{cases}$$

Перша система дає розв'язки  $x \geq 2, y \geq -2$ , а друга –  $x \leq 2, y \leq -2$ . Область визначення заданої функції зображена на (рис.4). ◀

► д) Функція визначена у тій частині площини  $xOy$ , координати точок якої задовольняють подвійну нерівність  $-1 \leq x-y \leq 1$ . Це смуга, обмежена двома паралельними прямими  $y = x+1$  і  $y = x-1$  (рис.5). ◀

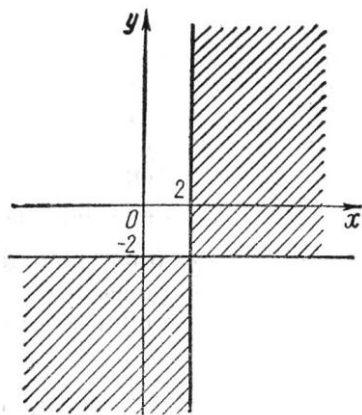


Рисунок 4

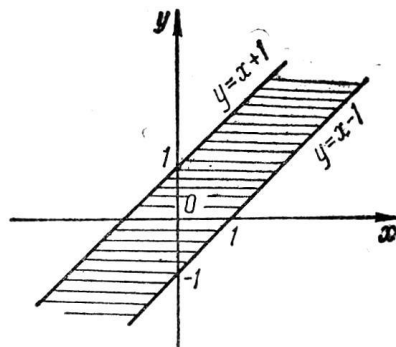


Рисунок 5

► е) Функція визначена за умови  $-1 \leq x^2 + y^2 - 3 \leq 1$ , яка рівносильна умові  $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ . Межові лінії області визначення є колами  $x^2 + y^2 = 2$  і  $x^2 + y^2 = 4$ , які також належать області.

Отже, областю визначення цієї функції є множина точок площини  $xOy$ , що лежать між колами  $x^2 + y^2 = 2$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ , і точок, що належать цим колам.

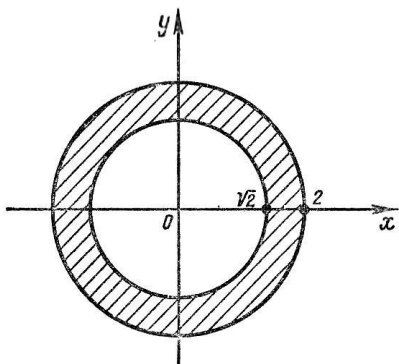


Рисунок 6

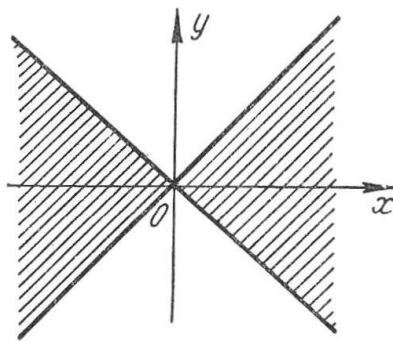


Рисунок 7

► є) Областю визначення цієї функції є множина точок  $(x, y)$ , для яких  $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} > 0$ .

Цей дріб додатний, коли додатний його знаменник, тобто  $x^2 - y^2 > 0$ , або  $y^2 < x^2$ , а це рівнозначне умові  $|y| < |x|$ . Розглянемо два можливі випадки:

1) Якщо  $x > 0$ , то  $|x| = x$  і тоді  $|y| < x$ , або  $-x < y < x$ . Геометрично це означає, що областю D визначення функції є частина правої півплощини (оскільки розглядається значення  $x > 0$ ), обмеженої прямими  $y = x$  і  $y = -x$  (точки, що лежать на цих прямих в область D не входять);

2) якщо  $x < 0$ , то  $|x| = -x$ , і тоді  $|y| < -x$ , або  $x < y < -x$ , що визначає ту частину лівої півплощини, яка знаходиться між прямими  $y = -x$  і  $y = x$  (точки, що лежать на цих прямих в область D не входять) (рис.7). ◀

► ж) Функція визначена для тих значень змінних  $x, y$  і  $z$ , для яких

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} + 1 \geq 0. \quad (1)$$

Звідси

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} \geq -1, \quad \text{або} \quad \frac{z^2}{16} \leq 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}. \quad (2)$$

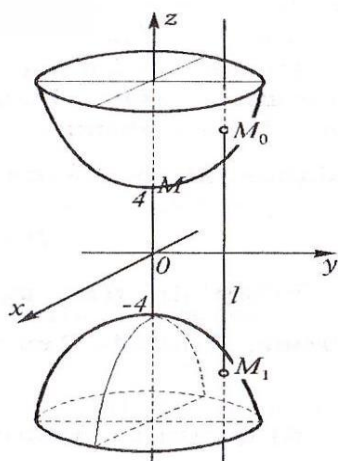


Рисунок 8

Межа цієї області визначається рівнянням  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1$ .

Це рівняння виражає поверхню, яка називається двопорожнинним гіперболоїдом (рис.8).

Проведемо в просторі пряму  $l \parallel Oz$ , яка перетне двопорожнинний гіперболоїд в точках  $M_0$  і  $M_1$ .

Звідси видно, що умова (2), а отже, і умова (1) виконуються для всіх зовнішніх точок простору по відношенню до поверхні гіперболоїда. ◀

2. Знайти лінії рівня функцій:

а)  $z = \frac{y}{x}$ ;      б)  $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;      в)  $z = x^2 - y^2$ .

► а) Лінії рівня визначаються рівнянням  $\frac{y}{x} = c$ , де  $c$  – довільна стала; звідси  $y = cx$ .

Геометрично це рівняння описує сім'ю прямих на площині  $xOy$ , що проходять через початок координат, за виключенням самого початку координат (рис.9). ◀

► б) Ця функція двох змінних визначена скрізь на площині  $xOy$ , крім точки  $O$  – початку координат. Покладемо  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c$ ,  $|c| \leq 1$ , тоді

$$x^2 = c^2(x^2 + y^2) \Rightarrow (1 - c^2)x^2 = c^2y^2.$$

$$\text{Звідси, } (1 - c)x^2 - c^2y^2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{1 - c^2}x - cy)(\sqrt{1 - c^2}x + cy) = 0.$$

Отже, лініями рівня є дві сім'ї прямих:  $(\sqrt{1 - c^2}x + cy) = 0$  і  $(\sqrt{1 - c^2}x - cy) = 0$ , що проходять через початок координат, за виключенням самого початку координат. ◀

► в) Функція  $z = x^2 - y^2$  визначає в просторі поверхню – гіперболічний параболоїд (рис.10). Рівняння ліній рівня має вигляд  $x^2 - y^2 = C$ . Геометрично – це рівносторонні гіперболи: якщо  $C > 0$  – гіперболи з вершинами на осі  $Ox$ ;  $C < 0$  – гіперболи з вершинами на осі  $Oy$ ; якщо  $C = 0$  одержуємо прямі  $y = \pm x$  – асимптоти цих гіпербол (рис.11). ◀

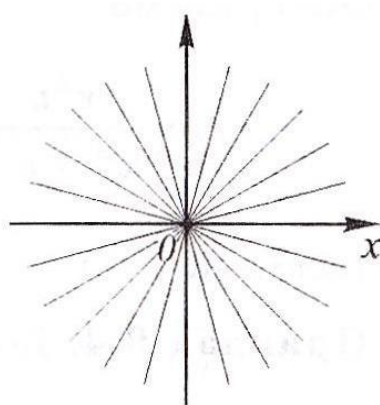


Рисунок 9

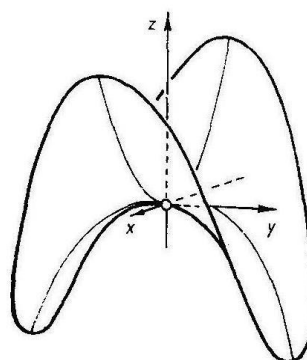


Рисунок 10

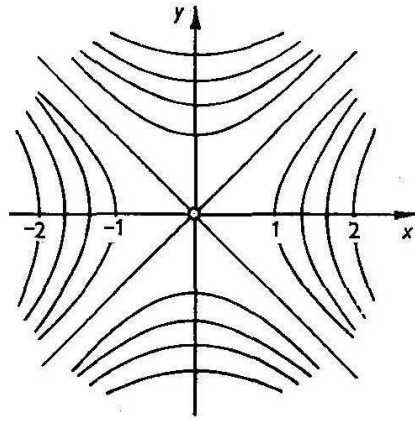


Рисунок 11

3. Знайти поверхні рівня функцій:

а)  $u = x^2 + y^2 - z$ ;      б)  $u = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;

в)  $u = x^2 + y^2 - z^2$ .

► а) Поверхні рівня  $f$  визначаються з рівняння  $x^2 + y^2 - z = C$ , або  $z = x^2 + y^2 + C$ . Це – сім'я параболоїдів обертання з віссю  $Oz$ , вершини яких лежать на цій же осі (рис.12). ◀

► б) Оскільки поверхні рівня визначаються рівнянням  $f(x, y, z) = c$ , то маємо  $\arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c$ . Звідси  $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{tg} c$ , або  $z^2 = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}^2 c$ ,  $x^2 + y^2 \neq 0$ , а це рівняння задає сім'ю кругових конусів із спільною вершиною в початку координат, не включаючи цю вершину, і спільною віссю  $Oz$ . ◀

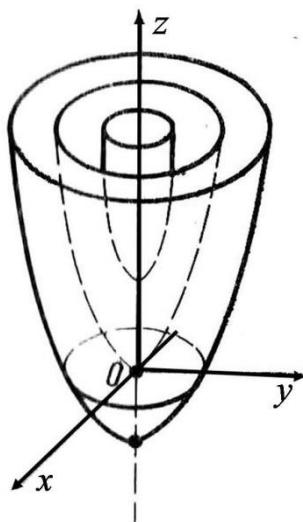


Рисунок 12

► в) Рівняння сім'ї поверхонь рівня має вигляд  $x^2 + y^2 - z^2 = C$ .

Якщо  $C = 0$ , то  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  – конус; якщо  $C > 0$ , то  $x^2 + y^2 - z^2 = C$  – сім'я однопорожнинних гіперболоїдів; якщо  $C < 0$ , то  $x^2 + y^2 - z^2 = C$  – сім'я двопорожнинних гіперболоїдів.

◀

4. З'ясувати, чи існують такі границі:

а)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ;      б)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y}{x + y}$ .

► а) Нехай точка  $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$ . Розглянемо зміну  $x$  і  $y$  вздовж прямої  $y = kx$ . Маємо

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Таким чином, наближаючись до точки  $O(0;0)$  по різних прямих, що відповідають різним значенням  $k$ , отримуємо різні граничні значення.

Звідси випливає, що границя цієї функції в точці  $O(0;0)$  не існує. ◀

► б) Нехай точка  $(x,y)$  наближається до точки  $(0;0)$  уздовж прямої  $y = kx$ . При  $k \neq -1$

маємо  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-kx}{x+kx} = \frac{1-k}{1+k}$ . Помічаємо, що в досить малому околі точки  $(0;0)$  є

точки, в яких значення функції дорівнює нулю, (при  $k = 1$ ) і точки, в яких значення функції дорівнює одиниці (при  $k = 0$ ).

Отже, границя функції в точці  $(0;0)$  не існує. ◀

5. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} \frac{2-xy}{x^2-y^2}; \quad \text{б) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}};$$

$$\text{в) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}; \quad \text{г) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\sin 2xy}{x}.$$

► а) Використовуючи теорему про арифметичні операції над границями, а також те, що границя сталої дорівнює значенню цієї сталої, і  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} x = 1$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} y = 3$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} \frac{2-xy}{x^2-y^2} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} (2-xy)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} (x^2-y^2)} = \\ &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} 2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} x - \lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} y}{\lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} x \cdot x - \lim_{(x,y) \rightarrow (1;3)} y \cdot y} = \frac{2-1 \cdot 3}{1 \cdot 1 - 3 \cdot 3} = \frac{1}{8}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\text{► б) Запишемо дану функцію у вигляді } \left[ (1+xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2y}{x+y}}.$$

Оскільки  $t = xy \rightarrow 0$ , при  $\begin{pmatrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2 \end{pmatrix}$ , то  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ . Так як  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2y}{x+y} = 2$ ,

то шукана границя дорівнюватиме  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \left[ (1+xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2y}{x+y}} = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2y}{x+y}} = e^2$ . ◀

►в) Перейдемо до полярних координат (цей спосіб зручно використовувати при обчисленні границь в точці  $(0;0)$ ), покладаючи  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , де  $0 \leq \rho < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Тоді

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi.$$

Оскільки функція  $\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$  обмежена, а  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$  при  $(x; y) \rightarrow (0; 0)$ , то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0 \text{ (як добуток нескінченно малої функції на обмежену).} \blacktriangleleft$$

►г) Маємо невизначеність типу  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Покладемо  $2xy = t$ . Тоді при  $x \rightarrow 0$  і  $y \rightarrow 3$

$$\text{маємо } t \rightarrow 0 \text{ і } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\sin 2xy}{x} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\sin t}{t} \cdot 2y = 1 \cdot 6 = 6. \blacktriangleleft$$

**6. Знайти точки розриву функцій:**

а)  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$

б)  $u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z};$

в)  $z = \frac{x + y}{x^3 + y^3};$

г)  $u = \frac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}.$

►а) Функція  $x^2 + y^2$  неперервна для будь-яких значень  $x$  і  $y$  як многочлен від  $x$  і  $y$

. За теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій функція  $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  також неперервна для будь-яких  $x$  і  $y$ , крім точки  $(0;0)$ , де знаменник  $\sqrt{x^2 + y^2}$  перетворюється в нуль. Тому точка  $(0;0)$  є точкою нескінченного розриву.  $\blacktriangleleft$

►б) Функція розривна в кожній точці параболоїда обертання  $z = x^2 + y^2$ . Він є поверхнею розриву даної функції.  $\blacktriangleleft$

►в) Оскільки чисельник і знаменник дробу є неперервними функціями, то функція може мати розрив лише в тих точках, де знаменник  $x^3 + y^3 = 0$ . Звідси знаходимо  $y = -x$ . Отже, функція має розриви в точках прямої  $y = -x$ .

$$\begin{aligned} \text{Нехай } x_0 \neq 0, y_0 \neq 0 \text{ і } x_0 + y_0 \neq 0. \text{ Тоді } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x + y}{x^3 + y^3} = \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1}{x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2}. \end{aligned}$$

Отже, точки прямої  $y = -x$ . ( $x \neq 0$ ) є точками усувного розриву функції  $z$ .

Із співвідношення  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = +\infty$  випливає, що точка  $(0;0)$  є

точкою нескінченного розриву. ◀

►г) Функція не визначена в точках, у яких знаменник перетворюється в нуль. Тому вона має поверхню розриву – площину  $2x + 3y - z + 4 = 0$ . ◀