

Приклади розв'язання задач

17. Знайти загальний розв'язок рівняння:

а) $y^{IV} = \frac{8}{(x-3)^5}$; б) $y''' \operatorname{ctg} x + y'' = 2$; в) $1 + y'^2 = yy''$.

► а) Зінтегрувавши задане рівняння, маємо

$$y''' = \int y^{IV} dx = \int \frac{8dx}{(x-3)^5} = -\frac{2}{(x-3)^4} + \tilde{C}_1.$$

Далі знаходимо

$$y'' = \int y''' dx = \int \left(-\frac{2}{(x-3)^4} + \tilde{C}_1\right) dx = \frac{2}{3(x-3)^3} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2.$$

Зінтегрувавши останню рівність ще двічі, одержимо загальний розв'язок даного диференціального рівняння

$$\begin{aligned} y' &= \int y'' dx = \int \left(\frac{2}{3(x-3)^3} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2\right) dx = -\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{\tilde{C}_1 x^2}{2} + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3, \\ y &= \int y' dx = \int \left(-\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{\tilde{C}_1 x^2}{2} + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3\right) dx = \\ &= \frac{1}{3(x-3)} + \frac{\tilde{C}_1 x^3}{6} + \frac{\tilde{C}_2 x^2}{2} + \tilde{C}_3 x + \tilde{C}_4. \end{aligned}$$

Довільні сталі можна перепозначити для більш компактного запису. Тоді шуканий загальний розв'язок набуде вигляду

$$y = \frac{1}{3(x-3)} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Дане рівняння не містить явно шуканої функції y , а також її похідної y' .

Вводимо нову невідому функцію $z = y''$ і одержуємо лінійне рівняння першого порядку $z' \operatorname{ctg} x + z = 2$, яке запишемо у вигляді

$$z' + z \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x.$$

Його загальний розв'язок

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int \operatorname{tg} x dx} \left(\int 2 \operatorname{tg} x e^{\int \operatorname{tg} x dx} dx + C_1 \right) = e^{\ln|\cos x|} (2 \int \operatorname{tg} x e^{-\ln|\cos x|} dx + C_1) = \\ &= |\cos x| \left(2 \int \frac{\operatorname{tg} x}{|\cos x|} dx + C_1 \right) = 2 \cos x \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} + C_1 \cos x = \\ &= -2 \cos x \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + C_1 \cos x = 2 \cos x \frac{1}{\cos x} + C_1 \cos x = 2 + C_1 \cos x. \end{aligned}$$

Оскільки $z = y''$, то

приходимо до диференціального рівняння *першого типу*, яке легко розв'язується двократним інтегруванням:

$$y'' = 2 + C_1 \cos x, \quad y' = \int (2 + C_1 \cos x) dx = 2x + C_1 \sin x + C_2,$$

$$y = \int (2x + C_1 \sin x + C_2) dx = x^2 - C_1 \cos x + C_2 x + C_3.$$

Таким чином, шуканий загальний розв'язок даного рівняння третього порядку має вигляд

$$y = x^2 - C_1 \cos x + C_2 x + C_3. \blacktriangleleft$$

► в) Дане рівняння не містить явно аргумент x . Покладемо $y' = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy} p$.

Рівняння набере вигляду $1 + p^2 = yp \frac{dp}{dy}$. Це рівняння першого порядку відносно $p(y)$ з

відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо одержаний вираз

$$\frac{p dp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{1}{2} \int \frac{d(p^2 + 1)}{p^2 + 1} = \int \frac{dy}{y}, \quad \ln(p^2 + 1) = 2 \ln|y| + 2 \ln|C_1|;$$

$$p^2 + 1 = C_1^2 y^2, \quad p = \pm \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$$

Повертаючись до невідомої функції y , одержимо

$$y' = \pm \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx, \quad \frac{1}{C_1} \int \frac{d(C_1 y)}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \pm \int dx.$$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$\frac{1}{C_1} \ln |C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}| = x + C_2. \blacktriangleleft$$

18. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння:

$$\text{а) } y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$\text{б) } xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e^2;$$

$$\text{в) } y^3 y' y'' + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

► а) Інтегруючи, одержуємо спочатку $y' = \tan x + C_1$. Повторне інтегрування дає $y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$ – це загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Далі розв'язуємо систему рівнянь відносно сталих інтегрування C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} -\ln \cos \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} C_1 + C_2 = \frac{\ln 2}{2}, \\ \tan \frac{\pi}{4} + C_1 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} C_1 + C_2 = \frac{\ln 2}{2}, \\ 1 + C_1 = 1, \end{cases} \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок $y = -\ln|\cos x|$. $\blacktriangleleft$

► б) Маємо рівняння, що не містить явно y . Понизимо порядок цього рівняння на 1, поклавши $z = y'$. Тоді $y'' = z'$, і дане рівняння перетворюється на однорідне диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції z

$$xz' = z \ln \frac{z}{x}, \quad \text{або} \quad z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x}.$$

Розв'язуємо його за допомогою підстановки $u = z/x$, $z = ux$. Тоді $z' = u'x + u$, і дане рівняння набуває вигляду

$$u'x + u = u \ln u.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, послідовно знаходимо

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln |C_1|,$$

$$\ln u - 1 = C_1 x, \quad \ln u = C_1 x + 1, \quad u = e^{C_1 x + 1}, \quad z = x e^{C_1 x + 1}.$$

Оскільки $z = y'$, то останнє рівняння є рівнянням першого порядку відносно невідомої функції $y(x)$, яке розв'язується інтегруванням,

$$\begin{aligned} y' &= x e^{C_1 x + 1}, \quad y = \int x e^{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} \int x d(e^{C_1 x + 1}) = \frac{1}{C_1} \left(x e^{C_1 x + 1} - \int e^{C_1 x + 1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{C_1} \left(x e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \right) + C_2 = \frac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2. \end{aligned}$$

Отже, одержали загальний розв'язок $y = \frac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2$.

Знаходимо сталі C_1 і C_2 з початкових умов $y(1) = e$, $y'(1) = e^2$. Одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} e = \frac{C_1 - 1}{C_1^2} e^{C_1 + 1} + C_2, \\ e^2 = e^{C_1 + 1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = \frac{C_1 - 1}{C_1^2} e^{C_1 + 1} + C_2, \\ 1 + C_1 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = e. \end{cases}$$

Тому шуканий частинний розв'язок даного рівняння визначається формулою $y = (x - 1)e^{x+1} + e$. ◀

► в) Як і в прикладі №17 в), покладемо $y' = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy} p$. Одержимо рівняння

першого порядку відносно $p(y)$ з відокремлюваними змінними $y^3 p^2 \frac{dp}{dy} + 1 = 0$.

Відокремлюємо змінні та інтегруємо

$$p^2 dp = -y^{-3} dy, \quad \int p^2 dp = -\int y^{-3} dy,$$

$$\frac{p^3}{3} = \frac{1}{2y^2} + C_1, \quad p = \sqrt[3]{\frac{3}{2y^2} + 3C_1}.$$

Враховуючи, що $p = y' = \frac{dy}{dx}$, останнє рівняння перепишемо у вигляді $y' = \sqrt[3]{\frac{3}{2y^2} + 3C_1}$.

Попередньо знайдемо значення довільної сталої C_1 , підставивши з початкових умов

$y = 1, y' = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Одержимо рівняння відносно C_1 $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + 3C_1}$, звідки $C_1 = 0$. Таким

чином, приходимо до рівняння $y' = \left(\frac{3}{2y^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, яке легко розв'язується шляхом відокремлення змінних і подальшого інтегрування

$$dy = \left(\frac{3}{2y^2}\right)^{\frac{1}{3}} dx, \quad y^{\frac{2}{3}} dy = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} dx, \quad \int y^{\frac{2}{3}} dy = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \int dx,$$

$$\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} (x + C_2), \quad y = \sqrt[5]{\frac{125(x + C_2)^3}{18}}.$$

З початкової умови $y(1)=1$ знайдемо C_2 . Маємо $1 = \sqrt[5]{\frac{125(1 + C_2)^3}{18}}$, $C_2 = \frac{\sqrt[3]{18}}{5} - 1$.

Отже, шуканий частинний розв'язок визначається формулою $y = \sqrt[5]{\frac{(5x + \sqrt[3]{18} - 5)^3}{18}}$. ◀

19. Показати, що система функцій e^x, e^{-x}, e^{2x} є фундаментальною для ЛОДР $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, і записати його загальний розв'язок.

► Підставляння функцій $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{2x}$ в дане ЛОДР показує, що кожна з них є його розв'язком. Вронскіаном даної системи функцій є визначник

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0.$$

Отже, функції e^x, e^{-x}, e^{2x} лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему розв'язків для даного ЛОДР. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}. \quad \blacktriangleleft$$

20. Функції $y_1 = 1, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$ є розв'язками деякого диференціального рівняння третього порядку. Переконатися, що вони утворюють лінійно незалежну систему, і скласти це рівняння.

► Складемо визначник Вронського

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Бачимо, що функції $y_1 = 1; y_2 = e^x; y_3 = e^{2x}$ лінійно незалежні. Загальний розв'язок шуканого рівняння має вигляд $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$. Тепер зрозуміло, що чотири функції $y, 1, e^x, e^{2x}$ вже утворюють лінійно залежну систему (функція y лінійно виражається через решту функцій), тому визначник Вронського дорівнює нулю, тобто

$$\begin{aligned} W(y, 1, e^x, e^{2x}) &= \begin{vmatrix} y & 1 & e^x & e^{2x} \\ y' & 0 & e^x & 2e^{2x} \\ y'' & 0 & e^x & 4e^{2x} \\ y''' & 0 & e^x & 8e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{3x} \begin{vmatrix} y & 1 & 2 \\ y' & 1 & 4 \\ y'' & 1 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= -e^{3x}(y''' - 3y'' + 2y') = 0. \end{aligned}$$

Звідси одержимо шукане диференціальне рівняння $y''' - 3y'' + 2y' = 0$. ◀

Зауваження. Загального методу знаходження фундаментальної системи розв'язків для ЛОДР не існує. Проте, якщо відомий який-небудь частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (2), то підстановка $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$ приводить це рівняння до лінійного рівняння відносно функції $z(x)$, яке не містить явно саму функцію $z(x)$. Тому, покладаючи $z'(x) = u(x)$, отримаємо лінійне однорідне рівняння $(n-1)$ -го порядку відносно функції $u(x)$, тобто вдається понизити порядок ЛОДР на одну одиницю. Проілюструємо це прикладом.

21. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

► Легко перевірити, що функція $y_1 = x$ є частинним розв'язком даного ЛОДР. Дійсно, підставляючи у ліву частину рівняння виразів $y = x, y' = 1, y'' = 0$ перетворює рівняння у тотожність $0 \equiv 0$. Отже, нам відомий один з частинних розв'язків даного рівняння. Покладемо тепер $y(x) = x \cdot z(x)$, $y' = z + xz'$, $y'' = xz'' + 2z'$. Одержимо

$$(1+x^2)xz'' + 2(1+x^2)z' - 2xz - 2x^2z' + 2xz = 0,$$

або (після зведення подібних і скорочення на вираз $1+x^2$) $(1+x^2)xz'' + 2z' = 0$. Ввівши заміну $z' = u$, $z'' = u'$, понизимо порядок рівняння. Маємо $(1+x^2)xu' + 2u = 0$ – диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Звідси

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x(1+x^2)}, \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{2dx}{x(1+x^2)}.$$

Для знаходження інтеграла від правильного раціонального дробу у лівій частині застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}; \quad A(x^2+1) + (Bx+C)x = -2;$$

$$A+B=0, \quad C=0, \quad A=-2, \quad B=2; \quad \frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}.$$

Інтегруємо тепер обидві частини

$$\ln|u| = -2\ln|x| + \ln(x^2+1) + \ln|C_1|, \quad \text{або} \quad \ln|u| = \ln\left|\frac{C_1(x^2+1)}{x^2}\right|,$$

звідки $u = C_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$$\text{Отже, } z' = C_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \quad z = C_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2.$$

Тепер можна записати загальний розв'язок даного ЛОДР у вигляді $y = xz$, тобто $y = C_1(x^2 - 1) + C_2x$. ◀

22. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

► Маємо ЛОДР третього порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$, тобто $(\lambda - 1)^3 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, тому фундаментальна система розв'язків $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$. Отже, загальний розв'язок $y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.

Для визначення сталих C_1, C_2, C_3 знайдемо похідні

$$y' = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_2 + 2C_3x),$$

$$y'' = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2 + 2C_2 + 4C_3x + 2C_3)$$

і врахуємо початкові умови. Одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 3, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = 0. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y = e^x(1 + x)$. ◀

23. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 15y' + 26y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

► Для кожного випадку складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його корені, фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок:

$$a) \lambda^2 - 15\lambda + 26 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 13; \quad y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{13x};$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{13x};$$

$$б) \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -3; \quad y_1 = e^{-3x}, y_2 = x e^{-3x};$$

$$y = e^{-3x} (C_1 + C_2 x);$$

$$в) \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i; \quad y_1 = e^x \cos 3x, y_2 = e^x \sin 3x;$$

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \blacktriangleleft$$

24. Два однакових вантажі підвішені до кінця пружини. Знайти рівняння руху, яке здійснюватиме один з цих вантажів, якщо інший відірветься.

► Нехай збільшення довжини пружини під дією одного вантажу у стані спокою дорівнює a і маса вантажу m . Позначимо через x координату вантажу, яка відраховується по вертикалі від положення рівноваги за наявності одного вантажу. Тоді за другим законом Ньютона маємо рівняння

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(x + a), \text{ де } k = \frac{mg}{a}. \text{ Отже, } \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{a} x = 0.$$

Це ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \frac{g}{a} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{a}} i.$$

Фундаментальною системою розв'язків буде $x_1 = \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t$, $x_2 = \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t$, а загальний

розв'язок матиме вигляд $x = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t$.

Враховуючи початкові умови, покладемо $x = a$, $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$, звідки

$$C_1 = a, \quad C_2 = 0. \text{ Отже, } x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t. \blacktriangleleft$$

25. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = \sqrt{x},$$

застосовуючи метод варіації довільних сталих.

► Відповідне ЛОДР має вигляд

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0.$$

Як уже зауважили, загального методу знаходження фундаментальної системи розв'язків для ЛОДР не існує. Власне в цьому і полягає складність розв'язування ЛОДР з

функціональними коефіцієнтами. Але в даному випадку можна здогадатися, що частинними розв'язками ЛОДР є деякі многочлени і безпосередньою перевіркою переконатися, що кожна з функцій $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ є частинним розв'язком цього ЛОДР. Функції x , x^2 , x^3 лінійно незалежні, отже, вони утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР. Тому загальний розв'язок ЛОДР буде $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$, а загальний розв'язок даного ЛНДР будемо за методом Лагранжа шукати у вигляді

$$y = C_1(x)x + C_2(x)x^2 + C_3(x)x^3,$$

де похідні невідомих функцій визначаємо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' \cdot x + C_2' \cdot x^2 + C_3' \cdot x^3 = 0, \\ C_1' \cdot 1 + C_2' \cdot 2x + C_3' \cdot 3x^2 = 0, \\ C_1' \cdot 0 + C_2' \cdot 2 + C_3' \cdot 6x = \sqrt{x}. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}, \quad C_2'(x) = -\sqrt{x}, \quad C_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

звідки

$$C_1(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \tilde{C}_2, \quad C_3(x) = \sqrt{x} + \tilde{C}_3,$$

де $\tilde{C}_i$ ($i=1, 2, 3$) – довільні сталі.

Отже, загальний розв'язок даного ЛНДР має вигляд

$$y = \tilde{C}_1x + \tilde{C}_2x^2 + \tilde{C}_3x^3 + \frac{1}{5}\sqrt{x^5} \cdot x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cdot x^2 + \sqrt{x} \cdot x^3,$$

або $y = \tilde{C}_1x + \tilde{C}_2x^2 + \tilde{C}_3x^3 + \frac{8}{15}\sqrt{x^7}$, де $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ – довільні сталі. ◀

Зауваження. Якщо порядок диференціального рівняння $n=2$, система (81) для визначення $C_1'(x), C_2'(x)$ набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \quad (82)$$

Значно спрощується ситуація, коли маємо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами, оскільки в цьому випадку є чітка процедура побудови загального розв'язку відповідного ЛОДР за допомогою характеристичного рівняння.

26. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

► Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Тому для знаходження загального розв'язку відповідного ЛОДР складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$, корені якого $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Загальним розв'язком ЛОДР буде $\tilde{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.

Загальний розв'язок ЛНДР будемо шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x) \sin 2x + C_2(x) \cos 2x,$$

вважаючи C_1 та C_2 функціями від x . Для знаходження $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему виду (82)

$$\begin{cases} C_1' \sin 2x + C_2' \cos 2x = 0, \\ 2C_1' \cos 2x - 2C_2' \sin 2x = \frac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно C_1' та C_2' знайдемо $C_1'(x) = \frac{1}{2}, C_2'(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$.

Інтегруючи, одержимо

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \int dx = \frac{x}{2} + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{2} \int \operatorname{tg} 2x dx = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + \tilde{C}_2.$$

Отже, загальним розв'язком ЛНДР буде

$$y = \left(\frac{x}{2} + \tilde{C}_1 \right) \sin 2x + \left(\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + \tilde{C}_2 \right) \cos 2x, \text{ або}$$

$$y = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \tilde{C}_1 \sin 2x + \tilde{C}_2 \cos 2x. \blacktriangleleft$$

27. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

► Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо відповідне ЛОДР $y'' - y' = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda = 0$, корені якого $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Отже, фундаментальна система розв'язків ЛОДР $y_1 = 1, y_2 = e^x$, а загальним розв'язком є $\tilde{y} = C_1 + C_2 e^x$.

Деякий частинний розв'язок даного ЛНДР будемо шукати у такому ж вигляді, вважаючи $C_i = C_i(x)$, $i = 1; 2$, тобто $y^* = C_1(x) + C_2(x)e^x$.

Як ми знаємо, частинний розв'язок ЛНДР одержимо, якщо при інтегруванні функцій $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$ покладемо сталі інтегрування рівними нулю.

Система для знаходження $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$ має вигляд

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) e^x = 0, \\ C_1'(x) \cdot 0 + C_2'(x) e^x = \frac{1}{e^x + 1}, \end{cases}$$

звідки знаходимо $C_1'(x) = -\frac{1}{e^x + 1}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{e^x(e^x + 1)}.$

Інтегруючи, отримаємо

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{dx}{e^x + 1} = \left| \begin{array}{l} e^x + 1 = t, t > 0, \\ e^x = t - 1, t - 1 > 0, \\ e^x dx = dt, \\ dx = \frac{dt}{t - 1} \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-1} = \\ &= \ln t - \ln(t-1) = \ln(e^x + 1) - \ln e^x = \ln(e^x + 1) - x, \\ C_2(x) &= \int \frac{dx}{e^x(e^x + 1)} = \int \frac{e^{-2x} dx}{e^{-x} + 1} = -\int \frac{(e^{-x} + 1 - 1)de^{-x}}{e^{-x} + 1} = -\int de^{-x} + \\ &+ \int \frac{d(e^{-x} + 1)}{e^{-x} + 1} = -e^{-x} + \ln(e^{-x} + 1) = -e^{-x} + \ln \frac{e^x + 1}{e^x} = -e^{-x} + \ln(e^x + 1) - x. \end{aligned}$$

Довільні сталі поклали рівними нулю. При інтегруванні були застосовані різні методи: метод заміни, тотожні перетворення підінтегральної функції, підведення функції під знак інтеграла тощо.

Таким чином, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$\begin{aligned} y^* &= \ln(e^x + 1) - x + e^x(-e^{-x} + \ln(e^x + 1) - x) = \\ &= \ln(e^x + 1) - x - 1 - xe^x + e^x \ln(e^x + 1). \end{aligned}$$

Запишемо тепер загальний розв'язок ЛНДР

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2 e^x - x + \ln(e^x + 1) - 1 - xe^x + e^x \ln(e^x + 1).$$

Визначимо сталі C_1 і C_2 з початкових умов. Для цього знайдемо похідну

$$y' = C_2 e^x - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1} - e^x - xe^x + e^x \ln(e^x + 1) + \frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

Покладемо в обох рівностях $x = 0$ і одержимо систему рівнянь відносно C_1 і C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2\ln 2 - 1 = 1, \\ C_2 - 1 + \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 + \frac{1}{2} = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 - \ln 2, \\ C_2 = 3 - \ln 2. \end{cases}$$

Тоді шуканий частинний розв'язок запишеться у вигляді

$$y = -1 - \ln 2 + e^x(3 - \ln 2) - x + \ln(e^x + 1) - 1 - xe^x + e^x \ln(e^x + 1),$$

або $y = -x + e^x(3 - \ln 2 - x) + (e^x + 1)\ln(e^x + 1) - 2 - \ln 2.$ ◀

28. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{IV} - 3y'' = 9x^2.$$

► Маємо ЛНДР четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

Складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його корені, фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок $\tilde{y}$ відповідного ЛОДР:

$$\begin{aligned}\lambda^4 - 3\lambda^2 &= 0, \quad \lambda^2(\lambda^2 - 3) = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}; \\ y_1 &= e^{0x} = 1, \quad y_2 = xe^{0x} = x, \quad y_3 = e^{\sqrt{3}x}, \quad y_4 = e^{-\sqrt{3}x}; \\ \tilde{y} &= c_1 + c_2x + c_3e^{\sqrt{3}x} + c_4e^{-\sqrt{3}x}.\end{aligned}$$

Права частина даного ЛНДР є многочленом, тобто маємо частинний випадок функції спеціального вигляду. У цьому випадку потрібно перевірити, чи є число нуль коренем характеристичного рівняння. Дійсно, характеристичне рівняння має двократний нульовий корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, тому частинний розв'язок y^* ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C),$$

оскільки права частина є многочленом саме другого степеня. Підставляючи $(y^*)'$, $(y^*)^{(4)}$ в дане ЛНДР, одержимо тотожність для знаходження невизначених коефіцієнтів. Тут і далі для зручності обчислень будемо виписувати вирази для функції y^* та її похідних в окремі рядки і ліворуч за вертикальною рискою записувати відповідні коефіцієнти, з якими вони входять до лівої частини даного ЛНДР. Виконавши множення виразів на ці коефіцієнти і подальше додавання, одержимо

$$\begin{array}{l|l} 0 & y^* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2, \\ 0 & (y^*)' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \\ -3 & (y^*)'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \\ 0 & (y^*)''' = 24Ax + 6B, \\ 1 & (y^*)^{(4)} = 24A, \\ & (y^*)^{(4)} - 3(y^*)'' = -36Ax^2 - 18Bx - 6C + 24A = 9x^2. \end{array}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах останньої тотожності, отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення A , B , C :

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -36A=9, \\ x^1 & -18B=0, \\ x^0 & -6C+24A=0, \end{array}$$

звідки $A = -1/4$, $B = 0$, $C = -1$. Отже, $y^* = x^2(-\frac{1}{4}x^2 - 1) -$

частинний розв'язок даного ЛНДР.

Загальним розв'язком рівняння є функція

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{4}x^4 - x^2. \blacktriangleleft$$

29. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x),$$

який задовольняє початкові умови

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -1.$$

► Маємо ЛНДР третього порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

Відповідне йому ЛОДР $y''' - 2y'' + y' = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$, корені якого $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = C_1 + (C_2 + C_3x)e^x$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = A \cos x + B \sin x,$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = 4(\sin x + \cos x)$ відповідає спеціальному вигляду правої частини (89) $f(x) = e^{\alpha x} (P_{s_1}(x) \cos \beta x + Q_{s_2}(x) \sin \beta x)$, $\max(s_1, s_2) = s$ при $s = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, причому число $\alpha + i\beta = i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знайдемо $(y^{*'}, y^{*''}, y^{*'''})$, підставимо в дане ЛНДР і, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів (див. приклад №28), одержимо $A = B = 2$.

Таким чином, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд $y^* = 2 \cos x + 2 \sin x$. Загальний розв'язок ЛНДР

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 + (C_2 + C_3x)e^x + 2 \cos x + 2 \sin x.$$

Продиференціювавши його двічі, знайдемо

$$y' = (C_2 + C_3(1+x))e^x + 2(-\sin x + \cos x),$$

$$y'' = (C_2 + C_3(2+x))e^x - 2(\cos x + \sin x).$$

Скориставшись початковими умовами $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 2, \\ C_2 + C_3 + 2 = 2, \\ C_2 + 2C_3 - 2 = -1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 1$.

Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y = 1 + (x-1)e^x + 2\cos x + 2\sin x. \blacktriangleleft$$

30. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$\text{а) } y'' - 2y' + 2y = x^2; \quad \text{б) } 2y'' - y' - y = 4xe^{2x};$$

$$\text{в) } y'' - 2y' + y = xe^x; \quad \text{г) } y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$$

► а) Маємо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Відповідне йому ЛОДР $y'' - 2y' + 2y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, корені якого $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $y^* = Ax^2 + Bx + C$, бо права частина $f(x) = x^2$ відповідає спеціальному виду правої частини $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x}$ при $s = 2, \alpha = 0$, причому $\alpha = 0$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знайдемо $(y^*)', (y^*)''$ та підставимо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ у дане ЛНДР. Як уже вказувалося, для зручності обчислень будемо виписувати вирази для функції y^* та її похідних в окремі рядки і ліворуч за вертикальною рискою записувати відповідні коефіцієнти, з якими вони входять до лівої частини даного ЛНДР. Виконавши множення виразів на ці коефіцієнти і подальше додавання, одержимо

$$\begin{array}{l|l} 2 & y^* = Ax^2 + Bx + C, \\ -2 & (y^*)' = 2Ax + B, \\ 1 & (y^*)'' = 2A, \end{array}$$

$$(y^*)'' - 2(y^*)' + 2y^* = 2Ax^2 + x(2B - 4A) + (2C - 2B + 2A) = x^2.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2A = 1, \\ x^1 & 2B - 4A = 0, \\ x^0 & 2C - 2B + 2A = 0, \end{array} \quad \text{звідки } A = \frac{1}{2}, B = 1, C = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^* = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Загальним розв'язком даного ЛНДР буде

$$y = \tilde{y} + y^* = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2. \blacktriangleleft$$

►б) Маємо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду. Відповідне йому ЛОДР $2y'' - y' - y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, корені якого $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1/2$.

Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x/2}$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукатимемо методом підбору за виглядом правої частини, тобто у вигляді

$$y^* = e^{2x} (Ax + B),$$

оскільки права частина даного ЛНДР $f(x) = 4xe^{2x}$ відповідає випадку $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x}$ при $s = 1$, $\alpha = 2$, причому $\alpha = 2$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $(y^*)'$, $(y^*)''$ та підставляємо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ у ЛНДР. В результаті отримаємо тотожність. Знову для зручності обчислень записуємо вирази для $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в окремі рядки, а ліворуч за вертикальною рискою – коефіцієнти, з якими вони входять до лівої частини ЛНДР. Множимо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ на відповідні коефіцієнти, додаємо, зводимо подібні члени і маємо тотожність, яка записується нижче горизонтальної риски. Таким чином,

-1		$y^* = e^{2x} (Ax + B),$
-1		$(y^*)' = 2e^{2x} (Ax + B) + e^{2x} A = e^{2x} (2Ax + 2B + A),$
2		$(y^*)'' = 2e^{2x} (2Ax + 2B + A) + e^{2x} 2A = e^{2x} (4Ax + 4B + 4A),$
$2(y^*)'' - (y^*)' - y^* = e^{2x} (5Ax + 5B + 7A) = 4xe^{2x}.$		

Скоротивши на e^{2x} та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x , маємо

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 5A = 4, \\ x^0 & 5B + 7A = 0, \end{array} \quad \text{звідки} \quad A = \frac{4}{5}, B = -\frac{28}{25}.$$

Частинний розв'язок ЛНДР має вигляд $y^* = e^{2x} \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25} \right)$.

Загальний розв'язок ЛНДР буде наступним

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x} \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25} \right). \blacktriangleleft$$

►в) Маємо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Відповідне йому ЛОДР $y'' - 2y' + y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, корені якого $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^x$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = x^2 e^x (Ax + B),$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = xe^x$ має вигляд $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x}$ при $s=1, \alpha=1$, причому число $\alpha=1$ є коренем характеристичного рівняння кратності $r=2$. Останнє зумовлює присутність множника x^2 .

Знайдемо $(y^*)', (y^*)''$ та підставимо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ у ЛНДР:

$$\begin{array}{l|l} 1 & y^* = e^x (Ax^3 + Bx^2), \\ -2 & (y^*)' = e^x (3Ax^2 + 2Bx) + e^x (Ax^3 + Bx^2), \\ 1 & (y^*)'' = e^x (Ax^3 + x^2(3A+B) + 2Bx) + e^x (3Ax^2 + 2x(3A+B) + 2B). \end{array}$$

$$(y^*)'' - 2(y^*)' + y^* = e^x (x^3(A-2A+A) + x^2(3A+B+3A-6A-2B+B) + x(2B+6A+2B-4B) + 2B) = xe^x.$$

Скоротивши на e^x ,

після перетворень отримаємо $6Ax + 2B = x$. Прирівнявши коефіцієнти при однакових

степенях x , маємо
$$\begin{array}{l|l} x^1 & 6A=1, \\ x^0 & 2B=0, \end{array}$$
 звідки $A = \frac{1}{6}, B = 0$.

Частинний розв'язок ЛНДР має вигляд $y^* = \frac{1}{6}x^3e^x$.

Отже, загальним розв'язком ЛНДР буде

$$y = \tilde{y} + y^* = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{6}x^3e^x. \blacktriangleleft$$

►г) Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Відповідне йому ЛОДР $y'' + 4y' + 4y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, або $(\lambda + 2)^2 = 0$. Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, тобто $\lambda = -2$ – корінь кратності $r = 2$.

Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = A \cos 2x + B \sin 2x,$$

бо права частина заданого ЛНДР $f(x) = \cos 2x$ має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_{s_1}(x) \cos \beta x + Q_{s_2}(x) \sin \beta x], \max(s_1, s_2) = s \text{ при } s=0, \alpha=0, \beta=2, \text{ причому}$$

число $\alpha + i\beta = 2i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знайдемо $(y^*)', (y^*)''$ та підставимо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ у ЛНДР:

$$\begin{array}{l|l} 4 & y^* = A \cos 2x + B \sin 2x, \\ 4 & (y^*)' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \\ 1 & (y^*)'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x, \end{array}$$

$$\cos 2x(-4A + 8B + 4A) + \sin 2x(-4B - 8A + 4B) = \cos 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$, одержимо
$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array} \right| \begin{array}{l} 8B = 1, \\ -8A = 0, \end{array} \quad \text{звідки}$$

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{8}.$$

Частинний розв'язок ЛНДР має вигляд $y^* = \frac{1}{8} \sin 2x$.

Отже, загальний розв'язок ЛНДР

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x} + \frac{1}{8} \sin 2x. \quad \blacktriangleleft$$

31. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$\text{а) } y'' + 6y' + 10y = 80e^x \cos x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 10;$$

$$\text{б) } y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

► а) Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Від-

повідне йому ЛОДР $y'' + 6y' + 10y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$, корені якого $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$.

Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = e^{-3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = e^x (A \cos x + B \sin x),$$

бо права частина $f(x) = 80e^x \cos x$ є частинним випадком виразу $f(x) = e^{\alpha x} [P_{s_1}(x) \cos \beta x + Q_{s_2}(x) \sin \beta x]$, $\max(s_1, s_2) = s$ при $s = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, причому число $\alpha + i\beta = 1 + i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $(y^*)'$, $(y^*)''$ та підставляємо y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ у ЛНДР:

$$\begin{array}{l|l} 10 & y^* = e^x (A \cos x + B \sin x), \\ 6 & (y^*)' = e^x (A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x), \\ 1 & (y^*)'' = e^x (-2A \sin x + 2B \cos x), \end{array}$$

$$e^x [(16A + 8B) \cos x + (16B - 8A) \sin x] = 80e^x \cos x.$$

Скорочуємо на e^x і прирівнюємо коефіцієнти при $\cos x$, $\sin x$:
$$\left. \begin{array}{l} \cos x \\ \sin x \end{array} \right| \begin{array}{l} 16A + 8B = 80, \\ 16B - 8A = 0, \end{array}$$

звідки $A = 4$, $B = 2$.

Таким чином, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^* = e^x (4 \cos x + 2 \sin x).$$

Загальний розв'язок ЛНДР буде наступним:

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^x(2 \cos x + \sin x).$$

Тепер з початкових умов $y(0) = 4$, $y'(0) = 10$, потрібно визначити сталі C_1, C_2 .

Знаходимо

$$y' = e^{-3x}(-3C_1 \cos x - 3C_2 \sin x - C_1 \sin x + C_2 \cos x) + 2e^x(3 \cos x - \sin x).$$

$$\text{Розв'язуємо систему рівнянь} \begin{cases} y(0) = C_1 + 4 = 4, \\ y'(0) = -3C_1 + C_2 + 6 = 10, \end{cases} \text{ звідки } C_1 = 0, C_2 = 4.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок ЛНДР, що задовольняє задані початкові умови, має вигляд

$$y = 4e^{-3x} \sin x + 2e^x(2 \cos x + \sin x). \blacktriangleleft$$

►б) Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його корені, фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок $\tilde{y}$ відповідного ЛОДР:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2;$$

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-2x}; \quad \tilde{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Частинний розв'язок ЛНДР y^* шукаємо у вигляді $y^* = A \cos x + B \sin x$, оскільки аналіз показує, що права частина має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_{s_1}(x) \cos \beta x + Q_{s_2}(x) \sin \beta x], \quad \max(s_1, s_2) = s,$$

де $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\alpha + \beta i = i$, а характеристичне рівняння не має такого кореня, отже $r = 0$; окрім того $s_1 = s_2 = 0$, тому і $s = 0$. Таким чином,

$$\begin{array}{l|l} 1 & y^* = A \cos x + B \sin x, \\ 1 & (y^*)' = -A \sin x + B \cos x, \\ -2 & (y^*)'' = -A \cos x - B \sin x, \end{array}$$

$$(y^*)'' + (y^*)' - 2y^* = (B - 3A) \cos x + (-3B - A) \sin x = \cos x - 3 \sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$ у лівій і правій частинах останньої рівності, приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення A, B

$$\begin{array}{l|l} \cos x & B - 3A = 1, \\ \sin x & -3B - A = -3, \end{array}$$

звідки $A = 0$, $B = 1$. Отже, $y^* = \sin x$ – частинний розв'язок даного ЛНДР.

Загальним розв'язком ЛНДР є функція

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \sin x.$$

Для визначення сталих C_1 та C_2 знайдемо похідну

$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + \cos x$ і врахуємо початкові умови. Одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 2C_2 + 1 = 2, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок $y = e^x + \sin x$. ◀

32. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x}.$$

► Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, праву частину якого можна подати у вигляді суми двох функцій спеціального вигляду.

Відповідне ЛОДР $y'' + y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$, корені якого $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

За принципом суперпозиції розв'язків частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = y_1^* + y_2^* = (Ax + B)e^x + Ce^{-x},$$

бо для y_1^* маємо $f_1(x) = xe^x$, $s=1$, $\alpha=1$, число α не є коренем характеристичного рівняння; для y_2^* маємо $f_1(x) = 2e^{-x}$, $s=1$, $\alpha=-1$, число α не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $(y^*)'$, $(y^*)''$ та підставляємо y^* , $(y^*)'$ у задане диференціальне рівняння

$$\begin{array}{l|l} 1 & y^* = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}, \\ 0 & (y^*)' = (Ax + B + A)e^x - Ce^{-x}, \\ 1 & (y^*)'' = (Ax + B + A + A)e^x + Ce^{-x}, \end{array}$$

$$e^x(2Ax + 2B + 2A) + 2Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x}.$$

Після перетворень маємо

$$2Axe^x + 2(A + B)e^x + 2Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при xe^x, e^x, e^{-x} , отримаємо

$$\begin{array}{l|l} xe^x & 2A = 1, \\ e^x & 2(A + B) = 0, \\ e^{-x} & 2C = 2, \end{array} \text{ звідки } A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = 1.$$

Таким чином, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^* = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) e^x + e^{-x}.$$

Загальний розв'язок ЛНДР

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}. \blacktriangleleft$$