

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1.1 Загальні поняття та означення

Звичайним диференціальним рівнянням називається співвідношення, яке зв'язує незалежну змінну x , функцію $y = y(x)$ та її похідні по цій змінній. Найвищий з порядків похідних, які присутні в цьому співвідношенні, називається *порядком диференціального рівняння*. Отже, диференціальне рівняння n -го порядку можна подати у вигляді

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

де F – функція $(n+2)$ змінних, x – незалежна змінна (аргумент), $y = y(x)$ – невідома функція цього аргумента, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – її похідні по вказаному аргументу. Відзначимо, що (1) обов'язково повинно містити $y^{(n)}$.

У цьому розділі ми розглянемо диференціальні рівняння першого порядку, загальний вид яких, відповідно до (1), можна записати у вигляді

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

Рівняння (2) може не містити у явному виді x або y , але обов'язково воно має містити похідну y' (інакше вираз перестав бути диференціальним рівнянням). Якщо рівняння (2) вдасться розв'язати відносно похідної y' , то одержимо більш зручний вигляд

$$y' = f(x, y), \quad (3)$$

який ми і будемо переважно далі розглядати. Зокрема, рівняння (3) можна переписати у вигляді $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, або $dy = f(x, y)dx$. Домноживши останню рівність на деяку функцію $Q(x, y) \neq 0$, можна записати диференціальне рівняння першого порядку у вигляді

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (4)$$

яке має ту перевагу, що змінні x та y тут стають рівноправними, тобто кожен з них можна розглядати як функцію іншої.

Знаходження невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається його розв'язуванням або інтегруванням. Розв'язком рівняння (3) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підставлянні у рівняння (3) перетворює його в тотожність при всіх $x \in (a, b)$, тобто

$$\forall x \in (a, b): \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Крива, що визначається рівнянням $y = \varphi(x)$, називається *інтегральною кривою* диференціального рівняння.

Розв'язок диференціального рівняння може бути одержаним як у явній формі $y = \varphi(x)$, так і в неявному вигляді $\Phi(x, y) = 0$. У другому випадку кажуть, що одержали *інтеграл* диференціального рівняння. Можливо також отримати розв'язок диференціального рівняння у параметричній формі

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Диференціальне рівняння, взагалі кажучи, вважається розв'язаним і в тому випадку, коли воно зведене до квадратур, тобто операцій знаходження невизначених інтегралів, навіть якщо ті інтеграли не можуть бути виражені через елементарні функції.

Отже, в результаті інтегрування диференціального рівняння першого порядку одержимо функцію, що залежить ще і від довільної сталої C ,

$$y = \varphi(x, C), \quad (5)$$

тобто фактично одержуємо сім'ю розв'язків. Таку сім'ю розв'язків називають *загальним розв'язком*, а якщо прийшли до виразу $\Phi(x, y, C) = 0$, то вживають термін *загальний інтеграл*. Якщо в загальному розв'язку замість C підставити якесь конкретне значення, то отримаємо розв'язок, який називається *частинним розв'язком* рівняння (3).

Часто при розв'язуванні теоретичних або практичних задач потрібно знайти не всі розв'язки даного рівняння, а лише розв'язок, що задовольняє деякі додаткові умови. Однією з задач такого типу є дуже важлива в теорії диференціальних рівнянь задача – так звана *задача Коші*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (6)$$

Суть задачі Коші полягає в тому, що з усіх розв'язків рівняння (3) потрібно знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$ набуває заданого значення $y = y_0$, де x_0 і y_0 – задані числа, котрі називаються *початковими значеннями*, а умова $y(x_0) = y_0$ називається *початковою умовою*.

Умови існування і єдиності частинного розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, сформульовані у наступній теоремі існування та єдності розв'язку.

Теорема Коші. Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в плоскій області D , що містить точку $M_0(x_0, y_0)$, то існує єдиний розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

При цьому, як вказувалося раніше, розрізняють: *загальний розв'язок* $y = \varphi(x, C)$, що перетворює рівняння (3) в тотожність при будь-якому значенні довільної сталої C , серед яких міститься значення C_0 , що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, і *частинний розв'язок* $y_{\text{част}} = \varphi(x, C_0)$, який одержуємо із загального при $C = C_0$.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь символом невизначеного інтеграла, як правило, позначають не множину всіх первісних підінтегральної функції, а яку-небудь одну первісну; довільну сталу інтегрування додають окремо.

1.2 Рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними і звідні до них

Рівняння виду

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad (7)$$

називається *рівнянням з відокремленими змінними*. Воно має загальний інтеграл

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy = C, \quad (8)$$

де C – довільна стала.

Рівняння виду

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0, \quad (9)$$

або

$$y' = f_1(x) f_2(y) \quad (10)$$

називаються *рівняннями з відокремлюваними змінними*.

Розв'язування таких рівнянь полягає у зведенні їх до виду (7) діями, які будуть ілюструвати подальші приклади. Наприклад, поділивши обидві частини рівняння (9) на функцію $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$, приходимо до рівняння з відокремленими змінними у вигляді

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0, \quad (11)$$

або

$$\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = -\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx, \quad (12)$$

яке має загальний інтеграл

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C, \quad (13)$$

або

$$\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = -\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + C. \quad (14)$$

Зауважимо, що ділення на $P_2(x)Q_1(y)$ може спричинити до втрати розв'язків диференціального рівняння, що є розв'язками рівнянь $P_2(x) = 0$, $Q_1(y) = 0$. Ці випадки слід перевіряти додатково.

Тепер розглянемо конкретні приклади.

1.3 Рівняння у повних диференціалах

Рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (20)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто, якщо

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du. \quad (21)$$

Необхідною і достатньою умовою існування такої функції $u(x, y)$ є виконання рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (22)$$

Якщо умова (22) має місце, то рівняння (20) набуває вигляду $du = 0$, а його загальним інтегралом буде $u(x, y) = C$. Отже, основна задача полягає у знаходженні функції $u(x, y)$. Це будемо робити у такій послідовності. З (21) запишемо рівності

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (23)$$

Розв'язуючи перше з цих рівнянь інтегруванням по змінній x , одержимо

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y). \quad (24)$$

В даному випадку змінна y є зафіксованою і тому довільна стала інтегрування має вигляд довільної функції від y . Виберемо $\varphi(y)$ таким чином, щоб виконувалась друга з рівностей (23). Для цього продиференціюємо (24) по y і прирівняємо до $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Оскільки з умови (1.22) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то можна записати $\int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) = Q(x, y)$, звідки, враховуючи межі інтегрування, одержимо $Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) = Q(x, y)$. Отже,

$$\varphi'(y) = Q(x_0, y), \quad (25)$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy. \quad (26)$$

Таке інтегрування є можливим тільки за умови, що рівність (26) не містить явно змінну x , в протилежному випадку треба шукати помилку: або рівняння не було у повних диференціалах, або ж обчислення були хибні.

Підставляючи результат (26) в (24), одержимо

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy. \quad (27)$$

Точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M(x, y)$ слід вибирати так, щоб вони належали області, в якій функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, а також їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні. Таким чином, вираз

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C \quad (28)$$

є формулою загального інтеграла рівняння у повних диференціалах.

Якби такі ж перетворення виконувались в іншій послідовності, починаючи з інтегрування по змінній y другої рівності системи (23), то прийшли до дещо іншої формули загального інтеграла

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C. \quad (29)$$

Розглянемо тепер *метод інтегрувального множника*.

Якщо рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не є рівнянням у повних диференціалах, то можна спробувати підібрати так званий інтегрувальний множник $\mu = \mu(x, y)$, тобто функцію, в результаті

множення на яку обох частин рівняння одержимо у лівій частині повний диференціал деякої функції $u(x, y)$, тобто $\mu(P dx + Q dy) = du$ і виконується умова

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \quad (30)$$

Інтегровальний множник μ легко знайти у таких двох випадках:

$$1) \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F(x), \text{ тоді існує інтегровальний множник } \mu = \mu(x), \text{ який залежить тільки від}$$

змінної x і може бути знайдений з диференціального рівняння

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}. \quad (31)$$

$$2) \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F_1(y), \text{ тоді існує інтегровальний множник } \mu = \mu(y), \text{ який залежить тільки від}$$

змінної y і може бути знайдений з диференціального рівняння

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}. \quad (32)$$

1.4 Однорідні рівняння та звідні до них

Спочатку введемо поняття *однорідної функції*.

Означення 1. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією k -го степеня (k -го виміру)* відносно змінних x і y , якщо при будь-якому $\lambda \neq 0$ має місце співвідношення

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \quad (33)$$

Зокрема, якщо $k = 0$, то маємо однорідну функцію *нульового* виміру. Наприклад, такою є функція $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$ (перевірити це самостійно!), а функція $f(x, y) = x^2 + xy$ – є однорідною функцією 2-го виміру.

Зауважимо, що у випадку, коли дві функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є однорідними однакового виміру, їх відношення $f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ є *одно-рідною* функцією нульового виміру. Однорідну функцію нульового виміру можна завжди зобразити як функцію відношення змінних $\frac{y}{x}$ або $\frac{x}{y}$.

Означення 2. *Однорідним* відносно змінних x і y називається диференціальне рівняння першого порядку виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad (34)$$

або виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є однорідними однакового степеня. Цей випадок зводиться до попереднього

(30) після перетворення $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, або розв'язується безпосередньо за допомогою заміни $u = \frac{y}{x}$, про

яку докладніше буде йти мова нижче.

Метод розв'язування однорідного рівняння (34) полягає у зведенні його до рівняння з відокремлюваними змінними після заміни $u = \frac{y}{x}$, тобто $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$. Дійсно, після такої заміни

одержимо рівняння $\frac{du}{dx}x + u = \varphi(u)$, змінні в якому легко відокремити. Таким чином,

$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$; $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$. Після цього здійснюємо інтегрування

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C. \quad (35)$$

Зауважимо, що $\varphi(u) - u \neq 0$, бо в іншому випадку ми б мали рівняння $y' = \frac{y}{x}$, в якому змінні відокремлюються безпосередньо.

До однорідного зводяться рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (38)$$

$$\text{де } \delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (39)$$

f – довільна неперервна в розглядуваній області функція і хоча б одне з чисел c_1, c_2 відмінне від нуля, оскільки при $c_1 = c_2 = 0$ рівняння (38) було б уже однорідним.

Процес зведення до однорідного рівняння починається із розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \quad (40)$$

Умова (39) гарантує існування єдиного розв'язку системи (40). Після цього робимо заміну

$$\begin{cases} x = u + \alpha, & dx = du, \\ y = v + \beta, & dy = dv. \end{cases} \quad (41)$$

Одержане однорідне рівняння

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) \quad (42)$$

інтегруємо розглянутим вище методом, а саме заміною $t = \frac{v}{u}$, потім повертаємося до старих змінних x і y .

1.5 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним*, якщо воно є рівнянням першого степеня відносно невідомої функції та її похідної (y і y' входять лінійно):

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (44)$$

де $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ – задані функції.

Будемо вважати, що функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні на деякому проміжку (a, b) , тоді для рівняння (44) виконуються умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку.

Якщо права частина рівняння (44) $Q(x) \equiv 0$, то маємо *лінійне однорідне* диференціальне рівняння (ЛОДР) виду

$$y' + P(x)y = 0, \quad (45)$$

яке є одночасно рівнянням з відокремлюваними змінними. Отже, в цьому випадку метод розв'язування відомий. Легко переконатися, що загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad (46)$$

де C – довільна стала.

У загальному випадку, коли $Q(x) \neq 0$, маємо *лінійне неоднорідне* диференціальне рівняння (ЛНДР).

Розглянемо методи його розв'язування.

1. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Лагранж запропонував шукати розв'язок ЛНДР у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}, \quad (47)$$

тобто замість довільної сталої C у формулі (46) фігурує деяка функція $C(x)$.

Знайдемо похідну

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x)),$$

підставимо y та y' у рівняння (44), в результаті одержимо

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Відносно невідомої функції $C(x)$ одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними, яке можна записати у вигляді

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

звідки

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + \tilde{C}, \quad (48)$$

де через $\tilde{C}$ позначено довільну сталу інтегрування.

Підставляючи вираз у правій частині формули (48) у формулу (47) замість $C(x)$, одержимо формулу загального розв'язку ЛНДР (для зручності запису сталу інтегрування позначаємо знову через C)

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right). \quad (49)$$

Запишемо формулу (49) у вигляді

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx. \quad (50)$$

З'ясуємо зміст кожного доданка у правій частині цієї рівності:

$y_0 = Ce^{-\int P(x)dx}$ – це загальний розв'язок відповідного ЛОДР,

$y^* = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx$ – деякий частинний розв’язок даного ЛНДР, що випливає з формул (47) і (48).

Сформулюємо висновок про *структуру* загального розв’язку ЛНДР: загальний розв’язок ЛНДР є сумою загального розв’язку відповідного ЛОДР і якогось частинного розв’язку самого ЛНДР, тобто $y = y_0 + y^*$.

Зауважимо, що формули (49) або (50) не обов’язково запам’ятовувати, як правило, простіше проробити весь процес методу Лагранжа безпосередньо. Проте, структуру загального розв’язку ЛНДР варто добре пам’ятати.

2. Метод штучної заміни (метод Ейлера-Бернуллі)

Бернуллі запропонував шукати розв’язок ЛНДР (44)

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

у вигляді добутку двох функцій

$$y = u(x)v(x). \quad (51)$$

Тоді $y' = u'v + uv'$ і підстановка y та y' у ЛНДР приводить до рівняння

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x).$$

Перепишемо останню рівність у вигляді

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \quad (52)$$

Оскільки для визначення двох поки що невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ маємо тільки одне співвідношення (51), то одну з цих функцій ми можемо вибрати на свій розсуд, а саме виберемо $v(x) \neq 0$ так, щоб

$$v' + P(x)v = 0.$$

Тоді, як було показано вище, $v(x)$ є розв’язком відповідного ЛОДР і може бути записане за формулою (46), в якій покладемо $C = 1$, тобто

$$v = e^{-\int P(x)dx}. \quad (53)$$

Підставимо $v(x)$ у (52) і для визначення другої невідомої функції $u(x)$ одержимо рівняння з відокремлюваними змінними

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \text{ або } du = e^{\int P(x)dx} Q(x) dx.$$

В результаті інтегрування одержуємо функцію

$$u = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C. \quad (54)$$

Відповідно до (50) запишемо загальний розв’язок ЛНДР у вигляді

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Це та ж формула (49), до якої прийшли раніше методом Лагранжа.

1.6 Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1. \quad (55)$$

Якщо $n = 0$, то будемо мати уже розглянуте лінійне рівняння, а якщо $n = 1$, то отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними.

Неважко показати, що заміна $z = y^{1-n}$ дозволяє звести рівняння (55) до лінійного, проте доцільніше буде одразу робити заміну Бернуллі $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ аналогічно до того, як це робимо у лінійному рівнянні.