

Приклади розв'язання задач

28. Знайти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні $z = x^2 + 2y^2$ в точці $M(1;1;3)$.

► Оскільки поверхню задано рівнянням, розв'язаним відносно z , то дотична площина визначається рівнянням (20), а нормаль – рівнянням (21). Знайдемо частинні похідні f'_x і f'_y і обчислимо їхні значення в точці $\tilde{M}(1;1)$. Отже,

$$f'_x = 2x, \quad f'_x(1;1) = 2; \quad f'_y = 4y, \quad f'_y(1;1) = 4.$$

Підставимо ці значення і координати точки M відповідно у рівняння (20) і (21), одержимо рівняння дотичної площини

$$z - 3 = 2(x - 1) + 4(y - 1), \text{ або } 2x + 4y - z - 3 = 0$$

і рівняння нормалі $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}$. ◀

29. Скласти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до поверхні, заданої рівнянням $e^{xyz} + \sqrt{x^2 + y^2} - z^3 = 6$, в точці $M(4;3;0)$.

► Рівняння поверхні задано в неявному вигляді $F(x, y, z) = 0$. У нашому випадку маємо $F(x, y, z) = e^{xyz} + \sqrt{x^2 + y^2} - z^3 - 6$.

Знайдемо частинні похідні

$$F'_x = yze^{xyz} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad F'_y = xze^{xyz} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad F'_z = xye^{xyz} - 3z,$$

та їх значення в точці $M(4;3;0)$

$$F'_x(M) = 0,8; \quad F'_y(M) = 0,6; \quad F'_z(M) = 12.$$

Скориставшись формулами (22) і (23), одержимо шукані рівняння дотичної площини

$$4x + 3y + 60z - 25 = 0 \text{ і рівняння нормалі } \frac{x-4}{0,8} = \frac{y-3}{0,6} = \frac{z}{12}, \text{ або } \frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{60}. \quad \blacktriangleleft$$

30. Обчислити похідну функції $z = \ln(6x + 7y)$ у точці $M(-2;2)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(2;-1)$.

► Знаходимо орт $\vec{l}$, що має заданий напрям, $\overrightarrow{MN} = (2 + 2; -1 - 2) = (4; -3) = 4\vec{i} - 3\vec{j}$,

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

$$\text{Отже, } \vec{l} = \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right), \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = -\frac{3}{5}.$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці $M(-2;2)$: $f'_x = \frac{6}{6x+7y}$, $f'_y = \frac{7}{6x+7y}$.

$$\text{Тоді } f'_x(M) = \frac{6}{6 \cdot (-2) + 7 \cdot 2} = 3,$$

$$f'_y(M) = \frac{7}{6 \cdot (-2) + 7 \cdot 2} = \frac{7}{2}.$$

За формулою (24) знайдемо похідну цієї функції в точці M за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$. Таким чином, $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_M = 3 \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 0,3$; тобто задана функція в точці M зростає в напрямі $\overrightarrow{MN}$ зі швидкістю 0,3. ◀

31. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $P_1(1;2;-1)$ за напрямом від точки $P_1(1;2;-1)$ до точки $P_2(2;4;-3)$.

► Знайдемо вектор $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ і відповідний йому одиничний вектор $\vec{l} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$.

Отже, напрямні косинуси вектора $\vec{l}$ такі:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

Знаходимо частинні похідні функції u

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - 2xz + y^2)'_x = 2x - 2z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 - 2xz + y^2)'_y = 2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 - 2xz + y^2)'_z = -2x. \quad \text{Їхні значення в точці } P_1(1;2;-1) \text{ будуть наступними}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_1} = 4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_1} = 4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_1} = -2.$$

Отже, згідно формули (25) шукана похідна в точці P_1 дорівнює $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_1} = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} + (-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}$. Оскільки $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_1} > 0$, то функція u в даному напрямку зростає. ◀

32. Знайти величину та напрям градієнта функції $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в точці $P(2;-1;1)$.

► Позначимо $x^2 + 2y^2 - z^2 - 5 = F(x, y, z)$. Тоді частинні похідні $F'_x(x, y, z) = 2x$, $F'_y(x, y, z) = 4y$, $F'_z(x, y, z) = -2z$.

За формулою (26) вираз градієнта цієї функції в довільній точці x, y, z буде мати вигляд $\overrightarrow{\text{grad}} u = 2x\vec{i} + 4y\vec{j} - 2z\vec{k}$.

Знаходимо $F'_x(P) = 4, F'_y(P) = -4, F'_z(P) = -2$, тоді $\overrightarrow{\text{grad}} u(P) = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$,
 $|\overrightarrow{\text{grad}} u(P)| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 6$.

Отже, $\cos \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$. ◀

33. Знайти похідну функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M(3;4)$ за напрямом градієнта функції z .

► Тут вектор $\vec{l}$ збігається з градієнтом функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M(3;4)$.

Знаходимо похідні:

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}; \quad z'_x|_M = \frac{6}{25}; \quad z'_y|_M = \frac{8}{25}.$$

За формулою (27) $\overrightarrow{\text{grad}} z = \frac{6}{25}\vec{i} + \frac{8}{25}\vec{j}$, тому $\frac{\partial z}{\partial l} = |\overrightarrow{\text{grad}} z| = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}$. ◀

34. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точці $P(1;1;1)$.

► Оскільки $\overrightarrow{\text{grad}} u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$,

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(1;1;1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad |\overrightarrow{\text{grad}} u(1;1;1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}, \text{ то } v_{\max} = 2\sqrt{3}.$$

Поверхнею рівня функції u , яка проходить через точку $P(1;1;1)$, є сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Найбільшою швидкість зростання функції u буде в напрямі радіуса цієї сфери, проведеного від початку координат до точки P . ◀

33. Розвинути функцію $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ за формулою Тейлора в околі точки $P_0(0;1)$ до членів другого порядку включно.

► Знаходимо частинні похідні функції $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ до другого порядку включно:

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \quad f''_{xx}(x, y) = \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}},$$

$$f''_{xy}(x, y) = -\frac{x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} - \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^3},$$

$$f''_{yy}(x, y) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{2x}{y^3} = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{2x}{y^3} \right).$$

В точці $P_0(0;1)$ маємо: $f(0;1) = 1; \quad f'_x(0;1) = 1; \quad f'_y(0;1) = 0;$

$$f''_{xx}(0;1)=1; \quad f''_{xy}(0;1)=-1; \quad f''_{yy}(0;1)=0.$$

Підставивши значення функції та її частинних похідних в точці $P_0(0;1)$ у формулу (28) при $n=2$, одержимо

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + o(x^2 + (y-1)^2) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - xy + o(x^2 + (y-1)^2). \blacktriangleleft$$

34. Функцію $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ розвинути за формулою Тейлора в околі точки $A(1;-2)$.

► Задана функція має частинні похідні будь-якого порядку. Знаходимо частинні похідні:

$$f'_x(x, y) = 4x - y - 6; \quad f'_y(x, y) = -x - 2y - 3; \quad f''_{xx}(x, y) = 4; \quad f''_{xy}(x, y) = -1; \quad f''_{yy}(x, y) = -2.$$

Обчислимо значення функції та її похідних у точці $A(1;-2)$:

$$\begin{aligned} f(1;-2) &= 5; & f'_x(1;-2) &= 0; & f'_y(1;-2) &= 0; \\ f''_{xx}(1;-2) &= 4; & f''_{xy}(1;-2) &= -1; & f''_{yy}(1;-2) &= -2. \end{aligned}$$

Усі частинні похідні 3-го і вище порядків дорівнюють нулю.

Скориставшись формулою (24), маємо

$$f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2. \blacktriangleleft$$

35. Дослідити функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ на локальний екстремум.

► Знаходимо частинні похідні першого порядку: $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$, $f'_y = 6xy - 12$.

Визначаємо стаціонарні точки, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9, \\ (x-y)^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| = 3, \\ |x-y| = 1, \end{cases} \text{ звідки}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -1, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

Отже, функція z має чотири стаціонарні точки:

$$M_1(2;1), \quad M_2(-2;-1), \quad M_3(1;2), \quad M_4(-1;-2).$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$, $f''_{yy} = 6x$ та обчислюємо визначник $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

$$\text{Для точки } M_1 \text{ маємо: } A = f''_{xx}(M_1) = 12; \quad B = f''_{xy}(M_1) = 6;$$

$C = f''_{yy}(M_1) = 12; \quad \Delta = 12 \cdot 12 - 6^2 = 108 > 0$. Оскільки $\Delta > 0, A > 0$, то точка M_1 є точкою мінімуму функції; $z_{\min} = f(2;1) = -28$.

$$\text{Для точки } M_2: \quad A = f''_{xx}(M_2) = -12; \quad B = f''_{xy}(M_2) = -6;$$

$C = f''_{yy}(M_2) = -12$; $\Delta = -12 \cdot (-12) - 36 = 108 > 0$. Оскільки $\Delta > 0$, $A < 0$, то точка M_2 є точкою максимуму функції; $z_{\max} = f(-2; -1) = 28$.

Для точки M_3 : $A = f''_{xx}(M_3) = 6$; $B = f''_{xy}(M_3) = 12$;

$C = f''_{yy}(M_3) = 6$; $\Delta = 6 \cdot 6 - 144 = -108 < 0$. Отже, в точці M_3 локального екстремуму немає.

Для точки M_4 : $A = f''_{xx}(M_4) = -6$; $B = f''_{xy}(M_4) = -12$;

$C = f''_{yy}(M_4) = -6$; $\Delta = -6 \cdot (-6) - 144 = -108 < 0$. В точці M_4 екстремуму немає. ◀

36. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

► Знайдемо частинні похідні функції:

$$f'_x = -3x^2 + 6xy, \quad f'_y = 3x^2 - 4y^3.$$

Визначаємо стаціонарні точки із системи рівнянь

$$\begin{cases} -3x^2 + 6xy = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

Як бачимо, функція z має дві стаціонарні точки $M_1(0;0)$ і $M_2(6;3)$. Знайдемо другі частинні похідні функції:

$$f''_{xx} = -6x + 6y, \quad f''_{xy} = 6x, \quad f''_{yy} = -12y^2.$$

Складемо детермінант Δ для кожної стаціонарної точки.

Для точки M_1 : $A = f''_{xx}(M_1) = 0$; $B = f''_{xy}(M_1) = 0$; $C = f''_{yy}(M_1) = 0$; $\Delta = 0$. Точка M_1 вимагає додаткового дослідження. Значення функції $z(x; y)$ в цій точці дорівнює нулю, тобто $z(0;0) = 0$. При $x < 0$; $y = 0$ маємо $z(x; y) = -x^3 > 0$, а при $x = 0$; $y \neq 0$ — $z(x; y) = -y^4 < 0$. Тому в будь-якому околі точки $M_1(0;0)$ функція $z(x; y)$ набуває значень, як більших від $z(0;0)$, так і менших від $z(0;0)$, а значить в точці M_1 функція $z(x; y)$ локального екстремуму не має.

Для точки M_2 : $A = f''_{xx}(M_2) = -18$; $B = f''_{xy}(M_2) = 36$; $C = f''_{yy}(M_2) = -108$; $\Delta = 648 > 0$.

Оскільки $\Delta > 0$, $A < 0$, то в точці M_2 функція має локальний максимум; $z_{\max} = 27$. ◀

37. Дослідити на екстремум функцію трьох змінних $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z$.

► Маємо функцію трьох незалежних змінних. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$f'_x = 2x + y - 1, \quad f'_y = 2y + x + 1, \quad f'_z = 2z - 2.$$

Згідно з необхідними умовами екстремуму визначимо стаціонарні точки із системи рівнянь
$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 2y + x + 1 = 0, \\ 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Звідси маємо $x = 1, y = -1, z = 1$.

Точка $M(1; -1; 1)$ є стаціонарною точкою. Щоб встановити чи має функція в цій точці екстремум, дослідимо диференціал другого порядку цієї функції, який визначається за формулою
$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$, то
$$d^2u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2dxdy = (dx + dy)^2 + dx^2 + dy^2 + 2dz^2 > 0$$
 при будь-яких dx, dy і dz , які одночасно не рівні нулю.

Цим саме ми довели, що в точці $M(1; -1; 1)$ функція u має мінімум; $u_{\min} = -2$. ◀

38. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в квадраті, обмеженому прямими $x = 0, x = -1, y = 0, y = 1$.

► Очевидно, задана функція задовольняє умовам теореми Вейєрштрасса в заданому квадраті, який позначимо $ABCO$ (рис.13).

1) Визначимо стаціонарні точки функції f , які містяться всередині заданої області. Знаходимо частинні похідні першого порядку $z'_x = 2x + 1; z'_y = 6y - 1$.

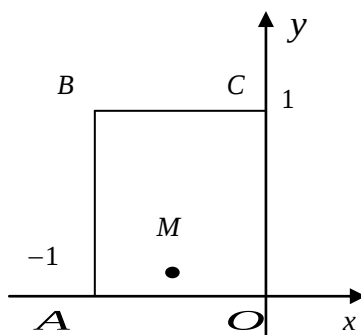


Рисунок 13

Координати стаціонарних точок шукаємо як розв'язки системи рівнянь
$$\begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ 6y - 1 = 0, \end{cases}$$
 з якої маємо $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{6}$.

Точка $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$ – стаціонарна точка всередині області.

Значення функції в цій точці $z(M) = -1/3$.

2) Визначимо найбільше і найменше значення заданої функції на межі області.

На відрізку ОС маємо $x = 0$, тому функція запишеться у вигляді $z(0; y) = \varphi(y) = 3y^2 - y$, $0 \leq y \leq 1$. Таким чином, треба дослідити на екстремум функцію однієї змінної. Знаходимо $\varphi'(y) = 6y - 1$, $6y - 1 = 0$, $y = \frac{1}{6}$, $\varphi\left(\frac{1}{6}\right) = z\left(0; \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$. Крім того, на кінцях проміжку $z(0; 0) = 0$, $z(C) = z(0; 1) = 2$.

На відрізку ВС маємо $y = 1$ і $z(x; 1) = \psi(x) = x^2 + x + 2$,

$-1 \leq x \leq 0$. Таким чином, $\psi'(x) = 2x + 1$, $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$,

$$\psi\left(-\frac{1}{2}\right) = z\left(-\frac{1}{2}; 1\right) = \frac{7}{4}, \quad z(B) = z(-1, 1) = 2.$$

На відрізку АВ: $x = -1$, $z(-1; y) = \chi(y) = 3y^2 - y$, $0 \leq y \leq 1$. На АВ маємо стаціонарну точку

$$y = \frac{1}{6}, \quad \chi\left(\frac{1}{6}\right) = z\left(-1; \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}, \quad z(A) = z(-1; 0) = 0.$$

На відрізку ОА: $y = 0$, $z(x; 0) = g(x) = x^2 + x$, $-1 \leq x \leq 0$. Тоді $g'(x) = 2x + 1$,

$$2x + 1 = 0, x = -\frac{1}{2}, \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = z\left(-\frac{1}{2}; 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

$$3) \text{ Порівнюючи значення } z(M) = z\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$z\left(-1; \frac{1}{6}\right) = z\left(0; \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}, \quad z(0; 0) = z(A) = 0, \quad z(C) = z(B) = 2, \text{ приходимо до висновку, що}$$

найбільшого значення функція набуває на межі області в точках В і С, тобто $z_{\text{найб}} = 2$; а

най-меншого – всередині області в точці М, тобто $z_{\text{найм}} = -\frac{1}{3}$. ◀

39. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в замкненому трикутнику, який обмежений осями координат і прямою $x + y + 5 = 0$.

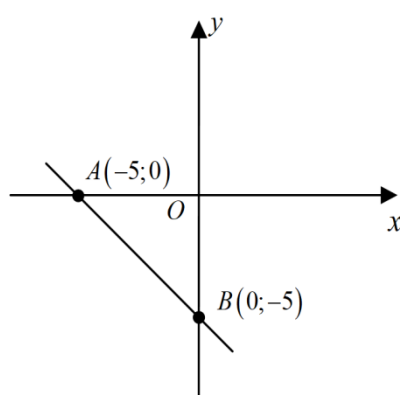
► Областю є трикутник АОВ (рис.14).

1) Визначаємо стаціонарні точки функції. Для цього знайдемо частинні похідні $z'_x = 2x - y + 3$, $z'_y = 4y - x + 2$ і розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 2x - y = -3, \\ x - 4y = 2, \end{cases}$ з якої знаходимо $x = -2$; $y = -1$.

Отже, маємо одну стаціонарну точку $M(-2; -1)$, яка є внутрішньою точкою області. Значення функції в цій точці $z(M) = -3$.

2) Дослідимо функцію на межі області (на сторонах трикутника).

На осі Ox маємо: $y = 0$ і $z = x^2 + 3x + 1 = \varphi(x)$, $-5 \leq x \leq 0$. На відрізку $[-5; 0]$ функція $\varphi(x)$ неперервна, тому вона досягає на ньому своїх найбільшого та найменшого



значень в точках стаціонарності (там, де $\varphi'(x) = 0$), або на кінцях цього відрізка.

Визначимо точку стаціонарності

$\varphi'(x) = 2x + 3 = 0$, $x = -\frac{3}{2}$. Знайдемо значення функції при

$x = -\frac{3}{2}$ і на кінцях відрізка $[-5; 0]$: $z\left(-\frac{3}{2}; 0\right) = -\frac{5}{4}$,

$z(-5; 0) = 11$, $z(0; 0) = 1$. Порівняння одержаних значень

дає $(z_{\max})_{OA} = 11$, $(z_{\min})_{OA} = -\frac{5}{4}$.

На осі Oy : $x = 0$, $z = 2y^2 + 2y + 1 = \psi(y)$, $-5 \leq y \leq 0$. Функція $\psi(y)$ неперервна на відрізку $[-5; 0]$. Визначимо її найбільше та найменше значення на цьому відрізку.

Знайдемо стаціонарну точку: $\psi'(y) = (2y^2 + 2y + 1)' = 4y + 2$, $4y + 2 = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. Бачимо,

що вона належить відрізку $[-5; 0]$. Визначимо значення функції при $y = -\frac{1}{2}$ і на кінцях відрізка:

$$\psi\left(-\frac{1}{2}\right) = z\left(0; -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \psi(-5) = z(0; -5) = 41, \quad \psi(0) = z(0; 0) = 1.$$

Отже, $(z_{\max})_{OB} = 41$, $(z_{\min})_{OB} = \frac{1}{2}$.

На відрізку AB : $y = -x - 5$, $z(x; -x - 5) = 4x^2 + 26x + 41 = \chi(x)$, $-5 \leq x \leq 0$.

Знайдемо стаціонарну точку функції: $\chi'(x) = (4x^2 + 26x + 41)' = 8x + 26 = 0$; $x = -\frac{13}{4}$. Тоді

відповідне для $x = -\frac{13}{4} \in [-5; 0]$ значення $y = -(-\frac{13}{4}) - 5 = -\frac{7}{4}$. Отже, треба розглянути точку $(-\frac{13}{4}; -\frac{7}{4})$, яка є внутрішньою точкою відрізка AB .

$$\text{Маємо } z(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}) = -\frac{5}{4}, \quad z(-5; 0) = 11, \quad z(0; -5) = 41. \quad (z_{\text{найб}})_{AB} = 41; \quad (z_{\text{найм}})_{AB} = -\frac{5}{4}.$$

3) Серед усіх обчислених значень заданої функції в стаціонарній точці, найбільших і найменших значень на відрізках OA , OB і AB вибираємо глобальні екстремуми

$$z_{\text{найб}} = z(0; -5) = 41, \quad z_{\text{найм}} = z(-2; -1) = -3.$$

Таким чином, найменшого свого значення функція набула у стаціонарній точці області $(-2; -1)$, а найбільшого – на межі області, в точці $(0; -5)$. ◀

40. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \leq 4$

► Функція z неперервна в замкненому крузі $x^2 + y^2 \leq 4$, тому за теоремою Вейєрштрасса в цій області вона досягає своїх найбільшого та найменшого значень.

1) Знаходимо стаціонарні точки: оскільки $z'_x = (x^2 - y^2)'_x = 2x$ і $z'_y = (x^2 - y^2)'_y = -2y$,

то із системи рівнянь $\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0, \end{cases}$ одержуємо одну стаціонарну точку $M_0(0; 0)$, в якій значення функції $z(0; 0) = 0$.

2) Знайдемо найбільше і найменше значення функції на межі області, тобто на колі $x^2 + y^2 = 4$. Для точок цього кола функцію $z = x^2 - y^2$ можна записати як функцію однієї змінної x , тобто $z = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4$, $-2 \leq x \leq 2$. Таким чином, знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних на колі $x^2 + y^2 = 4$ ми звели до знаходження найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної $\chi(x) = 2x^2 - 4$ на відрізку $[-2; 2]$.

Знайдемо стаціонарні точки функції на інтервалі $(-2, 2)$ і обчислимо значення функції в цих точках та на кінцях інтервалу. Маємо $\chi'(x) = 4x$, $4x = 0$, звідки знаходимо стаціонарну точку $x = 0$, в якій $\chi(0) = z(0; \pm 2) = -4$. Далі

$$\text{знаходимо } \chi(-2) = z(-2; 0) = 4, \quad \chi(2) = z(2; 0) = 4.$$

Вибираючи серед усіх обчислених значень найменше та найбільше, бачимо, що найбільшого значення в крузі $x^2 + y^2 \leq 4$ функція $z = x^2 - y^2$ набуває в точках $M_1(-2; 0)$ та $M_2(2; 0)$ кола $x^2 + y^2 = 4$, а найменшого – в точках $M_3(0; 2)$ і $M_4(0; -2)$ того ж кола:

$$z_{\text{найб}} = z(-2; 0) = z(2; 0) = 4, \quad z_{\text{найм}} = z(0; -2) = z(0; 2) = -4.$$

Зауважимо, що найбільше і найменше значення функції на колі $x^2 + y^2 = 4$ можна знайти іншим чином.

Подано рівняння кола в параметричному вигляді: $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Значення функцій $x(t), y(t)$ при $t = 0$ та $t = 2\pi$ повинні бути однаковими. Тоді $z = x^2 - y^2 = 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t = 4 \cos 2t$. Знайдемо найбільше і найменше значення цієї функції на відрізку ($0 \leq t \leq 2\pi$). Продиференціювавши функцію $z = 4 \cos 2t$, одержимо $z' = -8 \sin 2t$. З рівняння $-8 \sin 2t = 0$ знаходимо три стаціонарні точки: $t_1 = \pi/2, t_2 = \pi, t_3 = 3\pi/2$, які лежать всередині цього відрізка. Обчисливши значення функції $z = 4 \cos 2t$ в цих точках, а також при $t = 0$ (значення $z(0)$ співпадає з $z(2\pi)$), одержуємо лише два різних між собою значення функції: $z_1 = -4$ (найменше значення) і $z_2 = 4$ (найбільше значення). ◀

41. Додатне число a розкласти на три додатні доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

► Позначимо два доданки відповідно x і y . Тоді третій доданок буде $a - x - y$, а їх добуток $z = xy(a - x - y)$. За умовою $x > 0, y > 0, a - x - y > 0$, тобто $x + y < a, z > 0$. Отже, x і y можуть набувати значень з області, обмеженої прямими $x = 0, y = 0, x + y = a$ (рис.15).

Знайдемо стаціонарні точки функції z . Частинні похідні дорівнюють $z'_x = y(a - 2x - y), z'_y = x(a - 2y - x)$. Запишемо систему рівнянь $\begin{cases} y(a - 2x - y) = 0, \\ x(a - 2y - x) = 0, \end{cases}$ з якої знаходимо:

$$x_1 = 0, y_1 = 0, M_1(0; 0); x_2 = 0, y_2 = a, M_2(0; a);$$

$$x_3 = a, y_3 = 0, M_3(a; 0); x_4 = \frac{a}{3}, y_4 = \frac{a}{3}, M_4\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right).$$

Бачимо, що перші три точки лежать на межі області D , а точка M_4 – всередині області. На межі області функція $z = 0$, а всередині області функція додатна, тому в точці M_4 вона має максимум (оскільки це єдина екстремальна точка всередині трикутника).

$$\text{Найбільше значення добутку } z_{\text{найб}} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}.$$

Переконатись в цьому можна скориставшись достатніми умовами існування екстремуму.

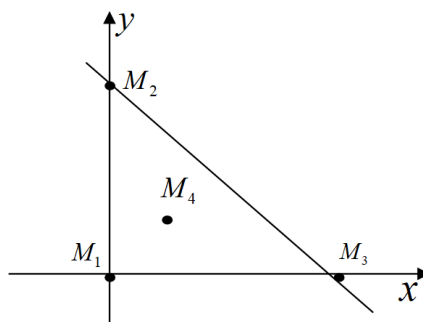


Рисунок 15

Знайдемо частинні похідні другого порядку :

$$z''_{xx} = (y(a - 2x - y))'_x = -2y, \quad z''_{xy} = (y(a - 2x - y))'_y = a - 2x - 2y,$$

$$z''_{yy} = (x(a - 2y - x))'_y = -2x.$$

В точці $M_4(\frac{a}{3}; \frac{a}{3})$ маємо $A = -\frac{2a}{3}$, $B = -\frac{a}{3}$, $C = -\frac{2a}{3}$. Оскільки

$$\Delta = AC - B^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0, \quad A < 0, \text{ то в розглядуваній точці функція має максимум.}$$

Отже, кожний доданок рівний $\frac{a}{3}$. Одержаний результат має просте геометричне

пояснення: з усіх прямокутних паралелепіпедів, у яких сума трьох вимірів є величиною сталою, рівною a , найбільший об'єм має куб з ребром $\frac{a}{3}$. ◀

42. Визначити при яких розмірах відкрита прямокутна ванна заданої місткості V має найменшу поверхню.

► Позначимо через x і y розміри основи ванни, а через z її висоту. Площа поверхні ванни складе $S = xy + 2xz + 2yz$.

Враховуючи, що об'єм ванни $V = xyz$, виразимо змінну z через відому величину V та змінні x і y , тобто запишемо $z = \frac{V}{xy}$. Таким чином, $S = xy + 2x\frac{V}{xy} + 2y\frac{V}{xy} = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$.

Тепер потрібно знайти найменше значення цієї функції в області, що визначається умовами $x > 0$ і $y > 0$. Знайдемо стаціонарні точки функції S :

$$\begin{cases} S'_x = y - \frac{2V}{x^2} = 0, \\ S'_y = x - \frac{2V}{y^2} = 0, \end{cases} \quad x = y = \sqrt[3]{2V}.$$

Маємо одну стаціонарну точку $M(\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V})$, яка є внутрішньою точкою області визначення функції.

Перевіримо виконання достатніх умов мінімуму. Оскільки

$$S''_{xx}(x, y) = \frac{4V}{x^3}, \quad S''_{xy}(x, y) = 1, \quad S''_{yy}(x, y) = \frac{4V}{y^3},$$

то

$$A = S''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \quad B = S''_{xy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 1,$$

$$C = S''_{yy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \quad \Delta = AC - B^2 = 4 - 1 > 0, \quad A > 0.$$

Таким чином, функція $S(x, y)$ має мінімум при $x = y = \sqrt[3]{2V}$

$$S_{\min} = 2V\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2V}}\right) + \sqrt[3]{4V^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}.$$

Отже, в основі ванна має квадрат зі стороною $\sqrt[3]{2V}$, а її висота складає

$$z = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2},$$

тобто дорівнює половині ребра основи. ◀

43. Знайти умовний екстремум функції $z = xy$ за умови $3x + 2y = 1$.

► Очевидно, що $\varphi(x, y) = 3x + 2y - 1 = 0$ — рівняння в'язі, тому функція Лагранжа матиме вигляд

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(3x + 2y - 1).$$

Оскільки

$$F'_x(x, y, \lambda) = (xy + \lambda(3x + 2y - 1))'_x = y + 3\lambda,$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = (xy + \lambda(3x + 2y - 1))'_y = x + 2\lambda,$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = (xy + \lambda(3x + 2y - 1))'_\lambda = 3x + 2y - 1,$$

то система (31) набуде вигляду

$$\begin{cases} x + 2\lambda = 0, \\ y + 3\lambda = 0, \\ 3x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Вона має один розв'язок $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{4}$, $\lambda = -\frac{1}{12}$.

Отже, точкою умовного екстремуму може бути точка $M\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$. Перевіримо, чи це

так. Знайдемо d^2F для цієї точ-ки. Так як

$$F''_{xx}(x, y, \lambda) = (y + 3\lambda)'_x = 0, \quad F''_{xy}(x, y, \lambda) = (x + 2\lambda)'_y = 1,$$

$$F''_{yy}(x, y, \lambda) = (x + 2\lambda)'_x = 0, \quad \text{то } d^2F(x, y, \lambda) = 2dxdy.$$

З рівняння в'язі маємо $3dx + 2dy = 0$, тобто $dy = -\frac{3}{2}dx$.

Тоді за формулою (32) $d^2F(x, y, \lambda) = 2dx(-\frac{3}{2}dx) = -3(dx)^2 < 0$. Тому функція має умовний

максимум в точці $M\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$ і $z_{\max} = f\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$. ◀

44. Знайти екстремум функції $u = xyz$ за умови, що змінні x , y і z зв'язані рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

► Очевидно, рівняння в'язі матиме вигляд $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$, а функція Лагранжа буде такою

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3).$$

Знайдемо частинні похідні:

$$F'_x = yz + 2\lambda x, \quad F'_y = xz + 2\lambda y, \quad F'_z = xy + 2\lambda z.$$

Запишемо систему рівнянь, з якої визначимо множник Лагранжа λ і координати

точок можливого екстремуму функції. Маємо

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0, \\ xz + 2\lambda y = 0, \\ xy + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо вісім стаціонарних точок – точок можливого умовного екстремуму:

$$M_1(1; 1; 1), M_2(1; -1; -1), M_3(-1; 1; -1) \text{ і } M_4(-1; -1; 1) \text{ для } \lambda_1 = -1/2;$$

$$M_5(-1; -1; -1), M_6(-1; 1; 1), M_7(1; -1; 1), M_8(1; 1; -1) \text{ для } \lambda_2 = 1/2.$$

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа

$$d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2zdx dy + 2ydx dz + 2xdy dz. \quad (33)$$

Для $\lambda = -\frac{1}{2}$ і точки M_1 маємо:

$$\begin{aligned} d^2F(M_1, \lambda_1) &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2dx dy + 2dx dz + 2dy dz = \\ &= -(dx - dy)^2 - dz^2 + 2(dx + dy)dz. \end{aligned} \quad (34)$$

З рівняння в'язі в точці M_1 знаходимо $dz = -(dx + dy)$. Підставляючи цей вираз у (34), одержимо

$$d^2F(M_1, \lambda_1) = -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dx + dy)^2 < 0,$$

а значить в точці M_1 функція u має умовний максимум і $u_{\max} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Для $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ і точки M_2 із (33) і рівняння в'язі одержуємо

$$d^2F(M_2, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2dx dy - 2dx dz + 2dy dz,$$

де $dx = dy + dz$. Оскільки

$$d^2F(M_2, \lambda_1) = -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dy + dz)^2 < 0,$$

то в точці M_2 функція u має умовний максимум і $u_{\max} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$.

Аналогічно встановлюємо, що функція u має умовний максимум в точках M_3 та M_4 . У цих точках $u_{\max} = 1$.

Для $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ і точки M_5 із (33) і рівняння в'язі одержуємо

$$d^2F(M_5, \lambda_2) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz,$$

$$\text{де } dx + dy + dz = 0$$

Оскільки $d^2F(M_5, \lambda_2) = (dx - dy)^2 + dz^2 + 2(dx + dy)^2 > 0$, то в точці M_5 задана функція u має умовний мінімум $u_{\min} = (-1)(-1)(-1) = -1$. Легко переконатися, що в точках M_6, M_7, M_8 функція u також має умовний мінімум і $u_{\min} = -1$ (перевірте!). ◀