

Приклади розв'язання задач

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

а) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$;

б) $xy^2dx - ydy = yx^2dy - xdx$.

► а) Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на вираз

$(1+x^2)(1+e^y)$, одержимо $\frac{e^y dy}{1+e^y} - \frac{2xdx}{1+x^2} = 0$. Зінтегрувавши одержаний вираз

$\int \frac{e^y dy}{1+e^y} - \int \frac{2xdx}{1+x^2} = C$, запишемо загальний інтеграл $\ln(1+e^y) - \ln(1+x^2) = \ln C$, звідки

маємо $1+e^y = C(1+x^2)$. Це більш зручний вигляд загального інтеграла, з якого можна

одержати загальний розв'язок $y = \ln(C(1+x^2)-1)$.

Зауважимо, що довільна стала була записана у логарифмічному виді як $\ln C$, до цього будемо вдаватися і далі з метою спрощення кінцевого результату. Крім того відмітимо, що жодні розв'язки не були втрачені, оскільки $(1+x^2)(1+e^y) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Таким чином, шуканий загальний розв'язок $y = \ln(C(1+x^2)-1)$. ◀

► б) Згрупувавши доданки з однаковими диференціалами, одержимо

$$xy^2dx + xdx = yx^2dy + ydy \quad \Rightarrow \quad x(y^2+1)dx = y(x^2+1)dy,$$

$$\frac{xdx}{x^2+1} = \frac{ydy}{y^2+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{ydy}{y^2+1},$$

$$\ln|x^2+1| + \ln|C| = \ln|y^2+1| \quad \Rightarrow \quad y^2+1 = C(x^2+1). \quad \blacktriangleleft$$

2. Знайти розв'язок задачі Коші $x^3y' + y = 7$, $y(1) = 5$.

► Перепишемо рівняння у вигляді $x^3y' = 7 - y$, а потім $y' = \frac{7-y}{x^3}$, що відповідає

вигляду (10). Щоб відокремити змінні, у цьому випадку потрібно записати похідну в

диференціалах $y' = \frac{dy}{dx}$. Маємо $\frac{dy}{dx} = \frac{7-y}{x^3}$, звідки $\frac{dy}{y-7} = -\frac{dx}{x^3}$.

Одержали рівняння з відокремленими змінними, яке зінтегруємо $\int \frac{dy}{y-7} = -\int \frac{dx}{x^3}$ і

запишемо загальний інтеграл $\ln|y-7| = \frac{1}{2x^2} + \ln|C|$, звідки $y = 7 + Ce^{\frac{1}{2x^2}}$. Знайдемо тепер

частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову $y(1) = 5$: $5 = 7 + Ce^{\frac{1}{2 \cdot 1^2}} \Rightarrow C = -2e^{-\frac{1}{2}}$.

Отже, розв'язком задачі Коші буде $y = 7 - 2e^{\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}}$. ◀

3. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Температура повітря дорівнює 20°C . Відомо, що протягом 20 хвилин тіло охолоджується від 100° до 60° . Встановити закон зміни температури тіла в залежності від часу.

► Якщо позначити час через t , а температуру тіла через U , то швидкість охолодження тіла, або іншими словами, швидкість зміни його температури буде похідною $\frac{dU}{dt}$. За умовою задачі маємо $\frac{dU}{dt} = k(U - 20)$, де k – коефіцієнт про-

порційності. Відокремлюючи змінні, маємо $\frac{dU}{U - 20} = k dt$.

Інтегруючи ліву і праву частини, одержимо

$$\int \frac{dU}{U - 20} = k \int dt + \ln|C|.$$

(оскільки в подальшому ми будемо потенціювати, то тут зручно писати $\ln|C|$ замість C), або $U = 20 + Ce^{kt}$.

Для визначення сталих C і k використаємо умови задачі: $U = 100^{\circ}$ при $t = 0$, $U = 60^{\circ}$ при $t = 20$. Першу з цих умов прийнято називати „початковою”, з її допомогою знаходимо C . Друга умова допомагає знайти коефіцієнт пропорційності k . Таким чином

$$\begin{cases} 100 = 20 + C, \\ 60 = 20 + Ce^{20k}. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь знаходимо спочатку $C = 80$, а потім

$$e^{20k} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Отже, закон зміни температури в залежності від часу має вигляд $U = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.

В розглянутому прикладі при складанні диференціального рівняння ми мали справу безпосередньо з похідною шуканої функції. Наведемо тепер приклад, де міркування зручніше проводити, оперуючи з диференціалами шуканих величин. ◀

4. В резервуар, що містить 10 кг солі на 100 л суміші, кожну хвилину вливається 30 л води і витікає 20 л суміші (рис. 1).

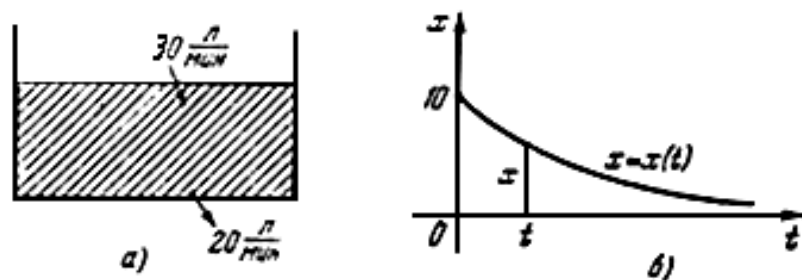


Рисунок 1

Визначити кількість солі, що залишиться в резервуарі через t хв., вважаючи, що суміш миттєво перемішується.

► Нехай x – кількість солі в резервуарі в момент часу t ; $x + dx$ – кількість солі в момент часу $t + dt$. Так як суміш витікає, то її кількість зменшується з часом і тому $dx < 0$ при $dt > 0$. Об'єм суміші в резервуарі в момент часу t , очевидно, дорівнює $V = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t$, а тому концентрація солі (тобто кількість солі, що міститься в одиниці об'єму суміші) буде дорівнювати

$$\frac{x}{100 + 10t}. \quad (15)$$

Зміну кількості солі ($-dx$) за нескінченно малий проміжок часу $[t, t + dt]$ ми одержимо, якщо об'єм суміші, яка витекла за цей час $20 dx$, помножимо на концентрацію солі (15).

Одержимо диференціальне рівняння

$$-dx = \frac{x}{100 + 10t} \cdot 20dt. \quad (16)$$

Крім того, з умови задачі впливає початкова умова

$$x|_{t=0} = 10. \quad (17)$$

Відокремлюючи змінні в рівнянні (16) та інтегруючи, послідовно одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= -\frac{2}{10+t} dt, \quad \int \frac{dx}{x} = -2 \int \frac{dt}{10+t}, \\ \ln|x| &= -2 \ln|10+t| + \ln|C|, \quad x = \frac{C}{(10+t)^2}. \end{aligned}$$

Поклавши $t = 0$, з початкової умови (17) знаходимо $10 = \frac{C}{100}$, тобто $C = 1000$. Тому

закон зміни кількості солі x в кілограмах, що знаходиться в резервуарі, в залежності від пройденого часу в хвиликах (рис. 1б) задається формулою

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}. \quad (18)$$

Зауважимо, що з формули (18), знаючи кількість солі, що залишилась в резервуарі (останнє легко встановити, вимірявши об'єм резервуару і концентрацію солі в ньому), можна визначити кількість часу, яка пройшла від початку процесу. На цій ідеї ґрунтується обчислення віку морів і океанів. ◀

До рівнянь з відокремлюваними змінними зводяться рівняння виду

$$y' = f(ax + by + c), \quad (19)$$

де f – неперервна функція і виконуються умови $a \neq 0$; $b \neq 0$. Дійсно, після заміни $ax + by + c = t$,

$t' = a + by'$, $y' = \frac{t' - a}{b}$ рівняння (19) набуває виду $t' = a + f(t)$, тобто одержуємо рівняння з

відокремлюваними змінними.

5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = \sin(x + y)$.

► Зробимо заміну $x + y = t$, тоді $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$, а дане рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{dt}{dx} = \sin t + 1.$$

Розглянемо два випадки.

1) Нехай $\sin t + 1 \neq 0$. Тоді відокремлюємо змінні $dx - \frac{dt}{\sin t + 1} = 0$ і інтегруємо

$$\int dx - \int \frac{dt}{\sin t + 1} = C.$$

Складніший інтеграл знайдемо окремо за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sin t + 1} &= \left| \begin{array}{l} z = \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad \sin t = \frac{2zdz}{1+z^2}, \\ dt = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad t = 2\operatorname{arctg} z \end{array} \right| = \int \frac{2dz}{(1+z^2)\left(\frac{2z}{1+z^2} + 1\right)} = \\ &= 2 \int \frac{dz}{z^2 + 2z + 1} = 2 \int \frac{dz}{(z+1)^2} = -\frac{2}{z+1} + C_2 = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1} + C_2. \end{aligned}$$

Загальний інтеграл, враховуючи, що $x + y = t$, запишемо у вигляді $x + \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} + 1} = C$.

2) Нехай $\sin t + 1 = 0$. Тоді $\sin t = -1$, $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Враховуючи, що $x + y = t$,

одержуємо розв'язки даного рівняння $x + y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. ◀

6. Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(3x^2y + \ln y)dx + \left(x^3 + \frac{x}{y} + \cos y\right)dy = 0.$$

► Маємо $P(x, y) = 3x^2y + \ln y$, $Q(x, y) = x^3 + \frac{x}{y} + \cos y$. Перевіримо, чи виконується

умова (22). Для цього знаходимо частинні похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + \frac{1}{y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{y}$.

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то робимо висновок, що ліва частина даного рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, яку знайдемо за формулою (27). При цьому можна покласти $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Отже,

$$u = \int_0^x (3x^2y + \ln y)dx + \int_1^y \left(0^3 + \frac{0}{y} + \cos y\right)dy = x^3y + x \ln y \Big|_0^x + \sin y \Big|_1^y = x^3y + x \ln y + \sin y - \sin 1.$$

Запишемо загальний інтеграл у вигляді (29), сталу величину $\sin 1$ перенесемо зразу ж у праву частину і приєднаємо до довільної сталої $x^3y + x \ln y + \sin y = C$.

На практиці можна прийти до відповіді ще швидше, штучним шляхом. Досить розкрити дужки, потім об'єднати члени рівняння так, щоб у кожній групі можна було побачити повний диференціал деякої відомої функції і, нарешті, всі групи об'єднати під загальний інтеграл. В розглянутому вже прикладі це відбувається так:

$$(3x^2y dx + x^3 dy) + \left(\ln y dx + \frac{x}{y} dy\right) dy + \cos y dy = 0,$$

$$d(x^3y) + d(x \ln y) + d(\sin y) = 0, d(x^3y + x \ln y + \sin y) = 0.$$

Отже, загальний інтеграл $x^3y + x \ln y + \sin y = C$. ◀

7. Знайти загальний інтеграл рівняння:

а) $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$;

б) $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$.

► а) Маємо $P(x, y) = 2y + xy^3$; $Q(x, y) = x + x^2y^2$. Знайдемо частинні похідні:

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + 3xy^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2xy^2$. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, дане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах.

Розглянемо вираз

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{2 + 3xy^2 - 1 - 2xy^2}{x + x^2y^2} = \frac{1 + xy^2}{x(1 + xy^2)} = \frac{1}{x}.$$

Бачимо, що має місце перший випадок і інтегрувальний множник, який залежить тільки від змінної x , можна знайти з рівняння виду (30). В даному випадку це буде $\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{x}$, звідки послідовно знаходимо

$$d \ln \mu = \frac{dx}{x}, \quad \int d \ln \mu = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln \mu = \ln x, \quad \mu = x.$$

Домножимо дане рівняння на знайдений інтегрувальний множник $(2xy + x^2y^3)dx + (x^2 + x^3y^2)dy = 0$.

Переконаємося, що умова повного диференціала виконується. Дійсно, $\frac{\partial(2xy + x^2y^3)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + x^3y^2)}{\partial x} = 2x + 3x^2y^2$.

Знаходимо функцію $u(x, y)$ за формулою (23), вважаючи $x_0 = 0, y_0 = 0$,

$$u = \int_0^x (2xy + x^2y^3) dx + \int_0^y (0^2 + 0^3 \cdot y^2) dy = x^2y + \frac{1}{3}x^3y^3 \Big|_0^x = x^2y + \frac{x^3y^3}{3}.$$

Запишемо загальний інтеграл у вигляді (27), домноживши вираз на число 3 для одержання більш зручної форми,

$$3x^2y + x^3y^3 = C. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Маємо $P(x, y) = xy^2 + y$; $Q(x, y) = -x$. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy + 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1. \quad \text{Оскільки } \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ то дане рівняння не є рівнянням у повних}$$

диференціалах. Розглянемо вираз

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{-1 - 2xy - 1}{xy^2 + y} = \frac{-2(xy + 1)}{y(xy + 1)} = -\frac{2}{y}.$$

Бачимо, що має місце другий випадок і інтегрувальний множник, який залежить тільки від змінної y , можна знайти з рівняння виду (32). В даному випадку це буде

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{2}{y}, \quad \text{звідки послідовно знаходимо}$$

$$d \ln \mu = \frac{-2dy}{y}, \quad \int d \ln \mu = -2 \int \frac{dy}{y}, \quad \ln \mu = -2 \ln y, \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Домножимо дане рівняння на знайдений інтегрувальний множник

$$\left(x + \frac{1}{y} \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0.$$

Переконаємося, що умова повного диференціала тепер виконується. Дійсно,

$$\frac{\partial\left(x+\frac{1}{y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}.$$

Знаходимо функцію $u(x, y)$ за формулою (27), вважаючи $x_0 = 0$, $y_0 = 1$,

$$u = \int_0^x \left(x + \frac{1}{y}\right) dx - \int_1^y \frac{0}{y^2} dy = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y}\right) \Big|_0^x = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y}.$$

Запишемо загальний інтеграл у вигляді (29), домноживши вираз на $2y$ для одержання більш зручної форми,

$$x^2 y + 2x = Cy.$$

Тут, як і у попередньому прикладі, дещо відкоректований запис довільної сталої C . Прослідкувати за цим пропонується самостійно. ◀

8. Розв'язати диференціальне рівняння:

а) $x^2 y' + y^2 + xy + x^2 = 0$;

б) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

► а) Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + xy + x^2}{x^2}$ або $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 1$.

Бачимо, що це однорідне рівняння виду (34). Зробимо заміну $u = \frac{y}{x}$, звідки

$y = ux$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$, і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними

$\frac{du}{dx}x + u = -u^2 - u - 1$. Відокремимо змінні та зінтегруємо одержане рівняння

$$-\frac{du}{(u+1)^2} = \frac{dx}{x}, \quad -\int \frac{du}{(u+1)^2} = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{(u+1)} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Тепер підставимо $u = \frac{y}{x}$ і запишемо загальний інтеграл $\frac{x}{x+y} = \ln Cx$. Якщо цю рівність

розв'язати відносно y , то одержимо загальний розв'язок $y = \frac{x}{\ln Cx} - x$. ◀

► б) Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$, або $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$.

Бачимо, що це однорідне рівняння виду (1.34). Зробимо заміну $u = \frac{y}{x}$, звідки

$y = ux$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$, і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними

$\frac{du}{dx}x + u = u + \sqrt{u^2 - 1}$. Відокремимо змінні та зінтегруємо одержане рівняння

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| = \ln|x| + \ln|C|$, $u + \sqrt{u^2 - 1} = Cx$. Тепер підставимо у знайдений вираз

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{і запишемо загальний інтеграл} \quad \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = Cx \quad \text{або} \quad y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2. \blacktriangleleft$$

Зауваження. Крім цього методу, можна застосувати також метод інтегрувального множника. Такий множник для однорідного рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є однорідними однакового виміру, визначається формулою

$$\mu = \frac{1}{Px + Qy}. \quad (36)$$

Цю формулу легко запам'ятати. Знаменник її одержуємо як результат інтегрування самого рівняння, якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ вважати сталими.

9. Розв'язати диференціальне рівняння $y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0$.

► Тут $P(x, y) = y^2$; $Q(x, y) = x^2 - xy$. За формулою (36) знаходимо

$$\mu = \frac{1}{xy^2 + y(x^2 - xy)} = \frac{1}{x^2 y}. \quad \text{Домножимо дане рівняння на } \mu = \frac{1}{x^2 y}, \text{ потім згрупуємо}$$

доданки одержаного рівняння у повних диференціалах

$$\frac{y}{x^2} dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) dy = 0, \quad \frac{y dx - x dy}{x^2} + \frac{dy}{y} = 0, \quad -d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{dy}{y} = 0.$$

Маємо загальний інтеграл $\ln y - \frac{y}{x} = \ln C$, $\ln y = \frac{y}{x} + \ln C$, звідки $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. ◀

Зауваження. Якщо рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ є одночасно і однорідним і у повних диференціалах, то загальний інтеграл можна знайти і без квадратур за формулою

$$Px + Qy = C. \quad (37)$$

10. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x^2 + y^2)dx + (2xy + y^2)dy = 0.$$

► Тут $P(x, y) = x^2 + y^2$; $Q(x, y) = 2xy + y^2$. Переконаємось, що виконується умова повного диференціала. Дійсно,

$$\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(2xy + y^2)}{\partial x} = 2y.$$

В той же час функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є однорідними 2-го степеня, тобто дане рівняння є однорідним. За формулою (37) запишемо загальний інтеграл

$$(x^2 + y^2)x + (2xy + y^2)y = C. \blacktriangleleft$$

11. Розв'язати диференціальне рівняння $(3x - 7y - 3)y' - 3y + 7x - 7 = 0$.

► Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3}$. Умова (39) очевидно

виконується. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} -7\alpha + 3\beta + 7 = 0, \\ 3\alpha - 7\beta - 3 = 0, \end{cases}$ одержимо $\alpha = 1, \beta = 0$.

Зробимо заміну $\begin{cases} x = u + 1, & dx = du, \\ y = v, & dy = dv. \end{cases}$ Одержимо однорідне рівняння $\frac{dv}{du} = \frac{-7u + 3v}{3u - 7v}$.

Зробимо заміну $t = \frac{v}{u}$, звідки $v = tu$, $\frac{dv}{du} = \frac{dt}{du}u + t$. Одержимо рівняння з

відокремлюваними змінними $\frac{dt}{du}u + t = \frac{-7 + 3t}{3 - 7t}$. Відокремимо змінні та зінтегруємо

одержане рівняння

$$\frac{3 - 7t}{7(t^2 - 1)} dt = \frac{du}{u}, \quad \int \frac{3 - 7t}{7(t^2 - 1)} dt = \int \frac{du}{u}, \quad \frac{3}{14} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{2} \ln |t^2 - 1| = \ln |u| + \ln |C|.$$

Потенціюючи і підставляючи $t = \frac{v}{u}$, одержимо $\left(\frac{v-u}{v+u} \right)^{\frac{3}{7}} = C(v^2 - u^2)$. Тепер

підкладемо $u = x - 1, v = y$ і запишемо шуканий загальний інтеграл

$$\left(\frac{y - x + 1}{y + x - 1} \right)^{\frac{3}{7}} = C(y^2 - (x - 1)^2). \blacktriangleleft$$

Розглянемо випадок рівняння виду $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, де

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (43)$$

тобто $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$. У цьому випадку рівняння (38) можна записати як

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = f_1(a_1x + b_1y + c)$. Таке рівняння зводиться не до однорідного, а зразу до рівняння

з відокремлюваними змінними заміною $t = a_1x + b_1y$, як це було розглянуто раніше.

12. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

► Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}$. Зробимо заміну $x+y=t$, тоді

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}, \text{ а дане рівняння запишеться у вигляді } \frac{dt}{dx} = -\frac{t+1}{2t-1} - 1.$$

Відокремлюємо змінні $-\frac{2t-1}{3t} dt = dx$ та інтегруємо одержане рівняння

$$\int dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t} - 2 \right) dt. \text{ Маємо}$$

$$x = \frac{\ln|t|}{3} - \frac{2t}{3} + \frac{C}{3}.$$

Загальний інтеграл, враховуючи, що $x+y=t$, одержимо у вигляді $3x = \ln|x+y| - 2(x+y) + C$, або $5x + 2y - \ln|x+y| = C$. ◀

13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1+x)y' + y = \cos x.$$

► Запишемо рівняння у вигляді $y' + \frac{y}{1+x} = \frac{\cos x}{1+x}$. Застосуємо метод варіації

довільної сталої. Розв'яжемо спочатку відповідне ЛОДР $y' + \frac{y}{1+x} = 0$, яке є одночасно рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні та інтегруємо одержане рівняння

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x+1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x+1| + \ln|C| \Rightarrow y = \frac{C}{x+1}.$$

Маємо загальний розв'язок ЛОДР.

Загальний розв'язок ЛНДР будемо шукати у вигляді $y = \frac{C(x)}{x+1}$, де $C(x)$ – деяка функція. Знайдемо похідну

$$y' = \frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2}$$

і підставимо у та y' у ЛНДР

$$\frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2} + \frac{C(x)}{(x+1)^2} = \frac{\cos x}{x+1}.$$

Одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними, яке після очевидних спрощень набуває вигляду $C'(x) = \cos x$,

звідки $C(x) = \sin x + \tilde{C}$, де через $\tilde{C}$ позначено сталу інтегрування.

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = \frac{\sin x + C}{x+1}$. ◀

14. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - 3y = x^2.$$

► Запишемо рівняння у вигляді $y' - \frac{3}{x}y = x$. Введемо заміну $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ і підставимо y та y' у дане ЛНДР

$$u'v + uv' - \frac{3uv}{x} = x, \quad u'v + u\left(v' - \frac{3v}{x}\right) = x.$$

Далі розв'яжемо ЛОДР $v' - \frac{3v}{x} = 0$, одержимо $v = x^3$ і, повертаючись до ЛНДР з функціями $u(x)$ та $v(x)$, будемо мати $u'x^3 = x$, або $du = \frac{dx}{x^2}$, звідки $u = -\frac{1}{x} + C$. Тепер запишемо загальний розв'язок даного рівняння $y = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right)$ або $y = Cx^3 - x^2$. ◀

15. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(2xy + y^3)dy - dx = 0.$$

► Запишемо рівняння у вигляді $y' = \frac{1}{2xy + y^3}$.

Це рівняння не є лінійним, але, якщо змінити ролі шуканої функції та аргументу, то одержимо рівняння, що буде лінійним відносно невідомої функції $x(y)$ та її похідної,

$$x' - 2yx = y^3.$$

Розв'яжемо його методом Бернуллі. Покладемо $x = uv$, $x' = u'v + uv'$. Тут ми вважаємо, що $u = u(y)$, $v = v(y)$. Тоді $u'v + uv' - 2uvy = y^3$, $u'v + u(v' - 2vy) = y^3$. Маємо

$$\begin{cases} v' - 2vy = 0, \\ u'v = y^3. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи

$$\frac{dv}{v} = 2ydy \Rightarrow \ln|v| = y^2 + \ln|C| \Rightarrow v = Ce^{y^2}.$$

Підставимо одержану функцію $v = v(y)$ у друге рівняння

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} e^{y^2} = y^3 &\Rightarrow du = y^3 e^{-y^2} dy \Rightarrow u = \int y^3 e^{-y^2} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int y^2 e^{-y^2} d(y^2) = -\frac{1}{2} e^{-y^2} (1 + y^2) + C. \end{aligned}$$

Останній результат отримали інтегруванням частинами.

Отже, маємо $x = uv = \left(-\frac{1}{2}e^{-y^2}(1+y^2) + C\right)e^{y^2}$, або $x = Ce^{y^2} - \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}$. ◀

Зауваження. Якщо відомі два частинні розв'язки y_1 і y_2 ЛНДР першого порядку, то його загальний розв'язок записується без квадратур у вигляді

$$y = C(y_1 - y_2) + y_1.$$

16. Розв'язати рівняння

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

► Тут $n = \frac{1}{2}$. Після заміни $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ одержимо

$$x(u'v + uv') - 4uv = x^2\sqrt{uv} \Rightarrow u'v + uv' - \frac{4uv}{x} = x\sqrt{uv},$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{4v}{x}\right) = x\sqrt{uv}. \text{ Приходимо до системи } \begin{cases} v' - \frac{4v}{x} = 0, \\ u'v = x\sqrt{uv}. \end{cases}$$

Перше рівняння має розв'язок $v = x^4$, а друге набуває вигляду $u'x^4 = x^3\sqrt{u}$, або при $x \neq 0$

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow u = \frac{1}{4}\ln^2|Cx|.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння буде наступним $y = \frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$. ◀