Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова,
І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний,

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Київ — 2013

Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій. (І курс ІІ семестр) / Уклад.: В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний, — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 144 с.

Навчальне видання

Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних.
Диференціальні рівняння.
Конспект лекцій

для студентів I курсу технічних спеціальностей

Укладачі: *Гайдей Віктор Олександрович*, канд. фіз-мат. наук
Федорова Лідія Борисівна, канд. фіз-мат. наук, доц.
Алєксєєва Ірина Віталіївна, канд. фіз-мат. наук, доц.
Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *О. І. Клесов*, д-р фіз.-мат. наук, професор

Зміст

Передмова

Конспект лекцій з вищої математики «Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння» є складовою **навчального комплекту** з вищої математики, який містить:

— конспект лекцій,

— практикум,

— збірник задач, індивідуальних домашніх завдань і тестів.

Конспект складено на основі багаторічного досвіду викладання математики в НТУУ «Київський політехнічний інститут», його зміст відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей НТУУ «КПІ» денної та заочної форм навчання і містить такі розділи дисципліни «Вища математика»:

— диференціальне числення функцій кількох змінних;

— визначені інтеграли;

— невластиві інтеграли;

— подвійні інтеграли;

— потрійні інтеграли;

— криволінійні інтеграли 1-го і 2-го роду;

— поверхневі інтеграли 1-го і 2-го роду;

— елементи теорії поля;

— диференціальні рівняння 1-го порядку, які інтегруються у квадратурах і рівняння вищих порядків, які зводяться до них;

— лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Конспект містить теоретичний матеріал, обсяг і рівень строгості якого потребує курс вищої математики для майбутніх інженерів. Передбачено, що опанування лекції з конспекту супроводжується опануванням відповідного заняття з практикуму.

Метою конспекту є:

— систематичний виклад теоретичного матеріалу, що звільняє лектора від «надиктовування» і дозволяє більше пояснювати;

— ефективна підготовка студента до колоквіуму та іспиту;

— виділення наріжних питань математичного аналізу.

1

Диференціальне числення функцій кількох змінних

Лекція 1. Функції кількох змінних. Границя і неперервність

1.1. Арифметичний *n*-вимірний простір

Функції однієї незалежної змінної не охоплюють усі залежності, що існують у природі. Природно розширити поняття функціональної залежності і розглянути числові функції кількох змінних і вектор-функції однієї змінної.

Поширюючи геометричні методи на теорію функцій будь-якої кількості змінних, в математиці запроваджують поняття n-вимірного простору.

Арифметичним n-вимірним простором $\mathbb{R}^n$ називають множину всіляких упорядкованих наборів з n чисел $(x_1; x_2; ...; x_n)$, які називають *точками* простору і позначають $M(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Арифметичний n-вимірний простір називають *евклідовим* простором $\mathbb{R}^n$, якщо між будь-якими його точками $M'(x_1'; x_2'; ...; x_n')$ і $M''(x_1''; x_2''; ...; x_n'')$ означено *віддаль* (*метрику*) за формулою

$$\boxed{\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + ... + (x_n'' - x_n')^2}.}$$

Зокрема, евклідів простір $\mathbb{R}^1$ називають *координатною прямою*, а евклідів простір $\mathbb{R}^2$ — *координатною площиною*.

1.2. Підмножини евклідового простору $\mathbb{R}^n$

1. Окіл. ε-*околом* точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ (n-вимірною кулею радіусом ε із центром у точці M_0) називають множину точок

$$\boxed{U_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \rho(M_0, M) < \varepsilon\}.}$$

Зокрема, для $n=2$ маємо круг радіусом ε з центром у точці $M_0(x_0;y_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2;$$

для $n=3$ маємо кулю радіусом ε із центром у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\varepsilon^2.$$

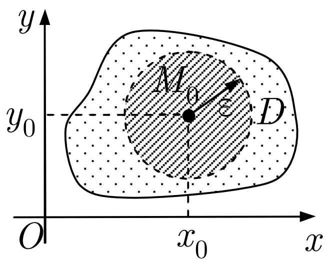


Рис. 1.1. ε-окіл на площині ($\mathbb{R}^2$)

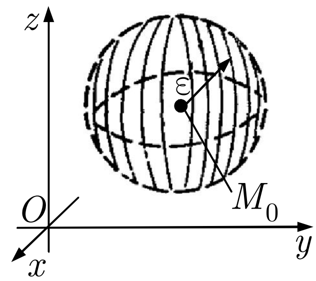


Рис. 1.2. ε-окіл у просторі ($\mathbb{R}^3$)

2. Відкрита множина. Точку $M_0 \in D$ називають *внутрішньою* точкою множини D, якщо вона належить множині D разом з деяким своїм ε-околом. Множину D називають *відкритою*, якщо кожна її точка внутрішня.

Прикладом відкритої множини є ε-окіл будь-якої точки.

3. Область. Множину D називають *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати неперервною кривою (зокрема ламаною), що повністю лежить у множині D.

Відкриту зв'язну множину називають *областю*.

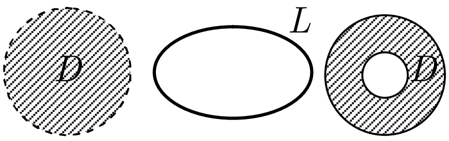


Рис. 1.3. Приклади зв'язних множин

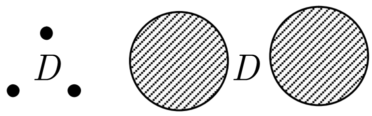


Рис. 1.4. Приклади незв'язних множин

4. Межа множини. *Межовою точкою* множини D називають точку, в будь-якому околі якої є точки, що належать множині D, і точки, що не належать множині D. Множину всіх межових точок множини називають *межею множини* D і позначають ∂D.

5. Замкнена множина. *Граничною* точкою множини D називають точку, будь-який окіл якої містить нескінченну множину точок із D. Кожна гранична точка множини є або її внутрішньою точкою, або її межовою точкою. Об'єднання множини D і множини його граничних точок називають *замиканням* множини D і позначають $\overline{D}$. Множину D називають *замкненою*, якщо вона містить усі свої граничні точки, тобто збігається з власним замиканням.

Прикладом замкненої множини є круг зі своєю межею колом або куля зі своєю межею сферою.

1.3. Функції кількох змінних

Розгляньмо деяку множину точок D простору $\mathbb{R}^n$.

Якщо існує правило f, яке кожній точці $M(x_1;x_2;...;x_n) \in D$ ставить у відповідність число u, то кажуть, що задано функцію f n-змінних і позначають

$$u=f(x_1,x_2,...,x_n)=f(M), M \in D.$$

Множину D називають *областю означення* функції f і позначають $D(f)$. Число $u = f(M)$ називають *значенням функції* в точці M. Множину

$$E(f) = \{u \in \mathbb{R} \mid u = f(M), M \in D(f)\}$$

називають *множиною значень* функції f.

Оскільки всі найважливіші застосування можна спостерігати вже на функціях двох змінних, то надалі детальніше розглядатимемо саме їх.

Функцію двох змінних $z = f(x, y)$, $M(x; y) \in D$, можна зобразити графічно.

Для цього в кожній точці $(x; y) \in D$ обчислюють значення функції $z = f(x, y)$. Сукупність точок $P(x; y; f(x, y))$ утворює графік G_f функції $z = f(x, y)$, що є деякою поверхнею у просторі $\mathbb{R}^3$.

Приміром, областю означення функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ є круг $x^2 + y^2 \le 1$, а графіком — верхня півсфера з центром у точці O радіусом 1.

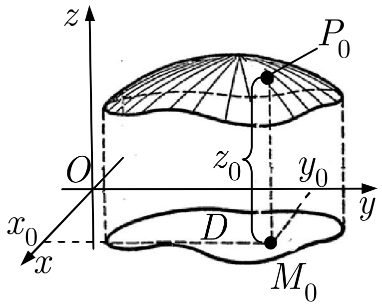


Рис. 1.5. Графік функції двох змінних

1.4. Дослідження графіків функцій методом перерізів

Для зображення функцій двох змінних часто використовують метод перерізів, який полягає в тому, що поверхню $z = f(x, y)$ перетинають площинами $x = x_0$ та $y = y_0$ і за кривими $z = f(x_0, y)$ та $z = f(y_0, x)$ визначають вигляд графіка функції $z = f(x, y)$.

Але можна фіксувати значення не аргументів, а функції, тобто перетинати поверхню площинами $z = C, C \in E(f)$. При цьому одержуємо криву

$$\boxed{f(x, y) = C,}$$

яку називають *лінією рівня* функції.

Тобто, лінія рівня на площині Oxy — це проекція кривої, утвореної перерізом поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = C$.

Якщо покласти $C = C_1, C_2, ..., C_n, ...$, вибираючи ці числа в арифметичній прогресії з різницею h, то дістанемо низку ліній рівня, за взаємним розташуванням яких можна вивчати поведінку функції. Зокрема, де лінії густіші, функція міняється швидше (поверхня, що зображує функцію, йде крутіше), а там, де лінії рівня розташовані рідше, функція міняється повільніше (відповідна поверхня пологіша).

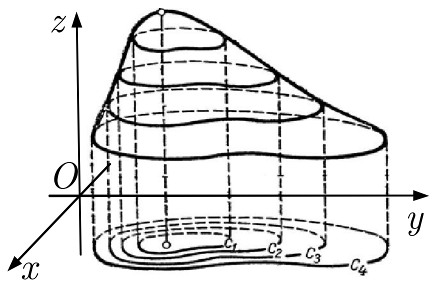


Рис. 1.6. Лінії рівня

Приміром, для функції $z = x^2 + y^2$ лініями рівня є кола $x^2 + y^2 = C \ge 0$.

Для функцій трьох змінних трьох змінних $u = f(x, y, z)$ розглядають *поверхні рівні* — множини точок $M(x; y; z)$ простору, які справджують рівність

$$\boxed{f(x, y, z) = C.}$$

1.5. Границя функції кількох змінних

Розгляньмо функцію $u = f(M), M(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in D$. Нехай точка

$$M_0(x_{10}; x_{20}; \ldots; x_{n0})$$

є граничною точкою множини D.

Означення 1.1. Число A називають *границею функції* f у точці M_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх точок M з проколеного δ-околу точки M_0 виконано нерівність

$$\boxed{\left|f(M) - A\right| < \varepsilon}$$

і позначають

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x_1 \to x_{10} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n \to x_{n0}}} f(x_1, \ldots, x_n) = A.}$$

З означення випливає, що якщо границя існує, то вона не залежить від шляху, за яким точка M прямує до точки M_0 (кількість таких напрямів нескінченна; для функцій однієї змінної $x \to x_0$ лише по двох напрямах).

Приміром, функція $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ має різні границі вздовж різних променів $y = kx$, коли $x \to 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

Властивості функцій однієї змінної, які мають скінченні границі, зберігаються і для функцій кількох змінних.

Теорема 1.1. Якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$, то:

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = A \pm B;$$

$$\lim_{M \to M_0} f(M) g(M) = AB; \ \lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

1.6. Неперервність функції кількох змінних

Розгляньмо функцію $u = f(M), M \in D$. І нехай точка M_0 є внутрішньою точкою множини D.

Означення 1.2. Функцію $u = f(M)$ називають *неперервною в точці* M_0, якщо

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).}$$

Якщо позначити

$$\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0),$$

то умову неперервності функції $u = f(M)$ у точці M_0 можна переписати як

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} \Delta f(M_0) = 0.}$$

Точки, в околі яких функція означена (крім, можливо, самих точок), але не є неперервною називають *точками розриву* функції.

Арифметичні дії з неперервними функціями і суперпозиція неперервних функцій приводить до неперервних функцій.

Для функцій кількох змінних точки розриву можуть заповнювати лінії (поверхні). Приміром, для функції $z = \dfrac{1}{9x^2 - 4y^2}$ точки розриву утворюють множину точок площини Oxy, що визначається рівністю $9x^2 - 4y^2 = 0$, тобто точки прямих $y = \pm\dfrac{3}{2}x$.

1.7. Функції неперервні в замкненій області

Функцію, неперервну в кожній точці області D, називають *неперервною в області* D.

Область на площині (у просторі) називають *обмеженою*, якщо існує круг (куля), який містить цю область. Область разом з її межею називають *замкненою областю*.

Теорема 1.2 (Веєрштраса). Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D}$, то

1) $z = f(M)$ обмежена в області $\overline{D}$;

2) $z = f(M)$ набуває в області $\overline{D}$ своїх найбільшого та найменшого значень.

Лекція 2. Похідні і диференціали функцій кількох змінних

2.1. Частинні похідні 1-го порядку

Похідна $f'(x)$ функції однієї змінної $y = f(x)$ характеризує швидкість змінення функції в точці x.

Для функції двох (або більшої кількості змінних) можна говорити про швидкість змінення функції в точці лише в певному напрямі, оскільки ця швидкість у різних напрямах може бути різною.

Нехай функція $z = f(x,y)$ означена в деякому околі $U(M_0)$ точки $M_0(x_0;y_0)$ і

$$M(x_0 + \Delta x; \Delta y) \in U(M_0),$$
$$M(x_0; y_0 + \Delta y) \in U(M_0).$$

Частинними приростами функції $f(x,y)$ за змінною x (за змінною y) у точці M_0 називають різниці

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta_x f(M_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),\\ \Delta_y f(M_0) &= f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\end{aligned}}$$

відповідно.

Означення 2.1. *Частинною похідною* функції $z = f(x,y)$ *за змінною* x (*за змінною* y) у точці M_0 називають границю відношення частинного приросту функції до відповідного приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля і позначають:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};\\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y f(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.\end{aligned}}$$

Ще використовують позначення:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}, z'_x(M_0), f'_x(M_0);$$
$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}, z'_y(M_0), f'_y(M_0).$$

З означення випливає, що, частинну похідну функції $z = f(x,y)$ за змінною x знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної (при цьому змінну y вважають сталою).

Приміром, для функції $z = x^y$ маємо:

1) $z'_x = yx^{y-1}$ (за правилом диференціювання степеневої функції, y — стала);

2) $z'_y = x^y \ln x$ (за правилом диференціювання показникової функції, x — стала).

Для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна означити n частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

де

$$\boxed{\frac{\partial u(M_0)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(M_0)}{\Delta x_i}, i = \overline{1, n}.}$$

Знаходять частинну похідну за певною змінною за правилами і формулами диференціювання функцій однієї змінної, при цьому решту змінних вважають сталими.

2.2. Диференційовність функції

Нагадаймо, що функцію $y = f(x)$ називають диференційовною в точці x_0, якщо її приріст у цій точці можна записати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha \Delta x,$$

де $A = A(x_0)$ стала щодо $\Delta x, \alpha = \alpha(\Delta x)$ — н. м. ф., коли $\Delta x \to 0$.

Необхідною і достатньою умовою диференційовності функції $y = f(x)$ у точці x_0 є існування скінченної похідної

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

Розгляньмо функцію $z = f(x, y)$ означену в деякому околі $U(M_0)$ і точку $M_0(x_0; y_0)$ і $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(M_0)$.

Повним приростом функції $z = f(x, y)$, який відповідає приростам аргументів

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0,$$

називають різницю

$$\boxed{\Delta z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(M) - f(M_0).}$$

Означення 2.2. Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційовною в точці* M_0, якщо в деякому околі цієї точки повний приріст функції можна записати як

$$\boxed{\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,}$$

де $A = A(M_0), B = B(M_0)$ — сталі щодо $\Delta x, \Delta y$;
$\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$, коли $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Теорема 2.1 (необхідні умови диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то:
1) в цій точці існують частинні похідні за обома змінними, причому

$$\boxed{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = A; \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = B;}$$

2) функція неперервна в точці M_0.

► 1) Для точки $(x_0 + \Delta x; y_0)$ маємо:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Звідси, розділивши обидві частини цієї рівності на $\Delta x \neq 0$ і враховуючи означення, маємо

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A.$$

Так само $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = B.$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \Delta f(M_0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\right) = 0.$

Отже, функція $z = f(x, y)$ неперервна в точці M_0. ◄

Повний приріст диференційовної функції f у точці M_0 можна записати як

$$\boxed{\Delta f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,}$$

де α, β — н. м. ф., коли $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

З неперервності функцій двох змінних у точці M_0 та з існування її частинних похідних у цій точці ще не випливає її диференційовність.

Теорема 2.2 (достатня умова диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки M_0, то функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M_0.

2.3. Повний диференціал функції

Розгляньмо диференційовну в точці $M_0(x_0; y_0)$ функцію $z = f(x, y)$.

Означення 2.3. *Повним диференціалом* функції $z = f(x, y)$ у точці M_0 називають лінійну щодо Δx та Δy частину повного приросту цієї функції в точці M_0 і позначають

$$\boxed{df(M_0) = dz(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y.}$$

Вирази $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x$ та $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y$ називають *частинними диференціалами* і позначають $d_x f(M_0)$ та $d_y f(M_0)$. Отже,

$$\boxed{df(M_0) = d_x f(M_0) + d_y f(M_0).}$$

З означення випливає, що при достатньо малих $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$ правдива наближена рівність

$$\Delta f(M_0) \approx df(M_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y,}$$

яку використовують у наближених обчисленнях.

Оскільки для незалежних змінних $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, формула для обчислення диференціала набуває вигляду

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.}$$

Для функції n змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ маємо формулу

$$\boxed{du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.}$$

Приклад 2.1. Знайти повний диференціал функції $z = x^3 \sin y$ у точці $M_0\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$.

2.4. Похідна складеної функції. Інваріантність повного диференціала

Розгляньмо функцію $z = f(x, y)$ двох змінних x та y, кожна з яких є функцією незалежної змінної t:

$$x = x(t), y = y(t),$$

тоді функція $f(x(t), y(t))$ є складеною функцією змінної t.

Теорема 2.3. Якщо функції $x = x(t), y = y(t)$ диференційовні в точці t, а функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, то складена функція $z = f(x(t), y(t))$ також диференційовна в точці t і її похідну знаходять за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.}$$

Так само знаходять похідну функції $u = f(x, y, z), x = x(t), y = y(t), z = z(t)$:

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.}$$

Зокрема, якщо $t = x, y = y(x), z = z(x)$, то дістаємо формулу для обчислення *повної похідної*

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}.}$$

Розгляньмо загальніший випадок. Нехай $z = f(x, y)$ — функція двох змінних x та y, які залежать від змінних u, v:

$$x = x(u, v), y = y(u, v).$$

Тоді функція $z = f(x(u, v), y(u, v))$ є складеною функцією незалежних змінних u та v.

Якщо функції $x(u, v)$ та $y(u, v)$ диференційовні в точці $M_1(u; v)$, а функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_2(x(u, v); y(u, v))$, то складена функція $f(x(u, v), y(u, v))$ диференційовна в точці $M_1(u, v)$ і її частинні похідні знаходять за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}}$$

Знайдімо диференціал складеної функції:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Це доводить, що повний диференціал функції $z = f(x, y)$ має *інваріатну (незмінну) форму*, тобто незалежну від того, чи є x та y незалежними змінними, чи диференційовними функціями змінних u та v.

Приклад 2.2. Знайти $\dfrac{du}{dt}$, якщо $u = x^2 + y^2 + z$, де $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \dfrac{1}{2}\sin 2t$.

Приклад 2.3. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z = y^x, y = \cos^2 x$.

Приклад 2.4. Знайти частинні похідні функції $z = 3x^2y$, де $x = u - v, y = uv$.

2.5. Похідна неявної функції

Розгляньмо рівняння

$$F(x, y, z) = 0.$$

Якщо кожній парі чисел x та y з деякої множини відповідає єдине значення z, яке разом з x та y справджує це рівняння, то це рівняння задає неявну функцію $z = \varphi(x, y)$.

Теорема 2.4. Нехай функція $F(x, y, z)$ і її похідні $F'_x(x, y, z), F'_y(x, y, z)$ та $F'_z(x, y, z)$ визначені і неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, причому $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, а $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді існує окіл точки M_0, в якому рівняння $F(x, y, z) = 0$ означує єдину функцію $z = \varphi(x, y)$, неперервну і диференційовну в околі точки $(x_0; y_0)$ і таку, що $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Продиференціюємо рівність $F(x, y, z) = 0$ за змінними x та y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \end{aligned} \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \end{aligned}}$$

Приклад 2.5. Знайти частинні похідні функції $z = \varphi(x, y)$, якщо

$$e^z - x^2 y + z + 10 = 0.$$

2.6. Частинні похідні вищих порядків

Якщо функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні z'_x, z'_y у всіх точках $(x; y) \in D$, то ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області D.

Якщо існує частинна похідна за змінною x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають *частинною похідною 2-го порядку* від функції f за змінною x і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{x^2}. Отже, за означенням

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).}$$

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ за змінною y, то її називають *мішаною частинною похідною 2-го порядку* від функції f і позначають

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).}$$

Для функції $z = f(x,y)$ можна ще розглянути:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).\end{aligned}}$$

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних 2-го порядку функції $f(x,y)$, то їх називають *частинними похідними 3-го порядку* функції $f(x,y)$ (існує вісім таких похідних).

Природно виникає запитання: чи залежить результат диференціювання від порядку диференціювання?

Теорема 2.5 (Шварца, про мішані похідні). Якщо функція $f(x,y)$ означена разом зі своїми похідними $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ у деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ і похідні f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0, то

$$\boxed{f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).}$$

Така сама теорема правдива для будь-яких неперервних мішаних похідних, що різняться між собою лише порядком диференціювання.

Приклад 2.6. Знайти похідні 2-го порядку функції $z = \ln(2x+3y)$.

2.7. Диференціали вищих порядків

Диференціал 2-го порядку функції $z = f(x,y)$ означують формулою

$$\boxed{d^2z = d(dz).}$$

Якщо функція f має неперервні частинні похідні і змінні x та y незалежні, то

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

У разі незалежних змінних x та y для *диференціала m-го порядку* функції z, який означають рівністю

$$\boxed{d^m z = d(d^{m-1}z),}$$

маємо аналогічну формулу:

$$\boxed{d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m z,}$$

Цей вираз розуміють так: двочлен, який стоїть у правій частині співвідношення, треба розкрити за формулою біному Ньютона, а потім одержаним виразом подіяти почленно на функцію $z(x,y)$.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від n незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ диференціал m-го порядку знаходять за формулою:

$$\boxed{d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u.}$$

2.8. Тейлорова формула для функції двох змінних

Для $(n+1)$ разів неперервно диференційовної функції однієї змінної $y = f(x)$ можна записати формулу Тейлора в диференціальній формі із залишковим членом у формі Лаґранжа:

$$\Delta f = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!}, \xi \in (x; x_0).$$

Теорема 2.6. Якщо функція $z = f(x,y)$ $(n+1)$ разів неперервно диференційовна в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$, то для неї правдива *Тейлорова формула* n-го порядку в околі точки M_0

$$\boxed{\Delta f = df(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(M_0)}{n!} + R_n}$$

із *залишковим членом* у *Лаґранжовій* формі

$$\boxed{R_n = \frac{d^{n+1} f(M')}{(n+1)!},}$$

$$M'(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \in U(M_0), 0 < \theta < 1.$$

Лекція 3. Похідна за напрямом і градієнт скалярного поля

3.1. Скалярне поле

За допомогою поняття поля описують чимало явищ сучасної фізики.

Полем величини α називають частину простору D, з кожною точкою M якої в кожний момент часу t зв'язано значення величини α. Тому α є функцією точки M та часу t.

Величини, які описують фізичні явища, належать (переважно) до двох основних типів: скалярні і векторні.

Якщо величина α є скалярною (густина, температура, тиск тощо), то й поле називають *скалярним*. Якщо α є вектором (швидкість, сила тощо), то відповідне поле називають *векторним*. Поле величини α називають *стаціонарним*, якщо α не залежить від часу t.

Розгляньмо стаціонарне скалярне поле $u = f(M)$, де $M \in \mathbb{R}^3$. Якщо вибрати систему декартових координат (x, y, z), то кожна точка M матиме координати x, y, z і функція точки стане функцією трьох незалежних змінних

$$u = f(M) = f(x, y, z).$$

Змінювання функції $f(M)$ під час переходу від однієї точки простору до іншої вивчають за допомогою *поверхонь рівня*

$$\boxed{f(x, y, z) = C,}$$

на яких величина φ зберігає певне значення.

Приміром, якщо поле задане функцією $u = x^2 + y^2 + z^2$, то поверхнями рівня будуть сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = C,\ C \geq 0.$$

Поверхні рівня, які відповідають різним сталим C, заповнюють усю область, у якій означене поле, і жодні дві поверхні рівня, які відповідають різним значенням C, не мають спільних точок.

3.2. Похідна за напрямом

Розгляньмо стаціонарне скалярне поле величини $f(M), M \in \mathbb{R}^3$.

Швидкість змінювання поля $u = f(M)$ під час переміщення точки M_0 у заданому напрямі l вивчають за допомогою похідної за напрямом.

Будь-який напрям l у просторі можна задати одиничним вектором

$$\overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix},$$

де α, β, γ — кути, утворені напрямом l з осями Ox, Oy і Oz.

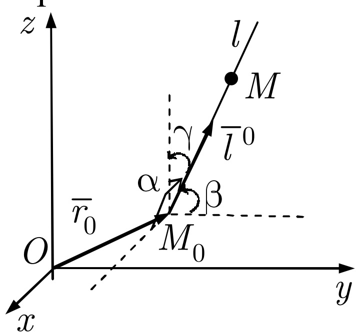


Рис. 3.1. Похідна за напрямом

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ означена в деякому околі точки M_0 з радіусом вектором

$$\overline{r}_0 = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}.$$

Означення 3.2. *Похідною функції* $u = f(x, y, z)$ у точці M_0 *за напрямом* l називають границю

$$\boxed{\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{t \to +0} \frac{f(\overline{r}_0 + t\overline{l}^{\,0}) - f(\overline{r}_0)}{t}.}$$

Щоб дістати координатну форму похідної за напрямом, візьмімо промінь, що виходить з точки M_0 у напрямі l, з параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \quad t \geq 0. \\ z = z_0 + t\cos\gamma, \end{cases}$$

У точках цього променя маємо функцію

$$u = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) = F(t).$$

Тоді

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(+0).$$

Якщо функція $u = f(x, y, z)$ неперервно диференційовна в точці M_0, то застосовуючи правило диференціювання складеної функції, одержимо

$$\boxed{\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.}$$

Якщо за напрям l узяти, приміром, напрям осі Ox, то $\overline{l}^{\,0} = (1; 0; 0)^T$. Тоді маємо $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, тобто похідна за напрямом осі Ox є частинною похідною за змінною x. Так само і для похідних за напрямом осей Oy та Oz.

Зокрема, для функції $u = f(x, y)$ двох змінних маємо

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\sin\alpha,}$$

де $\overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta\end{pmatrix}, \beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha.$

Існування похідних функції в заданій точці за всіма напрямами не гарантує диференційовності функції в цій точці.

Похідною вздовж гладкої кривої L у заданій точці $M_0 \in L$ називають похідну за напрямом дотичної до кривої, яку проведено в точці M_0.

Властивості похідної за напрямом:

1) $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$ дорівнює швидкості змінювання функції $u(M)$ у напрямі l;

2) якщо $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l} > 0$, то функція $u = u(M)$ зростає в напрямі $\overline{l}$;

3) якщо $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l} < 0$, то функція $u = u(M)$ спадає в напрямі $\overline{l}$.

Приклад 3.1. Температура тіла у просторі задана функцією $T = x^2y + yz - e^{xy}$. Знайти швидкість змінювання температури в точці $M_0(1;1;1)$ у напрямі від цієї точки до початку координат.

3.3. Градієнт функції

Слушним є питання: за яким напрямом $\overline{l}$ похідна $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення? Цей напрям вказує градієнт функції.

Означення 3.2. *Градієнтом* диференційовної функції $u = f(x, y, z)$ у точці M_0 називають вектор

$$\boxed{\operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\overline{k} = \begin{pmatrix} u'_x(M) \\ u'_y(M) \\ u'_z(M) \end{pmatrix}.}$$

За допомогою градієнта похідну функції $u = f(M)$ за напрямом $\overline{l}^{\,0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)^T$ можна записати як

$$\boxed{\frac{\partial u(M)}{\partial l} = (\operatorname{grad} u(M), \overline{l}^{\,0}) = \left|\operatorname{grad} u(M)\right| \cos\varphi = \operatorname{pr}_{\overline{l}^{\,0}} \operatorname{grad} u,}$$

де $\varphi = \widehat{(\operatorname{grad} u(M), \overline{l}^{\,0})}$.

Отже, похідна в заданому напрямі дорівнює проекції градієнта на напрям диференціювання. Звідси випливає, що якщо $\operatorname{grad} u(M) \neq 0$, то похідна $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$ набуває найбільшого значення, коли напрям l збігається з напрямом градієнта функції $u(M)$, а саме

$$\left.\frac{\partial u(M)}{\partial l}\right|_{\overline{l} = \operatorname{grad} u} = \left|\operatorname{grad} u(M)\right|.$$

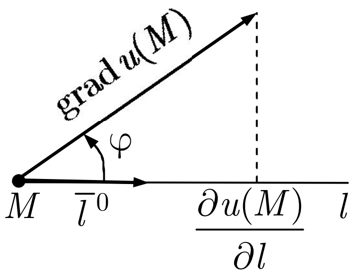


Рис. 3.4. Похідна за напрямом як проекція градієнта

У протилежному напрямі, який задає вектор $(-\operatorname{grad} u)$, похідна $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$ має найменше значення, що дорівнює $-\left|\operatorname{grad} u(M)\right|$.

Напрям l, який задає вектор $\operatorname{grad} u$, називають *напрямом найшвидшого підіймання*, а напрям, який задає вектор $(-\operatorname{grad} u)$ — *напрям найшвидшого спускання*.

Із встановленого геометричного змісту градієнта випливає, що градієнт не залежить від вибору системи координат, оскільки і напрям, і довжина вектора градієнта в кожній точці не залежить від вибору системи координат.

Градієнт можна розглядати для функцій будь-якої кількості змінних.

Правдиві такі *правила обчислення градієнта*:

1) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$;

2) $\operatorname{grad}(Cu) = C \operatorname{grad} u, C = \text{const}$;

3) $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;

4) $\operatorname{grad} \dfrac{u}{v} = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$;

5) $\operatorname{grad} f(u) = f'_u \operatorname{grad} u$.

Приклад 3.2. Розподіл речовини у просторі задає функція $\rho = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + z^2}$. У якому напрямі густина міняється швидше за все в точці $M_0(-1; 3; 2)$? Визначити швидкість найбільшої зміни густини в цій точці.

3.4. Вектор-функції

У курсі вищої математики і її застосуваннях доводиться працювати не лише з числовими функціями, але й з функціями, у яких область означення D або множина значень E складається з елементів іншої природи, приміром $E \subset \mathbb{V}^3$.

Означення 3.3. *Векторною функцією* (*вектор-функцією скалярного аргументу*) називають відображення, яке кожному дійсному числу $t \in T$ ставить у відповідність певний вектор $\overline{r} = \overline{r}(t)$.

У фіксованому базисі $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ задавання однієї вектор-функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$ рівносильно задаванню трьох числових функцій $x(t), y(t), z(t)$, які є її координатами:

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}, t \in T.$$

Геометрично вектор-функцію зручно зображувати, будуючи множину точок простору (деяку криву) з радіусами-векторами

$$\overline{r} = \overline{r}(t), t \in T,$$

які виходять з фіксованої точки O. Цю множину називають *годографом* вектор-функції. Функція $\overline{r}(t)$ задає параметричне зображення годографа L з параметром t.

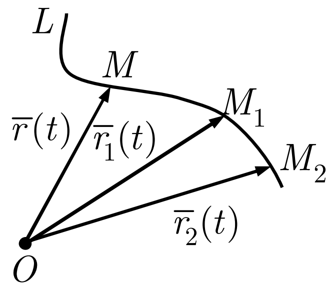


Рис. 3.6. Годограф вектор-функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$

З фізичного погляду годограф вектор-функції можна розглядати як траєкторією руху матеріальної точки.

Приміром, годографом функції $\overline{r}(t) = \overline{i}a\cos t + \overline{j}b\sin t, 0 \le t \le 2\pi$, є еліпс із параметричними рівняннями $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0; 2\pi]$.

3.5. Границя і неперервність вектор-функції

Означення 3.4. *Границею вектор-функції* $\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$, коли $t \to t_0$, називають сталий вектор $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ такий, що

$$\lim_{t \to t_0} \left|\overline{r}(t) - \overline{a}\right| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_x, \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = a_y, \\ \lim\limits_{t \to t_0} z(t) = a_z \end{cases}$$

і пишуть, що $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}(t) = \overline{a}$.

Властивості границь вектор-функцій можна дістати з означення і відповідних властивостей границь числових функцій.

Вектор-функцію $\overline{r} = \overline{r}(t)$, означену в деякому околі точки t_0, називають *неперервною в точці* t_0, якщо

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \overline{r}(t) = \overline{r}(t_0).}$$

Вектор-функції $\overline{r}(t)$ неперервна у точці t_0 тоді й лише тоді, коли координатні функції $x(t), y(t), z(t)$ неперервні в точці t_0.

3.6. Похідна вектор-функції

Нехай вектор-функція $\overline{r}(t)$ означена в деякому околі точки t_0. Надамо аргументу приросту $\Delta t \ne 0$ і розгляньмо приріст вектор-функції

$$\Delta\overline{r}(t_0) = \overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)$$

і відношення $\dfrac{\Delta\overline{r}(t_0)}{\Delta t}$, яке є вектором, колінеарним вектору $\Delta\overline{r}(t_0)$.

Означення 3.5. *Похідною вектор-функції* $\overline{r}(t)$ за її аргументом t в точці t_0 називають вектор

$$\boxed{\overline{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t}.}$$

З того, що

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

маємо, що існування похідної $\overline{r}'(t_0)$ рівносильно існуванню похідних $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$, причому правдива рівність

$$\boxed{\overline{r}'(t_0) = x'(t_0)\overline{i} + y'(t_0)\overline{j} + z'(t_0)\overline{k} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}.}$$

Приміром, знайдімо похідну вектор-функції

$$\overline{r}(t) = \overline{i}R\cos t + \overline{j}R\sin t + \overline{k}ht \ \ (R, h = \text{const}).$$

$$\overline{r}'(t) = -\overline{i}R\sin t + \overline{j}R\cos t + \overline{k}h.$$

Правдиві такі *правила диференціювання вектор-функції*:

1) $(\overline{r}_1(t) \pm \overline{r}_2(t))' = \overline{r}_1'(t) \pm \overline{r}_2'(t)$;

2) $(C\overline{r}(t))' = C\overline{r}'(t), C = \text{const}$;

3) $(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t))' = (\overline{r}_1'(t), \overline{r}_2(t)) + (\overline{r}_1(t), \overline{r}_2'(t))$;

4) $[\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)]' = [\overline{r}_1'(t), \overline{r}_2(t)] + [\overline{r}_1(t), \overline{r}_2'(t)]$.

Лекція 4. Дотична і нормаль до кривої і поверхні

4.1. Геометричний і механічний зміст похідної вектор-функції

Розгляньмо вектор $\dfrac{\Delta\overline{r}(t_0)}{\Delta t}$ колінеарний вектору січної M_0M_1 до кривої. Коли $\Delta t \to 0$, точка M_1 прямує вздовж годографа до точки M_0, і тому січна M_0M_1 прямує до дотичної до кривої L у точці M_0, а , отже, й вектор $\overline{r}'(t_0)$, паралельний граничному положенню вектора січної, також буде напрямлений уздовж цієї дотичної.

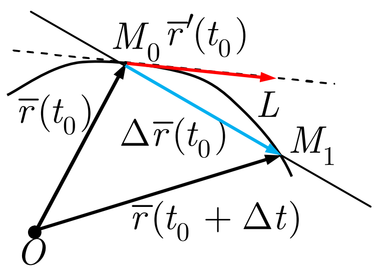


Рис. 4.1. Похідна вектор-функції

Вектори $\Delta\overline{r}(t_0)$ і $\dfrac{\Delta\overline{r}(t_0)}{\Delta t}$ колінеарні. Якщо $\Delta t > 0$, то ці вектори напрямлені в бік зростання t. Якщо $\Delta t < 0$, то вектор $\Delta\overline{r}(t_0)$ напрямлений у бік спадання t, а вектор $\dfrac{\Delta\overline{r}(t_0)}{\Delta t}$ знову напрямлений у бік зростання t.

Геометричний зміст вектора $\overline{r}'(t_0)$ полягає в тому, що він напрямлений уздовж дотичної до годографа функції $\overline{r}(t)$ у бік зростанням параметру t.

Вектор-функція $\overline{r}(t)$ з механічного погляду задає закон руху матеріальної точки по кривій, яка є годографом. Оскільки похідна є швидкістю змінення функції в заданій точці, то $\overline{r}'(t_0)$ є швидкістю руху матеріальної точки по цій кривій, напрямленою вздовж дотичної до кривої у бік зростання t.

4.2. Дотична пряма і нормальна площина до просторової кривої

Розгляньмо гладку просторову криву L, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і яку задано рівнянням

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in T. \\ z = z(t), \end{cases}$$

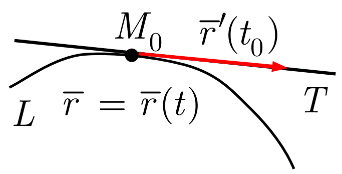


Рис. 4.2. Дотична пряма до кривої

Нехай точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ відповідає значення t_0 параметра t. Тоді вектор

$$\overline{r}'(t_0) = x'(t_0)\overline{i} + y'(t_0)\overline{j} + z'(t_0)\overline{k}$$

має напрям дотичної прямої T до кривої L у точці M_0.

Запишемо канонічні рівняння *дотичної до кривої* L у точці M_0:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.}$$

Площину N, перпендикулярну до дотичної в точці дотику називають *нормальною площиною* до кривої в цій точці.

Нормальна площина до кривої L має рівняння

$$\boxed{x'(t_0)\big(x - x_0\big) + y'(t_0)\big(y - y_0\big) + z'(t_0)\big(z - z_0\big) = 0.}$$

Приклад 4.1. Знайти рівняння дотичної і нормальної площини до гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = ht$ при $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

4.3. Геометричний зміст градієнта

Розгляньмо поверхню Ω, яку задає рівняння

$$F(x,y,z)=0.$$

Нехай функція $F(x,y,z)$ диференційовна в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\Omega$, причому не всі частинні похідні в точці M_0 дорівнюють нулеві.

Кажуть, що вектор $\overline{n}$ *перпендикулярний до поверхні* Ω у точці M_0, якщо він перпендикулярний до будь-якої дотичної прямої, проведеної до поверхні в цій точці.

Теорема 4.1. Вектор $\operatorname{grad} u(M_0)$ перпендикулярний до поверхні рівня гладкої функції $u=f(x,y,z)$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ цієї поверхні.

► Розгляньмо довільну криву

$$L: x=x(t), y=y(t), z=z(t),$$

що проходить через точку M_0 поверхні рівня

$$\Omega: f(x,y,z)=C,$$

де точці M_0 відповідає значення параметра t_0.

Вектор

$$\overline{\tau}=x'(t_0)\overline{i}+y'(t_0)\overline{j}+z'(t_0)\overline{k}$$

напрямлений уздовж дотичної до кривої L.

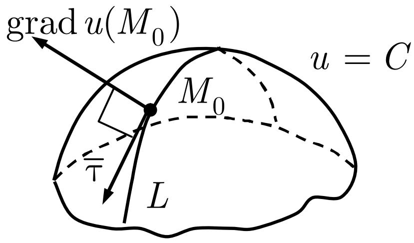


Рис. 4.3. Геометричний зміст градієнта

Оскільки крива L лежить на поверхні, то координати її точок справджують рівняння

$$f(x(t),y(t),z(t))=C.$$

Диференціюючи цю рівність, маємо

$$\frac{df(t_0)}{dt}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy)}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right|_{M_0}=0\Leftrightarrow(\operatorname{grad} u(M_0),\overline{\tau})=0.$$

А це й означає ортогональність вектора $\operatorname{grad} u(M_0)$ до вектора дотичної $\overline{\tau}$, і його перпендикулярність до поверхні Ω. ◄

4.4. Дотична площина й нормаль до поверхні

З теореми 4.1 випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку M_0 і лежать на поверхні

$$\Omega: F(x,y,z)=0$$

ортогональні до одного й того самого вектора $\operatorname{grad} F(M_0)$. Тоді всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині T, яку називають *дотичною площиною до поверхні в точці* M_0.

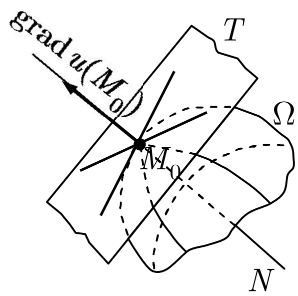


Рис. 4.4. Дотична площина і нормаль до поверхні

Оскільки площина T проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора

$$\operatorname{grad} F(M_0) = (F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0))^T,$$

то її задає рівняння

$$(\operatorname{grad} u(M_0), \overline{MM_0}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.}$$

Нормаллю до поверхні Ω у точці M_0 називають пряму N, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини T в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і її напрямним вектором є $\operatorname{grad} u(M_0)$, то маємо канонічне рівняння нормалі

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.}$$

Для поверхні, заданої явно рівнянням $z = f(x, y)$ маємо:

— рівняння дотичної площини

$$\boxed{z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_y(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0;}$$

— рівняння нормалі

$$\boxed{\frac{x - x_0}{z'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.}$$

Приклад 4.2. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні конуса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$, $M_0(4; 3; 4)$.

4.5. Геометричний зміст частинних похідних

Нехай задано диференційовну функцію $z = f(x, y)$, графік якої у просторі є деякою поверхнею Ω. Нехай $M_0(x_0; y_0)$ — фіксована точка з області D означення функції f, а точка $N_0(x_0; y_0; z(x_0, y_0))$ — точка поверхні Ω, яка відповідає точці M_0.

Знаходячи частинну похідну $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}$ змінну y фіксують так, що $y = y_0$.

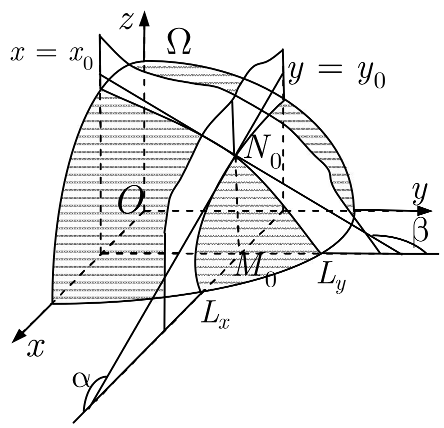


Рис. 4.5. Геометричний зміст частинних похідних

Геометрично, це означає, що через точку $M_0 \in D$ проводять площину $y = y_0$, паралельну площині Oxz, і розглядають функцію $z = f(x, y_0)$ однієї змінної x у точці $x = x_0$.

Похідна цієї функції $z'_x(x_0) = \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}$ дорівнює тангенсові кута α між прямою, паралельної осі Ox, і дотичною до кривої $z = f(x, y_0)$, що є лінією перерізу поверхні $z = f(x, y)$ із площиною $y = y_0$.

Так само частинна похідна $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}$ дорівнює тангенсові кута між прямою, паралельної осі Oy, і дотичною до кривої $z = f(x_0, y)$, що є лінією перерізу поверхні $z = f(x, y)$ із площиною $x = x_0$.

4.6. Геометричний зміст диференціала

Якщо поверхню задано в явному вигляді $z = f(x, y)$, то її можна задати неявно рівнянням $f(x, y) - z = 0$ і рівняння дотичної площини до цієї поверхні у точці $M_0(x_0; y_0; z(x_0, y_0))$ матиме вигляд

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Його ще можна переписати у вигляді

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = df(x_0, y_0),$$

де $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0$.

Отже, диференціал функції $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$ є приростом апліката точки дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0; z(x_0, y_0))$.

Лекція 5. Екстремуми функції двох змінних

5.1. Локальні екстремуми функції двох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x, y), (x; y) \in D$. І нехай точка $M_0(x_0; y_0) \in D$.

Означення 5.1. Якщо існує окіл точки M_0, який належить області D і для всіх точок M цього околу, відмінних від точки M_0, виконано нерівність

$$\boxed{f(M) < f(M_0) \ \ (f(M) > f(M_0)),}$$

то точку M_0 називають *точкою локального максимуму* (*мінімуму*) функції f, а число $f(M_0)$ — *локальним максимумом* (*мінімумом*) цієї функції.

Точки максимуму та мінімуму функції називають її *точками екстремуму*.

Якщо покласти

$$x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y,$$

то повний приріст функції

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Якщо приріст функції зберігає знак в околі точки M_0, то в цій точці функція має локальний екстремум:

1) максимум, якщо $\Delta f(x_0, y_0) < 0$;

2) мінімум, якщо $\Delta f(x_0, y_0) > 0$.

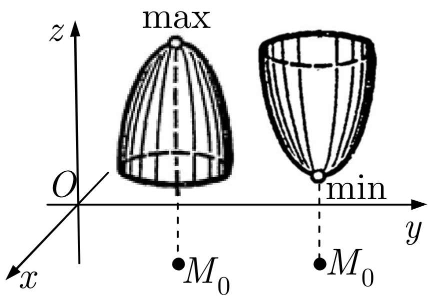


Рис. 5.1. Точки локального екстремуму

5.2. Необхідна умова існування локального екстремуму

Теорема 5.1 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні 1-го порядку за змінними x та y дорівнюють нулеві, нескінченності або не існують.

► Нехай $M_0(x_0; y_0)$ — точка екстремуму. Тоді функція $\varphi(x) = f(x, y_0)$ буде функцією однієї змінної, яка має екстремум у точці $x = x_0$. Тому її похідна $f'_x(x_0, y_0)$ дорівнює нулеві, нескінченності або не існує.

Так само, розглянувши функцію $\psi(y) = f(x_0, y)$, дістанемо, що $f'_y(x_0, y_0)$ дорівнює нулеві, нескінченності або не існує. ◄

Означення 5.2. Точку $M_0(x_0; y_0)$, в якій частинні похідні 1-го порядку функції f дорівнюють нулеві, називають *стаціонарною точкою функції* f.

У стаціонарній точці виконано також умови:

$$dz(M_0) = 0, \ \operatorname{grad} f(M_0) = \overline{0}.$$

Стаціонарні точки та точки, у яких частинні похідні функції дорівнюють нескінченості або не існують, називають *критичними точками*.

Приміром, дослідімо функцію $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

❍ Функція $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ має максимум у точці $(0; 0)$, оскільки $f(0, 0) = 1, f(x, y) < 1$, якщо $x^2 + y^2 > 0$.

Частинні похідні функції $f(x, y)$

$$f'_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f'_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

у точці $(0; 0)$ не існують. ●

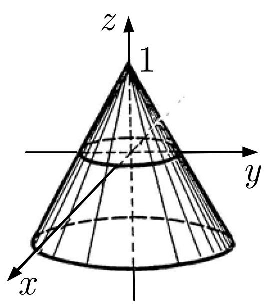


Рис. 5.2. У точці $(0; 0; 1)$ похідні не існують

Проте не всяка критична точка є точкою екстремуму, тобто теорема 5.1 встановлює лише необхідну, але не достатню умови екстремуму.

Приміром, дослідімо функцію $z = xy$.

❍ Частинні похідні функції $z = xy$ дорівнюють нулеві в точці $(0;0)$. Але ця функція у вказаній точці екстремуму не має, тому що в досить малому околі точки $(0;0)$ вона набуває як додатних, так і від'ємних значень. Графіком функції $z = xy$ є гіперболічний параболоїд. ●

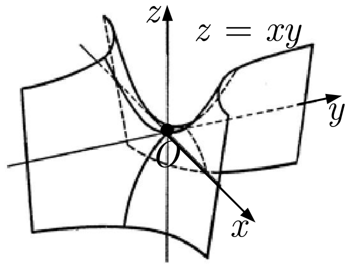


Рис. 5.3. Точка O є сідловою точкою поверхні

5.3. Достатні умови локального екстремуму

Нехай функція $z = f(x,y)$ двічі неперервно диференційовна в околі точки $M_0(x_0;y_0)$. Якщо точка M_0 є точкою локального екстремуму, то

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy = 0.$$

Запишімо Тейлорову формулу 1-го порядку для функції f:

$$\Delta f(M_0) = df(M_0) + \frac{d^2 f(M')}{2!} = \left| df(M_0) = 0 \right| =$$
$$= \frac{1}{2}(f''_{xx}(M')\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M')\Delta x \Delta y + f''_{yy}(M')\Delta y^2).$$

Отже, знак приросту функції $\Delta f(M_0)$ визначається знаком 2-го диференціала $d^2 f$.

Другий диференціал функції $z = f(x,y)$ є квадратичною формою $Q(dx,dy)$ щодо змінних dx і dy, яку можна записати як

$$d^2 z = (dx \quad dy)H\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

де

$$H = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} \text{ —}$$

матриця квадратичної форми, яку називають *матрицею Гессе*.

Визначник матриці Гессе $\det H$ називають *гессіаном*.

Отже $d^2 f(M_0) > 0$ $(d^2 f(M_0) < 0)$ тоді й лише тоді, коли матриця Гессе є додатно (від'ємно) визначеною.

Згідно з критерієм Сильвестра матриця H є:

1) додатно визначеною, якщо $z''_{xx}(M_0) > 0, \det H(M_0) > 0$;

2) від'ємно визначеною, якщо $z''_{xx}(M_0) < 0, \det H(M_0) > 0$.

Теорема 5.2 (достатні умови екстремуму функції двох змінних). Нехай точка $M_0(x_0;y_0)$ є стаціонарною точкою функції $z = f(x,y)$,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0,$$

і в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ функція f має неперервні частинні похідні до 2-го порядку включно:

$$A\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, B\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}, C\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2},$$

$$\Delta(M_0) = \det H(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}_{M_0}$$

Тоді:

1) якщо $\Delta(M_0) > 0$, то в точці M_0 функція f має *екстремум*, причому

а) якщо $A > 0$, то функція f у точці M_0 має *мінімум*;

б) якщо $A < 0$, то функція f у точці M_0 має *максимум*;

2) якщо $\Delta(M_0) < 0$, то в точці M_0 функція f *не має* екстремуму;

3) якщо $\Delta(M_0) = 0$, то в функція f у точці M_0 *може мати*, а *може й не мати* екстремуму і потребує додаткового дослідження.

Приклад 5.1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^4 + y^4$.

❍Знайдімо стаціонарні точки функції. З системи рівнянь

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 = 0, \\ z'_y = 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Точка $M_0(0;0)$ — стаціонарна.

$$A\,|_{M_0} = z''_{x^2}\,|_{M_0} = 0, B = z''_{xy}\,|_{M_0} = 0, C = A\,|_{M_0} = z''_{y^2}\,|_{M_0} = 0;$$

$$\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 5.2 не дає відповідь про наявність або відсутність екстремуму. Проведімо додаткове дослідження:

$$\Delta f(x,y) = x^4 + y^4 - f(0,0) = x^4 + y^4 > 0 \Rightarrow M_0(0;0) - \min. ●$$

Приклад 5.2. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6$.

5.4. Найбільше та найменше значення функції всередині замкненої області

Нехай функція $z = f(M)$ означена й неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D}$ і диференційовна в усіх внутрішніх точках $\overline{D}$. Тоді за теоремою Веєрштраса існують точки $M' \in \overline{D}, M'' \in \overline{D}$, в яких вона досягає свого найбільшого і найменшого значень:

$$f(M') = \max_{x \in \overline{D}} f(M),$$
$$f(M'') = \min_{x \in \overline{D}} f(M).$$

Ці точки треба шукати серед критичних точок функції f усередині області D та серед точок, що належать межі області ∂D.

Приклад 5.3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2$ всередині замкненої області $\overline{D} = \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$.

5.5. Умовний екстремум

Розгляньмо функцію $z = f(x,y)$ означену в деякій області D. Нехай в цій області задано криву $L: \varphi(x,y) = 0$, і треба знайти екстремуми функції $f(x,y)$ лише серед тих її значень, які відповідають точкам кривої L. Такі екстремуми називають *умовними екстремумами* функції $z = f(x,y)$ на кривій L.

Знаходячи умовні екстремуми функції $z = f(x,y)$ аргументи x та y вже не можна розглядати як незалежні змінні: вони зв'язані між собою співвідношенням $\varphi(x,y) = 0$, яке називають *умовою зв'язку*.

Приміром, функція $z = 1 - x - y$ графіком якої є площина не має локальних екстремумів, а вже за умови зв'язку $x^2 + y^2 = 1$ на цій площині з'являється найнижча і найвища точки.

Один із методів відшукання умовного екстремуму функції $z = f(x,y)$ за умови зв'язку $\varphi(x,y) = 0$ полягає у підставлянні однієї із змінних, знайдених з рівняння зв'язку у функцію $f(x,y)$.

Нехай рівняння зв'язку виражає y як однозначну диференційовну функцію змінної x:

$$y = g(x).$$

Підставляючи у функцію $f(x,y)$ замість y функцію $g(x)$, дістаємо функцію однієї змінної

$$z = f(x, g(x)) = F(x),$$

у якій вже враховано рівняння зв'язку. Екстремум (безумовний) функції $F(x)$ є шуканим умовним екстремумом.

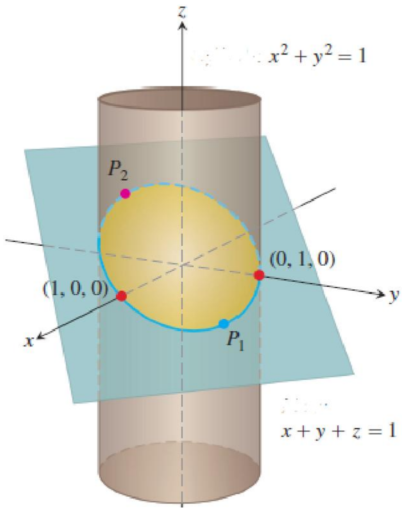


Рис. 5.4. Умовний екстремум

Другий метод дослідження функції на умовний екстремум полягає в побудові *Лаґранжової функції*:

$$\boxed{F(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),}$$

де λ — деякий числовий коефіцієнт, *множник Лаґранжа*, який треба визначити.

Можна довести, що точка умовного екстремуму функції $f(x,y)$ за умови зв'язку $\varphi(x,y) = 0$, є стаціонарною точкою Лаґранжової функції.

Необхідними умовами існування безумовного екстремуму Лаґранжової функції є:

$$\boxed{\begin{cases} F'_x \equiv f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ F'_y \equiv f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ F'_\lambda \equiv \varphi(x,y) = 0. \end{cases}}$$

Достатні умови полягають у дослідженні знаку $d^2F(x,y;\lambda)$ за умов зв'язку.

2

Інтегральне числення функцій кількох змінних

Лекція 6. Інтеграл за геометричним об'єктом

6.1. Міра геометричних об'єктів

Розгляньмо функцію n змінних

$$u = f(M), M \in \Phi$$

на деякому геометричному об'єкті Φ із простору $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$.

Під *геометричним об'єктом* Φ розуміють одну із зв'язних множин точок:

1) у просторі $\mathbb{R}^1$ — відрізок $[a; b]$;

2) у просторі $\mathbb{R}^2$ — криву L і плоску область D;

3) у просторі $\mathbb{R}^3$ — криву L, поверхню Ω і просторову область Ω.

Розглядаючи об'єкти різних типів, запровадимо поняття *міри* μ:

1) для відрізка і для кривої L — довжини $l([a; b])$ і $l(L)$;

2) для плоскої області D і поверхні Ω — площі $S(D)$ і $S(\Omega)$;

4) для просторової області G — об'єм $V(G)$.

Діаметром d геометричного об'єкту називають найбільшу з віддалей між двома точками цього об'єкта.

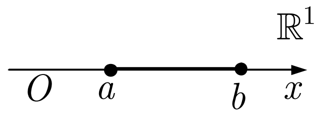


Рис. 6.1. Геометричний об'єкт на прямій

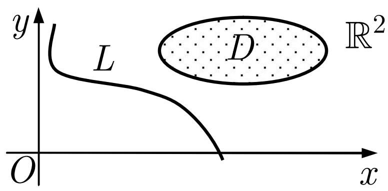


Рис. 6.2. Геометричні об'єкти на площині

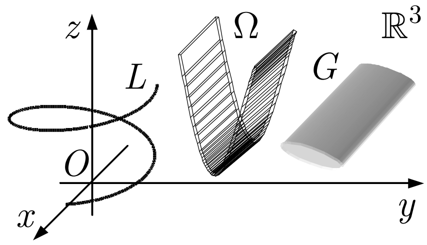


Рис. 6.3. Геометричні об'єкти у просторі

6.2. Визначений інтеграл за геометричним об'єктом

Розгляньмо геометричний об'єкт Φ з мірою $\mu(\Phi)$ і визначеною на ньому функцію $f(M), M \in \Phi$.

Для кожного типу геометричного об'єкта можна запровадити визначений інтеграл за цим об'єктом:

1) для відрізка $[a;b]$ — *визначений інтеграл за відрізком* $\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) для кривої $L \subset \mathbb{R}^2$ (або $L \subset \mathbb{R}^3$) — *криволінійний інтеграл за довжиною дуги* $\int\limits_L f(x,y)dl$ або $\int\limits_L f(x,y,y)dl$;

3) для плоскої області D — *подвійний інтеграл* за областю $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$;

4) для поверхні Ω — *поверхневий інтеграл за площею поверхні* $\iint\limits_\Omega f(x,y,z)d\sigma$;

5) для просторової області G — *потрійний інтеграл* за областю $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz.$

Усі визначені інтеграли за геометричними об'єктами можна запровадити за єдиною формальною процедурою.

Крок 1. Розбивають геометричний об'єкт Φ довільним чином на n елементів Φ_i з мірами $\Delta\mu_i$ і діаметрами $d_i, i = \overline{1,n}.$

Крок 2. На кожному елементі Φ_i вибирають довільну точку M_i й обчислюють значення $f(M_i)$ функції в цих точках.

Крок 3. Утворюють суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i,$$

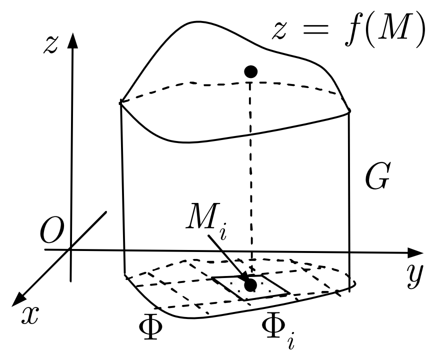


Рис. 6.4. Визначений інтеграл за геометричним об'єктом

яку називають n*-ю інтегральною сумою* для функції $f(M)$ за геометричним об'єктом Φ.

Крок 4. Знаходять границю інтегральної суми за умови, що найбільший з діаметрів елементів d_i прямує до нуля:

$$\lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i.$$

Для заданого геометричного об'єкта Φ і вибраного n можна утворити скільки завгодно інтегральних сум, по-різному розбиваючи фігуру на елементи і вибираючи точки на кожному елементі.

Означення 6.1. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми, коли найбільший з діаметрів елементів прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття геометричного об'єкту на елементи, ані від вибору точок на елементах, то її називають *визначеним інтегралом за геометричним об'єктом* Φ від функції $f(M)$ і позначають

$$\boxed{\int\limits_{\Phi} f(M)d\mu = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i.}$$

Теорема 6.1 (достатні умови існування інтеграла). Якщо на обмеженому геометричному об'єкті Φ функція $u = f(M)$ неперервна, то інтеграл за геометричним об'єктом Φ від функції f існує.

6.3. Спільні важливі властивості інтегралів за геометричними об'єктами

1 (*лінійність*). Інтеграл за геометричним об'єктом Φ від лінійної комбінації функцій дорівнює лінійній комбінації інтегралів від цих функцій.

$$\boxed{\int\limits_{\Phi} [\alpha f(M) + \beta g(M)]d\mu = \alpha\int\limits_{\Phi} f(M)d\mu + \beta\int\limits_{\Phi} g(M)d\mu.}$$

2 (*адитивність*). Якщо геометричний об'єкт Φ є об'єднанням геометричних об'єктів Φ_1 та Φ_2 без спільних внутрішніх точок, то

$$\boxed{\int\limits_{\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2} f(M)d\mu = \int\limits_{\Phi_1} f(M)d\mu + \int\limits_{\Phi_2} f(M)d\mu.}$$

3 (*нормованість*). Інтеграл за геометричним об'єктом від одиниці дорівнює мірі геометричного об'єкта.

$$\boxed{\int\limits_{\Phi} d\mu = \mu(\Phi).}$$

►Доведімо, приміром, властивість 1.

$$\int\limits_{\Phi} [\alpha f(M) + \beta g(M)]d\mu = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(M_i) + \beta g(M_i)]\Delta\mu_i =$$

$$= \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i + \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} g(M_i))\Delta\mu_i =$$

$$= \alpha\int\limits_{\Phi} f(M)d\mu + \beta\int\limits_{\Phi} g(M)d\mu.◄$$

Лекція 7. Визначений інтеграл за відрізком

7.1. Задача про площу плоскої фігури

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано неперервну функцію $y = f(x) \geq 0$. Плоску фігуру $aABb$, обмежену графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a;b]$, $a < b$, осі Ox і прямими $x = a, x = b$, називають *криволінійною трапецією*.

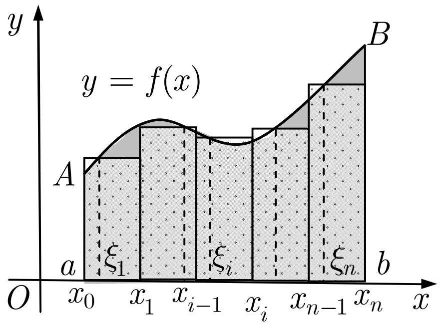


Рис. 7.1. Криволінійна трапеція

Знайдімо площу S цієї трапеції.

1. Розбиваємо відрізок $[a;b]$ на n частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Проводячи вертикальні прямі $x = x_i, i = \overline{1, n-1}$, поділяємо криволінійну трапецію на n ділянок площею $\Delta S_i, i = \overline{1,n}$.

2. На кожному відрізку вибираємо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, і будуємо прямокутник з основою $[x_{i-1}; x_i]$ заввишки $f(\xi_i), i = \overline{1,n}$.

Тоді

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i, i = \overline{1,n}.$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1,n}$.

3. Одержимо «східчасту» фігуру, утворену з n прямокутників, площа якої

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Тоді

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

4. Точність наближення зростатиме, якщо відрізок $[a;b]$ ділитимемо так, щоб кількість ділянок n збільшувалась, а їхні довжини $\Delta x_i, i = \overline{1,n}$, зменшувались.

Нехай $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \to 0$ і $n \to \infty$.

Площею криволінійної трапеції $aABb$ називають

$$\boxed{S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.}$$

Ця границя, якщо вона існує, не повинна залежати ані від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на ділянки $[x_{i-1}; x_i]$, ані від вибору точок ξ_i на них.

7.2. Поняття визначеного інтеграла за відрізком

Розгляньмо у просторі $\mathbb{R}^1$ функцію

$$y = f(x), [a; b], a < b,$$

і побудуймо для цієї функції визначений інтеграл за відрізком $[a; b]$, користуючись загальною схемою.

1. Розбиваємо цей відрізок на n довільних ланок точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

2. На кожній ланці $[x_{i-1}; x_i], i = \overline{1, n}$, вибираємо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, і обчислюємо значення функції $f(\xi_i)$.

3. Будуємо n-у інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — довжина відрізка $[x_{i-1}; x_i]$.

Означення 7.1. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми, коли довжина найбільшої ланки прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття відрізка на ланки, ані від вибору точок на кожній ланці, то цю границю називають *визначеним інтегралом за відрізком* $[a; b]$ від функції $f(x)$ і позначають

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.}$$

Функцію f називають *інтегровною на відрізку* $[a; b]$. Числа a та b називають *нижньою та верхньою межами інтегрування*; функцію f — *підінтегральною функцією*; $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*; x — *змінною інтегрування*; $[a; b]$ — *проміжком інтегрування*.

Із задачі про площу криволінійної трапеції випливає, що *площу криволінійної трапеції*, обмеженої прямими $y = 0, x = a, x = b$ і графіком функції $y = f(x) \geq 0$, знаходять за формулою

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx.}$$

З означення випливає

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt;$

2) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$

7.3. Умови інтегровності

Теорема 7.1 (необхідна умова інтегровності). Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Прикладом обмеженої, але неінтегровної на відрізку $[0;1]$ функції є *функція Діріхле*

$$\mathcal{D}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Теорема 7.2 (*достатні умови інтегровності*). Функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, якщо виконано одну з умов:
1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;
2) функція $f(x)$ обмежена і неперервна на $[a;b]$, за винятком скінченної кількості точок;
3) означена і монотонна на відрізку $[a;b]$.

Зауваження 7.1.
1. Якщо змінити значення інтегровної функції у скінченній кількості точок, то інтегровність її не порушиться, а значення інтеграла при цьому не зміниться.
2. Інтегровна функція $f(x)$ може бути і не визначеною у скінченній кількості точок відрізка $[a;b]$.

7.4. Властивості визначеного інтеграла

Розгляньмо функцію $y=f(x)$ інтегровну на відрізку $[a;b]$. Визначений інтеграл за відрізком $[a;b]$ від функції $f(x)$ має такі властивості.

1 (*лінійність*). Для довільних $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

2 (*адитивність*). Для довільного $c\in[a;b]$: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$

3 (*нормованість*). $\int_a^b 1dx=l([a;b])=b-a,\ a<b.$

4 (*орієнтованість*). $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$

5 (*збереження знаку підінтегральної функції*). Якщо $f(x)\ge 0$ на $[a;b]$, $(a<b)$, то $\int_a^b f(x)dx\ge 0.$

6 (*монотонність визначеного інтеграла*). Якщо на відрізку $[a;b]$ $f(x) \le g(x)$, $(a < b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

►Доведімо властивість 2 (адитивність). Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на ділянки, то розіб'ємо $[a;b]$ так, щоб точка c була точкою розбиття. Якщо, приміром, $c = x_m$, то інтегральну суму можна розбити на дві суми:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходячи в цій рівності до границі, коли $\max \Delta x_i \to 0$, дістанемо формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx. \blacktriangleleft$$

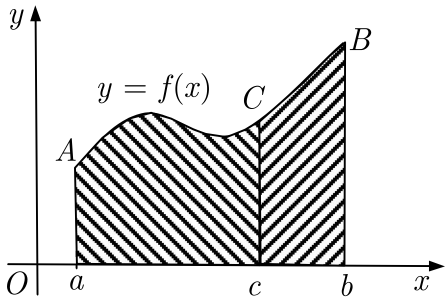


Рис. 7.2. Властивість адитивності

7.5. Оцінки визначеного інтеграла. Теорема про середнє

Теорема 7.3. Нехай функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ $(a < b)$.

1. Правдива нерівність

$$\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx.}$$

2. Якщо $\forall x \in [a;b] : \left|f(x)\right| \le C$, то

$$\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le C(b-a).}$$

3. Якщо m та M — відповідно найменше та найбільше значення функції f на відрізку $[a;b]$ $(a < b)$, то

$$\boxed{m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).}$$

Теорема 7.4 (про середнє значення функції). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c, що

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).}$$

Цю рівність називають *формулою середнього значення*, а величину $f(c)$ — *середнім значенням функції на відрізку* $[a;b]$. Вона означає, що площа криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника із сторонами $b-a$ та $f(c)$.

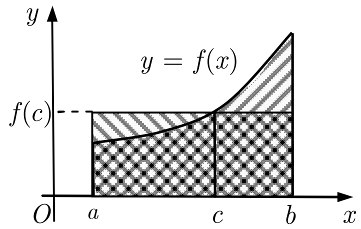


Рис. 7.3. Теорема про середнє значення функції

Лекція 8. Методи обчислення визначеного інтеграла

8.1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею

Якщо у визначеному інтегралі $\int_a^x f(x)dx$ верхню межу x міняти так, щоб $x \in [a;b]$, то величина інтеграла мінятиметься і буде функцію від своєї верхньої межі:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a;b],$$

яку називають *визначеним інтегралом зі змінною верхньою межею*.

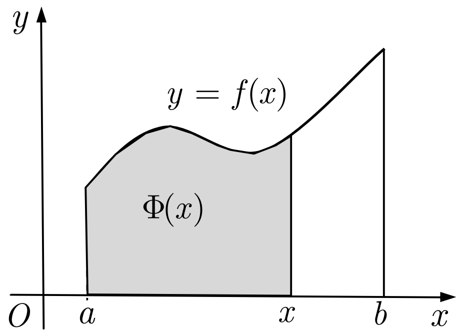


Рис. 8.1. Геометричний зміст інтеграла зі змінною верхньою межею

Теорема 8.1 (Бароу). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

є диференційовною в будь-якій точці $x \in [a;b]$ і

$$\boxed{\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).}$$

►Надамо аргументу x приріст $\Delta x \neq 0$ такий, що $x + \Delta x \in [a;b]$. Тоді

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

З адитивності визначеного інтеграла випливає, що

$$\Delta\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Застосовуючи теорему 7.5 про середнє значення, дістаємо

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x,$$

де $\xi\in[x;x+\Delta x]$.

Якщо $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x\to x, \xi\to x$ і завдяки неперервності функції f на відрізку $[a;b]$ $f(\xi)\to f(x)$. За означенням похідної

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\xi\to x)}} f(\xi)=f(x).\blacktriangleleft$$

З теореми випливає, що визначений інтеграл зі змінною верхньою межею

$$\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$$

є первісною для підінтегральної функції f на відрізку $[a;b]$.

А отже, за означенням невизначеного інтеграла, маємо

$$\boxed{\int f(x)dx=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt+C.}$$

8.2. Формула Ньютона — Лейбніца

Функція f, неперервна на відрізку $[a;b]$, має на цьому відрізку первісну, приміром

$$\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt, x\in[a;b].$$

Поставмо зворотну задачу: знаючи одну з первісних Φ функції f на відрізку $[a;b]$, обчислити визначений інтеграл від функції f на цьому відрізку.

Теорема 8.2. (теорема Ньютона). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $F(x)$ є її первісною для функції $f(x)$ на цьому відрізку, тоді правдива *формула Ньютона — Лейбніца*

$$\boxed{\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a).}$$

►Візьмімо функцію

$$\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt, x\in[a;b].$$

Ця функція є первісною для функції f на відрізку $[a;b]$, а будь-які дві первісні для однієї і тої самої функції відрізняються одна від одної лише сталими. Тобто існує стала C така, що

$$\Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

для всіх $x \in [a;b]$. Для $x = a$ маємо

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a).$$

Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Покладаючи $x = b$, дістаємо

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

або, позначаючи змінну t інтегрування через x,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \blacktriangleleft$$

Позначаючи

$$F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b,$$

формулу Ньютона — Лейбніца можна записати коротше:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\,\Big|_a^b.}$$

Приміром,

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

8.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема 8.3. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $x = \varphi(t)$ неперервно диференційовна на відрізку $[t_1;t_2]$, причому

$$\varphi([t_1;t_2]) = [a;b] \text{ та } \varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b,$$

то правдива *формула заміни змінної* у визначеному інтегралі:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

►Нехай F — первісна для функції f на відрізку $[a;b]$. Оскільки $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$, то за формулою Ньютона — Лейбніца маємо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dF(\varphi(t)) = \int_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.◄$$

Зауваження 8.1. . Для обчислення визначених інтегралів від $R(x,\sqrt{\pm x^2 \pm a^2})$ зручно застосовувати *тригонометричні підстановки*:

1) для $R(x,\sqrt{a^2 - x^2})$ підстановку $x = a\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

2) для $R(x,\sqrt{x^2 + a^2})$ підстановку $x = a\,\mathrm{tg}\,t, t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

3) для $R(x,\sqrt{x^2 - a^2})$ підстановку $x = \frac{a}{\cos t}, \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 8.1. Обчисліть $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ $(a > 0)$ (використовуючи геометричний зміст інтеграла або відповідну тригонометричну підстанову.

8.4. Інтеграли від парних, непарних і періодичних функцій

Розгляньмо визначений інтеграл за симетричним щодо нуля проміжком

$$\int_{-a}^a f(x)dx.$$

З адитивності визначеного інтеграла маємо

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Виконуючи в першому інтегралі заміну змінної: $x = -t, dx = -dt; t = -x$, маємо

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]dx.$$

Покладаючи в цій рівності $f(-x)=f(x)$ (парна функція), а потім $f(-x)=-f(x)$ (непарна функція), одержимо твердження:

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f - \text{парна функція;} \\ 0, & f - \text{непарна функція.} \end{cases}}$$

Можна також довести, що для T-періодичної інтегровної на відрізку $[a;a+T]$ функції правдива формула:

$$\boxed{\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx.}$$

Приміром, завдяки непарності 2π-періодичної функції $f(x)=\sin^5 x$:

$$\int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin^5 x dx = \int_{0}^{2\pi} \sin^5 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx = 0,$$

8.5. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

З формули Ньютона — Лейбніца і лінійності визначеного інтеграла випливає

Теорема 8.4. Якщо функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a;b]$, то правдива *формула інтегрування частинами* у визначеному інтегралі:

$$\boxed{\int_{a}^{b} udv = uv\,\Big|_a^b - \int_{a}^{b} vdu.}$$

Приклад 8.2. Обчислити $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Інтегруванням частинами у визначеному інтегралі можна одержати *Валісову формулу*:

$$\boxed{I_n = \int_{0}^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, & n=2k, \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1, \end{cases} \quad k=0,1,2,\ldots,}$$

де $(2k)!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k), 0!!=1; (2k+1)!!=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1), (-1)!!=1.$

Приміром,

$$I_8 = \int_{0}^{\pi/2} \sin^8 t dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{7!!}{8!!} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} = \frac{35\pi}{256}.$$

Лекція 9. Невластиві інтеграли

9.1. Невластивий інтеграл з нескінченними межами інтегрування

Запроваджуючи поняття визначеного інтеграла як границі інтегральної суми, припускають, що виконано такі умови:

1) межі інтегрування a та b скінченні;

2) підінтегральна функція f на відрізку $[a;b]$ неперервна або має скінченну кількість точок розриву 1-го роду.

Якщо виконано обидві умови, то визначені інтеграли називають *властивими*. Якщо хоча б одну з умов не виконано, то інтеграли називають *невластивими*. При цьому означення визначеного інтеграла втрачає сенс. Справді, у разі нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n ділянок скінченної довжини, а в разі необмеженої функції інтегральна сума не завжди має скінченну границю.

Якщо функція f неперервна на проміжку $[a;+\infty)$, то вона неперервна на будь-якому скінченному відрізку $[a;B], a < B$. Для функції f, неперервної на $[a;B]$, існує визначений інтеграл, залежний від верхньої межі інтегрування:

$$I(B) = \int_a^B f(x)dx.$$

Означення 9.1. *Невластивим інтегралом з нескінченною верхньою межею інтегрування* (*невластивим інтегралом 1-го роду*) від неперервної функції f на проміжку $[a;+\infty)$ називають границю функції $I(B)$, коли $B \to +\infty$ і позначають

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx.}$$

Так само означують невластивий інтеграл з нескінченною нижньою межею інтегрування від неперервної функції f на проміжку $(-\infty;b]$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)dx.}$$

Якщо існує скінченна границя визначеного інтеграла, то відповідний невластивий інтеграл називають *збіжним*, якщо границі не існують або існує нескінченна,— *розбіжним*.

Дослідімо на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

❍ Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B\to+\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^B = \lim_{B\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha} - 1).$$

Отже,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

У разі $\alpha = 1$ маємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B \to +\infty} \ln x \,\Big|_1^B = \lim_{B \to +\infty} \ln B = +\infty.$$

Отже, інтеграл

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} - \begin{cases} \text{збігається}, & \alpha > 1, \\ \text{розбігається}, & \alpha \le 1. \end{cases}}$$

Зауваження 9.1.

1. Якщо $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ збігаються, то $\int_a^{+\infty} (f(x) + \varphi(x))dx$ також збігається, причому

$$\boxed{\int_a^{+\infty} (f(x) + \varphi(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx.}$$

Але зі збіжності $\int_a^{+\infty} (f(x) + \varphi(x))dx$ не випливає збіжність $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ чи $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

2. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні на півпрямій $x \ge a$, і збігаються $\int_a^{+\infty} udv$ та $\int_a^{+\infty} vdu$, то правдива *формула інтегрування частинами*:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} udv = (u(x)v(x)) \,\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu.}$$

9.2. Головне значення невластивого інтеграла 1-го роду

Невластивий інтеграл із двома нескінченними межами інтегрування від неперервної функції f на проміжку $(-\infty; +\infty)$ розуміють як суму двох невластивих інтегралів:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx =} \lim_{A \to -\infty} \int_A^c f(x)dx + \lim_{B \to +\infty} \int_c^B f(x)dx,$$

причому цей невластивий інтеграл називають *збіжним*, якщо обидві границі існують і скінченні. Якщо хоча б одна з границь не існує або нескінченна, то невластивий інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *розбіжним*. Збіжність і значення інтеграла не залежить від вибору точки c.

Може трапитись, що невластивий інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ не існує, але існує *головне значення інтеграла за Коші* ($v.p.$ — *valeur principale*), яке означають формулою

$$\boxed{v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx.}$$

Тоді кажуть, що невластивий інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *збігається* в розумінні *головного значення за Коші*.

Приклад 9.1. Дослідіть на збіжність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$.

9.3. Ознаки збіжності невластивих інтегралів 1-го роду

У багатьох задачах обчислювати невластивий інтеграл не має потреби, а треба лише встановити, збігається цей інтеграл чи розбігається.

Теорема 9.1. (ознака порівняння). Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ визначені дві невід'ємні функції f та φ, інтегровні на кожному скінченному відрізку $[a;b]$, причому

$$0 \le f(x) \le \varphi(x) \quad \forall x \ge a,$$

то зі збіжності інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Приміром, дослідімо на збіжність інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x}dx, a>0$.

❍Дослідити на збіжність цей інтеграл за означенням неможливо. Скористаємось тим, що для всіх $x \ge 0$ функція

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1 + x^2 + \sin^4 x}$$

справджує умову

$$0 < \frac{e^{-x^2}}{1 + x^2 + \sin^4 x} \le \frac{1}{x^2} = \varphi(x).$$

Оскільки інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається, то за теоремою 9.1 збігається і розглядуваний інтеграл. ●

Теорема 9.2 (гранична ознака порівняння). Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ визначено дві додатні функції f та φ, інтегровні на будь-якому скінченному відрізку $[a;b]$, й існує скінченна границя

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \ne 0,$$

то невластиві інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Наслідок. Якщо функція $f(x)$ є нескінченно малою функцією порядку α щодо $\frac{1}{x}$, коли $x \to +\infty$, то невластивий інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ $(a > 0)$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \le 1$.

9.4. Невластиві інтеграли від необмежених функцій (2-го роду)

Нехай функція f означена на проміжку $[a;b)$ і необмежена в лівому околі точки b (b — точка розриву), тобто $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Вважатимемо, що функція f інтегровна на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Отже, існує інтеграл

$$I(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

який залежить від змінної верхньої межі інтегрування.

Означення 9.2. *Невластивим інтегралом від необмеженої функції* f, неперервної на проміжку $[a;b)$, яка має нескінченний розрив у точці $x = b$, (*невластивим інтегралом 2-го роду*) називають границю $I(\varepsilon)$, коли $\varepsilon \to 0$:

$$\boxed{\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.}$$

Так само, якщо функція f має нескінченний розрив у точці $x = a$, то покладають

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.}$$

Якщо границі у правих частинах рівностей існують і скінченні, то відповідні невластиві інтеграли від розривної в точках a або b функції називають *збіжними*, інакше — *розбіжними*.

Можна безпосередньо дослідити на збіжність важливий інтеграл

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} - \begin{cases}\text{збігається}, & \alpha < 1,\\ \text{розбігається}, & \alpha \ge 1.\end{cases}}$$

Сформулюємо спільну для обох невластивих інтегралів теорему.

Теорема 9.3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$ $(-\infty < a \le b \le +\infty)$, функція $\varphi(t)$ неперервно диференційовна на проміжку $[\alpha;\beta)$, де

$$\varphi([\alpha;\beta)) \subset [a;b), a = \varphi(\alpha), b = \lim_{t\to\beta}\varphi(t)$$

і збігається $\int_a^b f(x)dx$, то правдива *формула заміни змінної*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

9.5. Головне значення інтеграла 2-го роду

Якщо функція f на відрізку $[a;b]$ не обмежена лише в околі точки c, де $a < c < b$, то покладають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Причому для збіжності інтеграла мають існувати обидві границі, при незалежному прямуванні ε_1 та ε_2 до нуля.

Кажуть, що *невластивий інтеграл збігається в розумінні головного значення за Коші*, якщо існує границя

$$\boxed{v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right\}.}$$

Розбіжний інтеграл може збігатися в розумінні головного значення.

9.6. Ознаки збіжності невластивих інтегралів 2-го роду

Теорема 9.4 (ознака порівняння). Нехай у лівому (правому) околі точки b (точки a) означено дві невід'ємних функції f та φ, причому $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тоді зі збіжності невластивого інтеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а з розбіжності невластивого інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема 9.5 (гранична ознака порівняння). Нехай функції f та φ додатні на проміжку $[a;b], b$ — точка нескінченного розриву функцій f та φ. Тоді якщо існує скінченна

$$\lim_{x\to b-\varepsilon}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0, \varepsilon > 0,$$

то невластиві інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ та $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Приклад 9.2. Дослідіть на збіжність невластивий інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Лекція 10. Застосування визначеного інтеграла

10.1. Обчислення площі плоскої фігури у прямокутних координатах

1. Нехай функція f неперервна і невід'ємна на відрізку $[a;b], a < b$. Тоді площу криволінійної трапеції $aABb$ знаходять за формулою

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)dx.}$$

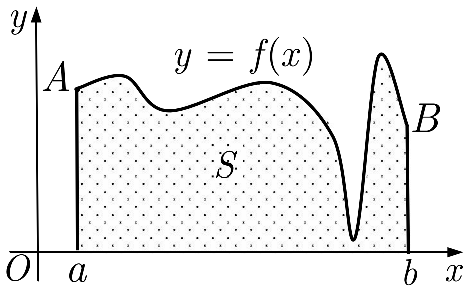


Рис. 10.1. Площа криволінійної трапеції

2. Нехай функція $f(x) < 0$ на відрізку $[a;b], a < b$. Тоді крива $y = f(x)$ розташована під віссю Ox і $\int\limits_a^b f(x)dx < 0$.

Тоді площа криволінійної трапеції

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow \boxed{S = \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx.}$$

3. Нехай функція f міняє свій знак переходячи через точку $c \in (a;b)$, тобто частина криволінійної трапеції $aABb$ розташована над віссю Ox, а частина — під віссю Ox. Тоді площа всієї фігури

$$\boxed{S = \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx.}$$

4. Нехай функції f та g неперервні та $f(x) > g(x) > 0$ на відрізку $[a;b], a < b$, причому криві $y = f(x)$ та $y = g(x)$ перетинаються в точках A та B. Тоді площу фігури, обмеженої цими лініями знаходять за формулою

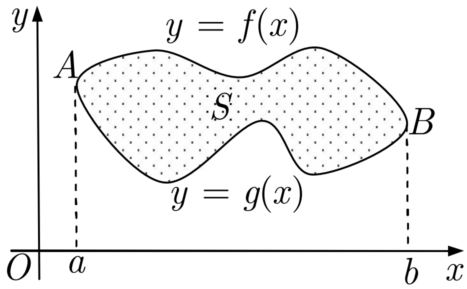


Рис. 10.2. Площа фігури

$$\boxed{S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]dx.}$$

Приклад 10.1. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$, прямою $x = a$ $(a > 0)$ і віссю Ox.

Приклад 10.2. Знайти площу фігури, обмеженої параболами $y = 4x - x^2$ та $y = x^2 - 4x + 6$.

5. Нехай криву задано в параметричній формі рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

де функції $x(t), y(t)$ неперервні, причому $x(t)$ має неперервну похідну $x'(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ та $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$. Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою параметричними рівняннями, знаходять за формулою

$$\boxed{S = \left|\int\limits_\alpha^\beta y(t)dx(t)\right| = \left|\int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\right|.}$$

Приклад 10.3. Довести, що площу фігури, обмеженої еліпсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ де $(a, b > 0)$, дорівнює πab.

6. У деяких випадках для обчислення площ плоских фігур зручніше користуватися формулами, у яких інтегрування провадять за змінною y. У цьому разі змінну x уважають функцією від y:

$$x = g(y),$$

де функція $g(y)$ однозначна і неперервна на відрізку $[c;d]$ осі Oy.

Площу криволінійної трапеції, обмеженою прямими $y=c, y=d$, віссю Oy і кривою $x=g(y)$ знаходять за формулою

$$\boxed{S = \int_c^d g(y)dy.}$$

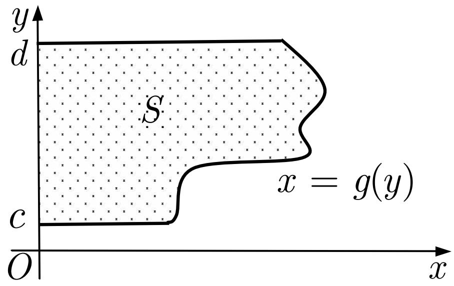


Рис. 10.3. Площа криволінійної трапеції

Приклад 10.4. Знайти площу фігури, обмеженою параболою $x = 2 - y - y^2$ і віссю ординат.

10.2. Обчислення площі криволінійного сектора в полярних координатах

Нехай криву задано в полярній системі координат рівнянням

$$\rho = f(\varphi),$$

де функція f неперервна і невід'ємна на відрізку $[\alpha;\beta]$.

Плоску фігуру, обмежену кривою $\rho = f(\varphi)$ і двома променями, що утворюють з полярною віссю кути α та β, називають *криволінійним сектором*.

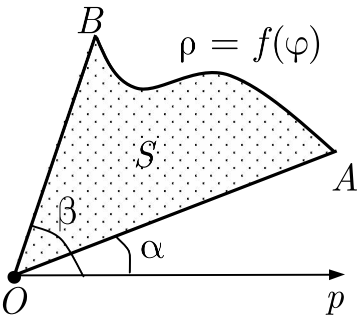


Рис. 10.4. Криволінійний сектор

Щоб знайти площу криволінійного сектора OBA, розбиймо його на n довільних частин променями

$$\varphi = \alpha = \varphi_0, \varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi = \varphi_{n-1}, \varphi = \varphi_n = \beta.$$

Позначимо кути між цими променями через $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \ldots, \Delta\varphi_n$. Візьмемо довільний кут $\psi_k \in [\varphi_{k-1};\varphi_k]$ і позначимо $\rho_k = f(\psi_k)$. Розгляньмо круговий сектор з радіусом ρ_k і центральним кутом $\Delta\varphi_k$ площею

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}\rho_k^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} f^2(\psi_k)\Delta\psi_k.$$

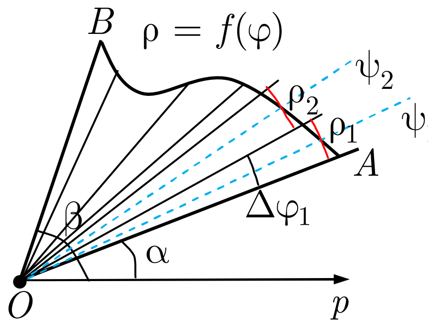


Рис. 10.5. Площа криволінійного сектора

Побудувавши такі кругові сектори в усіх частинах криволінійного сектора OBA, дістанемо фігуру, що складається з n кругових секторів, площа якої

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f^2(\psi_k)\Delta\varphi_k.$$

Ділитимемо кут AOB на все дрібніші і дрібніші частини так, щоб $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta\varphi_k \to 0.$ Тоді одержана фігура все менше й менше відрізнятиметься від криволінійного сектора $OBA,$ і тому природно вважати площею криволінійного сектора OBA число

$$S = \lim_{\substack{\max\Delta\varphi_k\to 0\\ n\to\infty}} S_n = \lim_{\substack{\max\Delta\varphi_k\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} f^2(\psi_k)\Delta\varphi_k.$$

Сума S_n є інтегральною сумою для функції $\frac{1}{2}f^2(\varphi),$ неперервної на відрізку $[\alpha;\beta]$ завдяки неперервності функції $f(\varphi).$ Отже, ця сума, коли $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta\varphi_k \to 0,$ має границю і дорівнює

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2} f^2(\varphi)d\varphi.$$

Площу криволінійного сектора OBA знаходять за формулою

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi.}$$

Приклад 10.5. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою

$$\rho = a(1+\cos\varphi), a > 0.$$

10.3. Об'єм тіла

Розгляньмо тіло, обмежене замкненою поверхнею $\Omega.$ Нехай відома площа $S(x)$ будь-якого перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox.

Вважаємо, що функція $S(x)$ неперервна на відрізку $[a;b].$ Розіб'ємо тіло на n шарів площинами

$$x = a = x_0,$$
$$x = x_1, x = x_2, ...,$$
$$x = b = x_n.$$

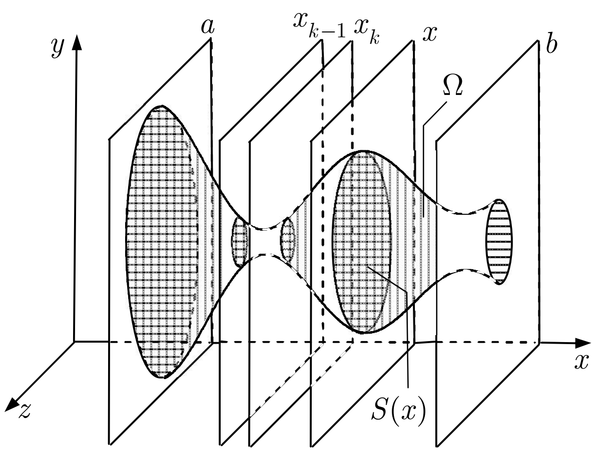


Рис. 10.6. Об'єм тіла за площами перерізів

На кожному відрізку $[x_{k-1};x_k], k=\overline{1,n},$ виберімо довільну точку $\xi_k.$

Замінімо кожний шар тіла циліндром із твірними, паралельними осі Ox, напрямною циліндра є контур перерізу тіла площиною $x = \xi_k$.

Об'єм Δv_k такого циліндра дорівнює добуткові площі $S(\xi_k)$ основи, де $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, на його висоту Δx_k:

$$S(\xi_k)\Delta x_k,$$

а об'єм усіх циліндрів

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k.$$

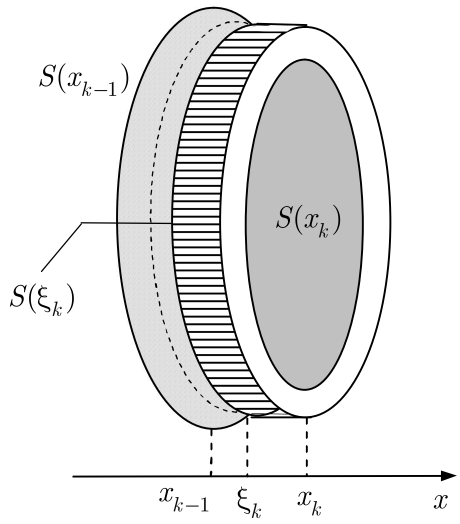


Рис. 10.7

Якщо ця сума має границю, коли $\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$, то її природно взяти за об'єм заданого тіла

$$\boxed{V = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k.}$$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$ є інтегральною сумою для функції $S(x)$, неперервної на $[a;b]$, то функція $S(x)$ є інтегровною на відрізку $[a;b]$ і

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx.}$$

10.4. Обчислення об'єму тіла обертання

Розгляньмо тіло, утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $abBA$, обмеженою кривою $y = f(x)$, прямими $x = a, x = b$ $(a < b)$ і віссю Ox. Це тіло називають *тілом обертання*.

Переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, яка відповідає абсцисі x, є круг із площею

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

Отже, об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі Ox знаходять за формулою

$$\boxed{V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx.}$$

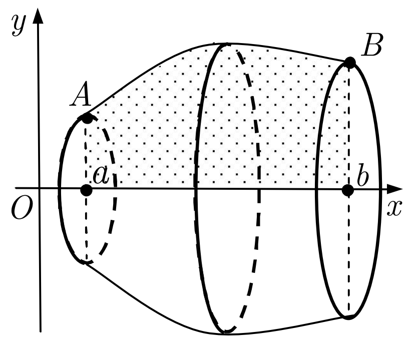


Рис. 10.8. Тіло обертання

10.5. Деякі фізичні застосування

1. Маса прямолінійного стрижня з лінійною густиною $\mu = \mu(x), x \in [a;b]$.

$$\boxed{m = \int_a^b \mu(x)dx.}$$

2. Шлях, пройдений матеріальною точкою, яка рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$ від моменту $t = t_1$ до моменту $t = t_2 > t_1$.

$$\boxed{s = \int_a^b v(t)dt.}$$

3. Робота, яку виконує змінна сила, під час прямолінійного переміщення матеріальна точки вздовж осі Ox від точки a до точки b.

$$\boxed{\mathrm{A} = \int_a^b F(x)dx.}$$

Лекція 11. Подвійні інтеграли

11.1. Задача про об'єм криволінійного циліндра

Розгляньмо на площині Oxy область D, обмежену кусково-гладкою кривою L.

Криву L, яку задано явно рівнянням $y = f(x), x \in [a;b]$, називають *гладкою*, якщо функція f неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$.

Криву, утворену зі скінченної кількості гладких кривих, і яка не має точок самоперетину, називають *кусково-гладкою*.

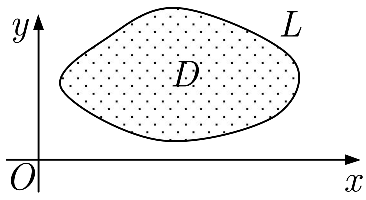


Рис. 11.1. Замкнена область, обмежена кусково-гладкою кривою

Нехай $z = f(x,y)$ — невід'ємна, неперервна в замкненій обмеженій області D функція. У тривимірному просторі рівняння $z = f(x,y)$ визначає деяку поверхню Ω, яка проектується на площину Oxy в область D. Тіло G, обмежене зверху поверхнею Ω, знизу областю D з межею L, з боків — циліндричною поверхнею з напрямною L і твірними, які паралельні осі Oz, називають *криволінійним циліндром.*

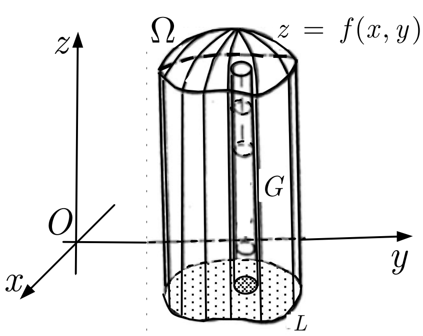


Рис. 11.2. Криволінійний циліндр

Знайдімо об'єм криволінійного циліндра.

1. Розіб'ємо область D на n ділянок D_i з кусково-гладкими межами $L_i, i=\overline{1,n}$. Через межу L_i проведімо циліндричну поверхню із твірними, паралельними осі Oz.

2. Ці поверхні розіб'ють тіло G на n стовпчиків G_i, об'єм кожного з яких

$$\Delta V_i \approx f(M_i)\Delta S_i, i=\overline{1,n},$$

де $M_i(\xi_i;\eta_i)$ — довільна точка ділянки D_i; ΔS_i — площа ділянки D_i; d_i — діаметр ділянки D_i.

3. Тоді об'єм усього тіла

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i.$$

4. Якщо спрямуємо $\max d_i \to 0, n \to 0$, то дістанемо значення об'єму тіла

$$\boxed{V = \lim_{\substack{\max d_i \to 0,\\ n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i.}$$

11.2. Поняття подвійного інтеграла

Нехай в області D з кусково-гладкою межею L задано неперервну функцію $f(x,y)$.

1. Розіб'ємо область D кусково-гладкими дугами L_i на n ділянок D_i з площами ΔS_i і діаметрами $d_i, i=\overline{1,n}$.

2. У кожній ділянці виберімо довільно точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$.

3. Утворімо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i.$$

Означення 11.1. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми, коли найбільший з діаметрів ділянок прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття області D на ділянки, ані від вибору точок усередині кожної ділянки, то її називають *подвійним інтегралом за областю* D від функції f і позначають

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max d_i \to 0\\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i.}$$

Оскільки границя інтегральної суми не повинна залежати від способу розбиття області D на ділянки, то область D можна розбивати на ділянки D_i прямими, які паралельні осям координат.

Нехай D_{ij} — прямокутник зі сторонами

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$$

що лежить всередині області D.

Його площа дорівнює $\Delta x_i \Delta y_j$. Такому розбиттю відповідає інтегральна сума

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

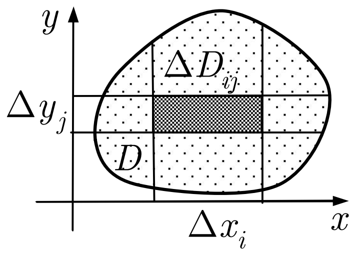


Рис. 11.3. Розбиття області вертикальними і горизонтальними прямими

Тоді за означенням подвійного інтеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

чим і обґрунтовується позначення $dxdy$ як міри (площі) елементарної ділянки.

Із розгляду задачі про об'єм криволінійного циліндра випливає, що об'єм криволінійного циліндра, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$, яка проектується на площину Oxy в область D, можна знайти за формулою

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.}$$

11.3. Властивості подвійного інтеграла

1 (*лінійність*). Для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

2 (*адитивність*). Якщо область D є об'єднанням двох областей D_1 та D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_{D=D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

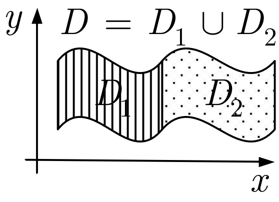


Рис. 11.4. Адитивність подвійного інтеграла

3 (*нормованість*). $\iint\limits_D 1dxdy = \text{площа}(D) = S(D).$

4. Якщо $f(x,y) \geq 0, (x;y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$

5. Якщо $f(x,y) \leq g(x,y), (x,y) \in D$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

6. Для неперервної у плоскій області D функції f правдива нерівність

$$mS \le \iint_D f(x,y)dxdy \le MS,$$

де $m = \min\limits_D f(x,y), M = \max\limits_D f(x,y), S$ — площа області D.

7. Якщо функція f означена й неперервна в обмеженій замкненій області D, то існує точка $M_0 \in D$, що

$$\iint_D f(M)dS = f(M_0)S.$$

11.4. Обчислення подвійного інтеграла у ПДСК

Покажемо, що обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двох визначених інтегралів.

Область D називають *правильною у напрямі осі* Oy якщо будь-яка вертикальна пряма, що проходить через внутрішню точку області перетинає межу області не більше як у двох точках.

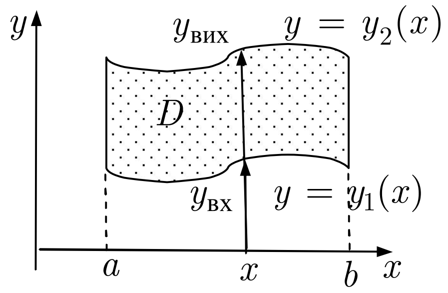


Рис. 11.5. Область правильна у напрямі осі Oy

Нехай функція $f(x,y) \ge 0, M(x;y) \in D$. Тоді $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ виражає об'єм V циліндричного тіла.

Побудуємо переріз циліндричного тіла площиною, перпендикулярної до осі Ox: $x = \text{const} \in [a;b]$.

У перерізі дістанемо криволінійну трапецію, площу якої можна знайти за формулою

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \ \ x = \text{const} \in [a;b].$$

Згідно з методом перерізів

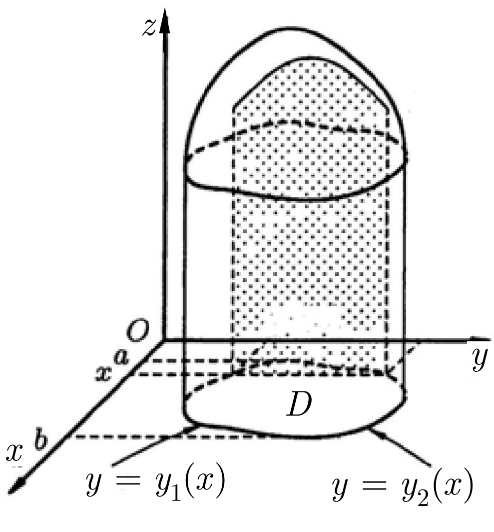


Рис. 11.6. Зведення подвійного інтеграла до повторних

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Отже,

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.}$$

Інтеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ називають *внутрішнім*, а інтеграл $\int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$ — *зовнішнім*. Праву частину одержаної формули називають *двократним* інтегралом.

Для області D *правильної у напрямі осі* Ox, тобто області, для якої будь-яка горизонтальна пряма, що проходить через внутрішню точку області перетинає межу області не більше як у двох точках, маємо формулу

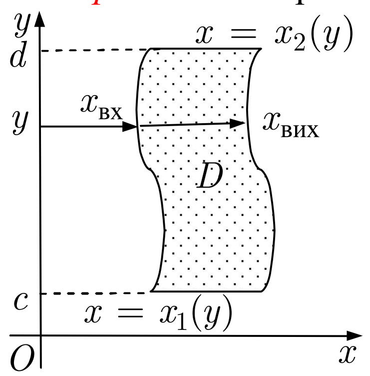


Рис. 11.6. Область правильна в напрямі осі Ox

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.}$$

Тут внутрішнім є інтеграл за змінною x.

Якщо область D обмежена вертикальними прямими $x = a, x = b$ та горизонтальними прямими $y = c, y = d$, то

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.}$$

Причому це єдиний випадок сталих меж у внутрішньому інтегралі.

Зауваження 11.1.

1. Формула лишається правдивою для будь-якої неперервної функції f.

2. Якщо область не є правильною у жодному з напрямів, то її треба розбити на області, правильні в одному з напрямів.

Приклад 11.1. Обчислити $\iint\limits_D (3xy^2 + 4y^3)dxdy$, де $D: 0 \le x \le 1, 2 \le y \le 4$.

Приклад 11.2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 10x + 25$ та $y^2 = 9 - 6x$.

Приклад 11.3. Обчислити $\int\limits_0^\pi dy \int\limits_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx$, помінявши напрям інтегрування.

Лекція 12. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Застосування подвійних інтегралів

12.1. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Щоб спростити обчислення подвійного інтеграла, найчастіше застосовують перехід до полярних координат за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2;}$$

$$\rho \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi.$$

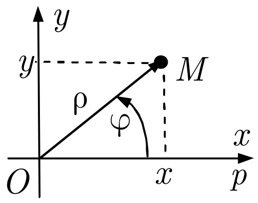


Рис. 12.1. Узгоджені полярні і декартові координати

Розглянемо одночасно прямокутну декартову систему координат і узгоджену з нею полярну систему координат. Нехай $f(x,y)$ — неперервна функція в замкненій обмеженій області D з кусково-гладкою межею L.

Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття області D на ділянки D_k і від вибору всередині цих ділянок точок $M_k(x_k; y_k)$, то область D розіб'ємо на елементи D_k за допомогою координатних ліній полярної системи:

1) $\rho = \rho_k$ (кіл);

2) $\varphi = \varphi_k$ (променів).

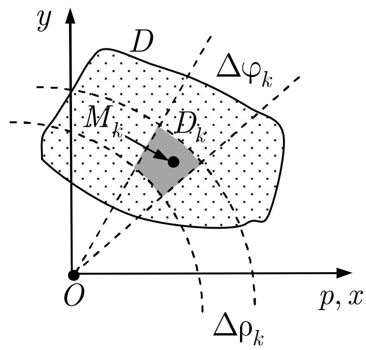


Рис. 12.2. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Оскільки елемент D_k можна вважати наближено прямокутником зі сторонами $\rho_k \Delta\varphi_k$ і $\Delta\rho_k$, то його площа

$$\Delta S_k \approx \rho_k \Delta\varphi_k \Delta\rho_k.$$

Виберімо на ділянці D_k точку

$$M_k(x_k; y_k) = M(\rho_k \cos\varphi_k, \rho_k \sin\varphi_k).$$

Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

$$= \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\rho_k \cos\varphi_k, \rho_k \sin\varphi_k)\rho_k \Delta\varphi_k \Delta\rho_k =$$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho = \iint\limits_{\tilde{D}} \tilde{f}(\rho, \varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho.$$

Отже, правдива формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho,}$$

з якої випливає, співвідношення елементів площі у ПДСК і полярній системі координат

$$\boxed{dS = dxdy = \rho\, d\varphi\, d\rho.}$$

Для області, обмеженої променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$, яку називають *радіальною* правдива формула

$$\boxed{\iint\limits_{\tilde{D}} \tilde{f}(\rho,\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \tilde{f}(\rho,\varphi)\rho\, d\rho.}$$

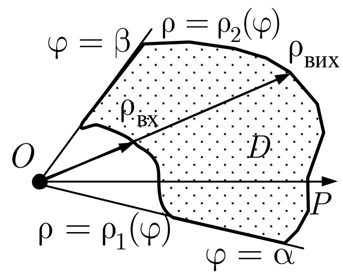


Рис. 12.2. Радіальна область

12.2. Загальний випадок заміни змінної

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в деякій замкненій обмеженій області D, то існує

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Перейдімо за допомогою співвідношень

$$x = x(u,v), y = y(u,v)$$

у подвійному інтегралі до нових змінних u та v і припустімо, що з них однозначно можна виразити

$$u = u(x,y), v = v(x,y).$$

Тоді кожній точці $M(x;y) \in D$ відповідає деяка точка $\tilde{M}(u;v) \in \tilde{D}$.

Теорема 12.1. Нехай взаємно однозначне перетворення

$$u = u(x,y), v = v(x,y)$$

переводить замкнену обмежену область D площини Oxy у замкнену обмежену область $\tilde{D}$ площини Ouv. Якщо функції $x(u,v)$ та $y(u,v)$ мають в області $\tilde{D}$ неперервні частинні похідні, то правдива *формула заміни змінних у подвійному інтегралі*:

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f(x(u,v), y(u,v))\left|J(u,v)\right| dudv.}$$

де $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0.$

Визначник $J(u,v)$ називають *якобіаном* (*визначником Якобі — Остроградського*). Його модуль є коефіцієнтом спотворення площі під час заміни змінної:

$$dxdy = \left|J(u,v)\right| dudv.$$

Із розгляду безпосереднього переходу від декартових до полярних координат, маємо, що $\left|J(\rho,\varphi)\right| = \rho$. Той самий результат дістанемо, обчислюючи якобіан за загальною формулою:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Для *узагальненої полярної системи координат*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2},$$

$$\rho \ge 0, -\pi < \varphi \le \pi.$$

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

12.3. Застосування подвійних інтегралів

1. Площа плоскої області D.

$$\boxed{S(D) = \iint\limits_D dxdy.}$$

2. Маса пластинки D. Нехай в області D розподілена деяка маса (електричний заряд, теплота тощо).

Розіб'ємо пластинку D довільним чином на ділянки D_i з площею ΔS_i і масою $\Delta m_i, i = \overline{1,n}$.

Середньою густиною розподілу маси на ділянці D_i називають відношення

$$\frac{\Delta m_i}{\Delta S_i}.$$

Нехай тепер ділянка D_i стягується в точку $M_i(x_i; y_i)$ і $\Delta S_i \to 0$. Якщо існує

$$\lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ D_i \to M_i}} \frac{\Delta m_i}{\Delta S_i},$$

то вона є деякою функцією від точки M_i, яку називають *поверхневою густиною*

$$\boxed{\mu(M_i) = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ D_i \to M_i}} \frac{\Delta m_i}{\Delta S_i}.}$$

Нехай, навпаки, в області D задано поверхневу густину розподілу маси як неперервну функцію $\mu(M), M \in D$, і треба визначити масу m пластинки D.

Тоді

$$\Delta m_i \approx \mu(M_i)\Delta S_i; \quad m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i)\Delta S_i;$$

$$m = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ D_i \to M_i}} \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i)\Delta S_i.$$

Отже, масу пластинки D з поверхневою густиною $\mu(x,y),(x;y) \in D$ знаходять за формулою

$$\boxed{m = \iint_D \mu(x,y)dxdy.}$$

3. Статичні моменти. *Статичними моментами* матеріальної точки масою m щодо осі Ox та осі Oy називають:

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= my; \\ M_y &= mx. \end{aligned}}$$

Розіб'ємо фігуру D на ділянки D_i площею $\Delta S_i, i = \overline{1,n}$, вибираючи в кожній ділянці D_i точку $M_i(x_i;y_i)$. Тоді

$$\Delta m(D_i) \approx \mu(x_i,y_i)\Delta S_i$$

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(x_i,y_i)\Delta S_i;$$

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(x_i,y_i)\Delta S_i.$$

Отже, статичні моменти пластинки D знаходять за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \iint_D y\mu(x,y)dxdy, \\ M_y &= \iint_D x\mu(x,y)dxdy. \end{aligned}}$$

4. Координати центра мас пластинки.

$$\boxed{x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m}.}$$

Приклад 12.1. Знайти площу фігури, обмеженої гіперболами $xy = a^2$, $xy = b^2$, де $x > 0, y > 0, 0 < a < b$, і прямими $y = \alpha x, y = \beta x$, $0 < \alpha < \beta$, запроваджуючи нові змінні $xy = u, \dfrac{x}{y} = v$.

Приклад 12.2. Знайти площу, обмежену еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Приклад 12.3. Знайти масу пластинки $D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9$, $x \le 0$, $y \ge 0$, якщо поверхнева густина $\mu(x,y) = \dfrac{y - 4x}{x^2 + y^2}$.

Лекція 13. Потрійні інтеграли

13.1. Означення інтеграла

Поверхню $\Omega : F(x,y,z) = 0$ називають *гладкою*, якщо в кожній її точці існує нормальний вектор $\overline{n}$ і його положення міняється неперервно. Поверхні утворені скінченною кількістю гладких поверхонь називають *кусково-гладкими*.

Розгляньмо неперервну функцію $f(x,y,z)$ у замкненій області G, обмеженій кусково-гладкою поверхнею Ω.

Розіб'ємо область G за допомогою скінченної кількості гладких поверхонь на елементи G_i об'ємом ΔV_i і діаметром $d_i, i = \overline{1,n}$.

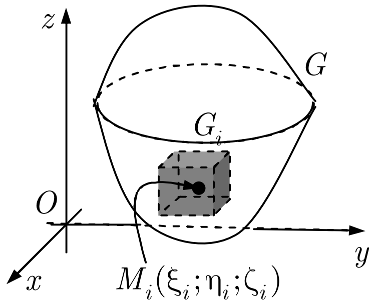


Рис. 13.1. Потрійний інтеграл за областю G

У середині кожного елемента G_i виберімо довільну точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ і побудуймо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$$

Означення 13.1. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми, коли найбільший з діаметрів елементів прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття області G на елементи, ані від вибору точок всередині елементів, то її називають *потрійним інтегралом за областю* G від функції f і позначають

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.}$$

13.2. Властивості потрійного інтеграла

Потрійний інтеграл має всі властивості інтегралів за геометричними об'єктами.

1 (*лінійність*). Для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\iiint\limits_V (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dxdydz =$$
$$= \alpha \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz.$$

2 (*адитивність*). Якщо $G = G_1 \cup G_2$ і області G_1 та G_2 не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

3 (*нормованість*). $\iiint\limits_G 1dV = \text{об'єм } (G) = V(G).$

13.3. Обчислення потрійного інтеграла

Як і для подвійних інтегралів потрійні інтеграли зводять до повторних.

Область G називають *цилiндричною в напрямі осі* Oz якщо будь-яка вертикальна пряма, що проходить через внутрішню точку $(x;y;0) \in D_{Oxy}$ паралельно осі Oz перетинає межі області G не більше як у двох точках.

Розгляньмо циліндричну в напрямі осі Oz просторову область G, яка обмежена:

зверху поверхнею $z = z_2(x,y)$,

знизу поверхнею $z = z_1(x,y)$,

і проектується на площину Oxy в область D_{Oxy}.

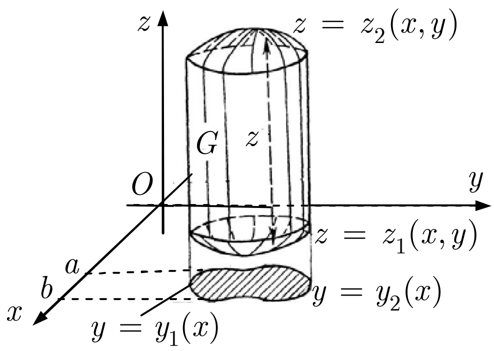


Рис. 13.2. Обчислення потрійного інтеграла

Тоді потрійний інтеграл можна звести до повторних за формулою:

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \iint\limits_{D_{Oxy}} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.}$$

Якщо область D_{Oxy} є правильною, приміром, у напрямі осі Oy, тобто

$$D_{Oxy} : y_1(x) \le y \le y_2(x), x \in [a;b],$$

то потрійний інтеграл зводиться до трьох повторних:

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.}$$

13.4. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Обчислюючи потрійний інтеграл, часто застосовують заміну змінних.

Нехай взаємно однозначне перетворення

$$x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$$

переводить обмежену замкнену область G простору $Oxyz$ в обмежену замкнену область $\tilde{G}$ простору $Ouvw$. Якщо функції x, y та z мають в області $\tilde{G}$ неперервні частинні похідні і якобіан

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, то правдива формула заміни змінної у потрійному інтегралі:

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tilde{G}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|J(u,v,w)\right| dudvdw.}$$

13.5. Перехід до сферичних координат у потрійному інтегралі

Сферичними координатами точки $M(x;y;z)$ простору $Oxyz$ називають трійку чисел (r, φ, θ), де:

r — довжина радіуса-вектора точки M,

φ — кут, утворений проекцією радіуса-вектора $\overline{OM}$ на площину Oxy і віссю Ox,

θ — кут відхилення радіуса-вектора $\overline{OM}$ від осі Oz.

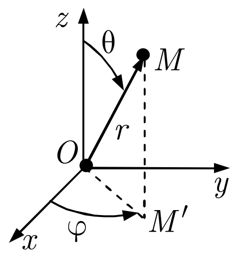


Рис. 13.2. Сферична система координат

Сферичні координати r, φ, θ зв'язані з узгодженими декартовими координатами x, y, z співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2;}$$

$$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Якобіан переходу до сферичних координат $J = -r^2 \sin\theta$, а

$$\boxed{\left|J\right| = r^2 \sin\theta.}$$

Отже, правдива формула переходу до сферичних координат у потрійному інтегралі:

$$\boxed{\begin{gathered} \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\varphi,\theta,r)r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr, \\ \tilde{f}(\varphi,\theta,r) = f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta). \end{gathered}}$$

Використовують і *узагальнені сферичні координати*:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2;}$$

$$r \ge 0, 0 \le \theta \le \pi, -\pi \le \varphi \le \pi;$$

$$|J| = abcr^2\sin\theta.$$

13.6. Перехід до циліндричних координат у потрійному інтегралі

Циліндричними координатами точки $M(x;y;z)$ простору $Oxyz$ називають трійку чисел (ρ,φ,z), де:

ρ — довжина радіуса-вектора проекції точки M на площину Oxy;

φ — кут, утворений проекцією радіуса-вектора $\overline{OM}$ на площину Oxy і віссю Ox,

z— апліката точки M.

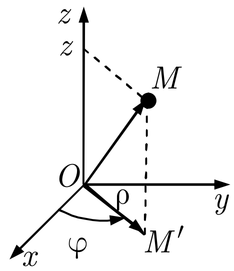


Рис. 13.3. Циліндрична система координат

Циліндричні координати ρ,φ,z зв'язані з узгодженими декартовими координатами x,y,z співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=\rho^2;}$$

$$\rho \ge 0, -\pi \le \varphi \le \pi.$$

Якобіан для переходу до циліндричних координат

$$\boxed{J=\rho.}$$

Отже, правдива формула переходу до циліндричних координат у потрійному інтегралі:

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tilde G} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\, d\varphi\, d\rho\, dz.}$$

Використовують і *узагальнені циліндричні координати*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2;}$$

$$\rho \ge 0, -\pi \le \varphi \le \pi;$$

$$|J| = ab\rho.$$

13.7. Застосування потрійного інтеграла

1. Об'єм тіла G.

$$\boxed{V(G)=\iiint\limits_G dxdydz.}$$

2. Маса тіла G з густиною $\mu(x,y,z)$.

$$\boxed{m(G)=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz.}$$

3. Статичні моменти тіла щодо координатних площин:

$$\boxed{M_{\begin{Bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{Bmatrix}}=\iiint\limits_G \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}\mu(x,y,z)dxdydz.}$$

4. Координати центра мас тіла:

$$\boxed{x_C=\frac{M_{yz}}{m};\;\; y_C=\frac{M_{xz}}{m};\;\; z_C=\frac{M_{xy}}{m}.}$$

Приклад 13.1. Знайти об'єм тіла G, обмеженого площинами $y=x, y=0$, $x=1, z=0$ і параболоїдом $z=x^2+y^2$.

Приклад 13.2. Знайти об'єм тіла G, обмеженого конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і площиною $z=1$.

Приклад 13.3. Знайти об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Приклад 13.4. Знайти масу кулі, обмеженою півсферою $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ і конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$, з густиною $\mu=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Лекція 14. Криволінійний інтеграл 1-го роду

14.1. Задача про масу дуги

Криву L, задану параметрично рівняннями

$$L:\{x=x(t), y=y(t), z=z(t),\;\; t\in[\alpha;\beta]$$

називають *гладкою*, якщо:

1) функції $x(t), y(t), z(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha;\beta]$ і

$$\overline{\tau}=x'(t)\overline{i}+y'(t)\overline{j}+z'(t)\overline{k}\neq\overline{0}\;\;\forall t\in[\alpha;\beta];$$

2) крива L не має точок самоперетину.

Якщо L — замкнена крива, тобто

$$x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta), z(\alpha) = z(\beta)$$

то додатково вимагають, щоб

$$x'(\alpha) = x'(\beta), y'(\alpha) = y'(\beta), z'(\alpha) = z'(\beta).$$

Розгляньмо у просторі $\mathbb{R}^3$ гладку дугу кривої L, у точках якої неперервно розподілена маса з лінійною густиною $\mu = \mu(x, y, z)$. Треба знайти масу дуги.

Розбиваємо дугу L на n ланок L_i завдовжки $\Delta l_i, i = \overline{1, n}$. На ділянці L_i довільно вибираємо точку M_i. Припускаючи густину ланки L_i сталою і рівною $\mu(M_i)$, дістаємо, що маси ланки L_i

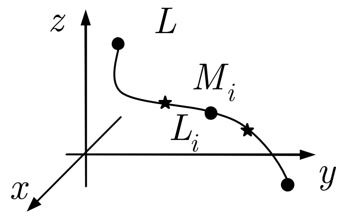


Рис. 14.1. Маса кривої L

$$\Delta m_i \approx \mu(M_i)\Delta l_i$$

Тоді маса всієї кривої L

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i)\Delta l_i.$$

Отже,

$$m = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i)\Delta l_i = \int_L \mu(x, y, z)dl.$$

14.2. Означення інтеграла

Нехай у просторі задано гладку криву L, у точках якої визначено неперервну функцію $f(x, y, z)$.

Криву довільним чином розбиймо на ланки L_i завдовжки $\Delta l_i, i = \overline{1, n}$. На кожній ланці L_i вибираємо довільну точку M_i й утворюємо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i.$$

Означення 14.1. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми, коли найбільший з діаметрів ділянок прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття кривої на ланки, ані від вибору точки на кожній ланці, то її називають *криволінійним інтегралом 1-го роду* (*за довжиною дуги*) і позначають

$$\boxed{\int_L f(x, y, z)dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i.}$$

14.3. Властивості криволінійного інтеграла 1-го роду

1 (*лінійність*). Для довільних значень $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_L [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]dl = \alpha \int_L f(x,y,z)dl + \beta \int_L f(x,y,z)dl.$$

2 (*адитивність*). Якщо кусково-гладку криву L розбити на дві ланки L_1 та L_2, то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{L_1} f(x,y,z)dl + \int_{L_2} f(x,y,z)dl.$$

3 (*нормованість*). $\int_L 1dl =$ довжина $(L) = l(L)$.

4. Криволінійний інтеграл 1-го роду не залежить від напряму шляху інтегрування, тобто, якщо $L = NM$, то

$$\int_{MN} f(x,y,z)dl = \int_{NM} f(x,y,z)dl.$$

14.4. Диференціал довжини дуги кривої

Уточнимо поняття довжини кривої. Розгляньмо гладку криву L, задану рівнянням $y = y(x)$, де $y(x)$ — неперервно диференційовна функція на відрізку $[a;b]$.

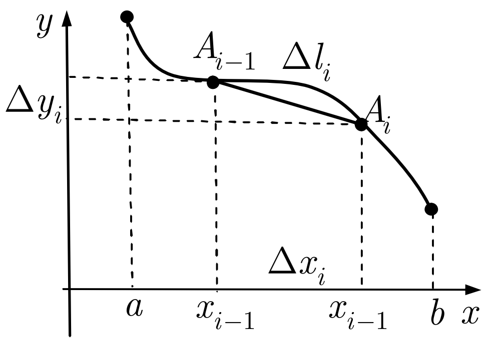


Рис. 14.2. Довжина дуги кривої

Розбиймо криву L на n ланок точками $A_i(x_i; y_i)$ і позначимо

$$a = x_0, b = x_n,$$
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Розгляньмо ламану $AA_1 ... A_{n-1}B$, яку вписану в криву AB.

Знаходячи за теоремою Піфагора довжину кожної ланки ламаної маємо

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Підсумовуючи, дістаємо наближений вираз для довжини дуги

$$l(AB) \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Довжиною дуги кривої називають границю периметра вписаної в цю криву ламаної:

$$l(AB) = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

1. Розгляньмо гладку плоску криву L, задану явно рівнянням $y = f(x), x \in [a;b]$ (рис. 14.2).

Візьмімо довільне значення $x \in [a;b]$ і розгляньмо змінний відрізок $[a;x]$. На ньому величина l стає функцією від x, тобто $l = l(x)$.

За формулою обчислення диференціала маємо
$$dl = l'(x)dx.$$

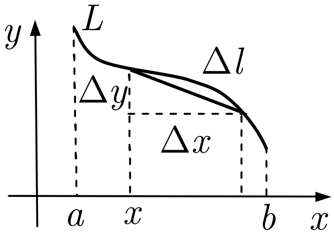


Рис. 14.3. Диференціал дуги плоскої кривої

Знайдімо $l'(x)$, заміняючи довжину малої дуги Δl довжиною її хорди:
$$l'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y_x')^2}.$$

Отже,
$$\boxed{dl = \sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx.}$$

2. Якщо плоску криву L, задано параметрично рівняннями
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2], \end{cases}$$
то, припускаючи, що $x'(t) > 0$, дістаємо
$$dl = \sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2}\,x'(t)dt = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt;$$
$$\boxed{dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.}$$

3. Якщо просторову криву L, задано параметрично рівняннями
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), t \in [t_1; t_2], \end{cases}$$
то
$$\boxed{dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt.}$$

4. Якщо плоску криву L задано в полярних координатах рівнянням
$$\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta],$$
то її можна задати параметрично рівняннями
$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \varphi \in (\alpha; \beta)$$
і одержати формулу
$$\boxed{dl = \sqrt{(\rho_\varphi')^2 + \rho^2}\,d\varphi.}$$

14.5. Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду

1. Криву L задано параметричними рівняннями $L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), t \in [t_1; t_2]. \end{cases}$

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.}$$

2. Криву L задано рівнянням $y = y(x), x \in [a;b]$.

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.}$$

3. Криву L задано параметричними рівняннями $L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2]. \end{cases}$

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.}$$

4. Криву L задано рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha;\beta]$.

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(\rho'_\varphi(\varphi))^2 + \rho^2(\varphi)}d\varphi.}$$

14.6. Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду

1. Довжину дуги L.

$$\boxed{l(L) = \int\limits_L dl.}$$

2. Маса, розподілену по кривій L з густиною $\mu(x,y,z)$.

$$\boxed{m(L) = \int\limits_L \mu(x,y,z)dl.}$$

3. Статичні моменти кривої щодо координатних площин.

$$\boxed{M_{\begin{Bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{Bmatrix}} = \int\limits_L \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dl.}$$

4. Координати центра мас кривої.

$$\boxed{x_C = \frac{M_{yz}}{m};\quad y_C = \frac{M_{xz}}{m};\ z_C = \frac{M_{xz}}{m}.}$$

Приклад 14.1. Знайдіть масу першого витка циліндричної гвинтової лінії $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, 0 \le t \le 2\pi, \\ z = bt, \end{cases}$ розподілену з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

Приклад 14.2. Знайти довжину кардіоїди $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$.

Лекція 15. Криволінійний інтеграл 2-го роду. Ч. 1

15.1. Задача про роботу

Якщо в кожній точці простору (або його частині G) означено вектор функцію

$$\boxed{\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},}$$

де $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ — скалярні функції, то кажуть, що в цьому просторі (або його частині G) задано *векторне поле* $\overline{a}$.

Приклади векторних полів: поле швидкостей рухомої рідини, поле електричної напруженості, поле сил тощо.

Нехай у кожній точці просторової області G задано силове поле

$$\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},$$

де $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ — неперервні в області G функції.

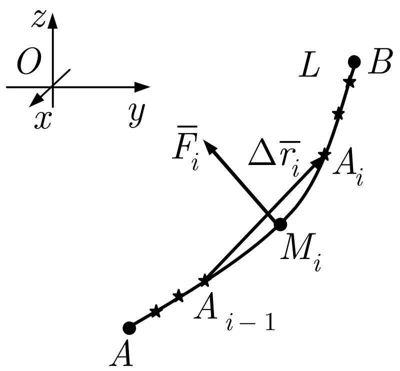


Рис. 15.1. Задача про роботу силового поля

Під час переміщення матеріальної точки вздовж гладкої кривої L поле $\overline{F}$ виконує деяку роботу A. Щоб знайти її, розіб'ємо довільним чином криву L на n ланок L_i точками

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B,$$

і позначимо $\Delta\overline{r}_i = \overline{A_{i-1}A_i}$.

На кожній ланці L_i довільним чином виберімо точку M_i. Силу $\overline{F}$ вважатимемо сталою на кожному відрізку $A_{i-1}A_i$ і рівною $\overline{F}(M_i)$. Тоді робота під час переміщення вздовж ділянки L_i

$$\Delta \text{A}_i \approx (\overline{F}(M_i), \Delta\overline{r}_i)$$

Наближено робота поля $\overline{F}$ під час переміщення вздовж кривої L

$$\text{A}_L(\overline{F}) \approx \sum_{i=1}^{n} (\overline{F}(M_i), \Delta\overline{r}_i).$$

Спрямовуючи $\max\left|\Delta\overline{r}_i\right|$ до нуля, дістаємо роботу силового поля $\overline{F} = \overline{F}(x,y,z)$ під час переміщення вздовж дуги L:

$$\mathrm{A}_L(\overline{F}) = \lim_{\substack{\max|\Delta\overline{r}_i|\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{F}(M_i), \Delta\overline{r}_i).$$

Якщо позначити

$$\Delta\overline{r}_i = \Delta x_i\overline{i} + \Delta y_i\overline{j} + \Delta z_i\overline{k},$$

то можна одержати координатну форму цього виразу:

$$\mathrm{A}_L(\overline{F}) = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0,\\ \max|\Delta y_i|\to 0,\\ \max|\Delta z_i|\to 0,\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \big(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i \big).$$

15.2. Означення криволінійного інтеграла 2-го роду

Нехай функції $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ неперервні в точках гладкої кривої

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha;\beta]. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Точку $A(x(\alpha);y(\alpha);z(\alpha))$ називають *початковою* точкою кривої L, а точку $B(x(\beta);y(\beta);z(\beta))$ — *кінцевою*.

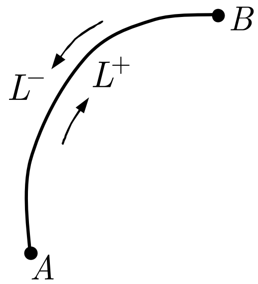


Рис. 15.2.
Орієнтована крива

Криву, для якої вибрано початкову та кінцеву точки і вказано напрям руху, називають *орієнтованою*: L^+ означає, що крива L орієнтована й рух уздовж неї відбувається від початкової точки A до кінцевої точки B, а L^- — що рух відбувається від B до A. Криву можна орієнтувати, вибираючи напрям дотичного вектора.

Розгляньмо на кусково-гладкій орієнтованій кривій L вектор-функцію

$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k} = \overline{a}(x,y,z).$$

Розіб'ємо криву L довільним чином на ланки $L_i, i = \overline{1,n},$ точками

$$A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B.$$

На кожній ланці L_i виберімо довільно точку

$$M_i(x_i;y_i;z_i), i = \overline{1,n},$$

і знайдімо $\overline{a}(M_i)$ і розгляньмо $\Delta\overline{r}_i = \overline{A_{i-1}A_i}$.

Утворімо інтегральну суму для вектор-функції $\overline{a} = \overline{a}(x,y,z)$:

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(x_i,y_i,z_i), \Delta\overline{r}_i).$$

Означення 15.1. Якщо існує границя інтегральної суми, коли $\max\left|\Delta\overline{r}_i\right| \to 0$, що не залежить ані від способу розбиття кривої L на ланки L_i, ані від вибору точок $M_i \in L_i$, її називають *криволінійним інтегралом 2-го роду* (*за координатами*) від вектор-функції

$$\overline{a} = \overline{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}.$$

уздовж кривої L і позначають

$$\boxed{\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \lim_{\substack{\max\left|\Delta\overline{r}_i\right|\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r}_i).}$$

Якщо $d\overline{r} = (dx; dy; dz)$, то криволінійний інтеграл можна записати в координатній формі:

$$\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Якщо гладку криву L задано параметричними рівняннями $L: \begin{cases} x = x(t),\\ y = y(t),\\ z = z(t),\end{cases}$

$t \in [\alpha; \beta]$, то диференціал дуги кривої

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt = \left|\overline{\tau}\right| dt,$$

де $\overline{\tau} = x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j} + z'(t)\overline{k}$ — вектор, дотичний до кривої L у точці $M(x(t); y(t); z(t))$.

Ураховуючи, що $\overline{\tau}^0 = \dfrac{\overline{\tau}}{|\overline{\tau}|}$, підінтегральний вираз можна переписати як

$$Pdx + Qdy + Rdz = Px'(t)dt + Qy'(t)dt + Rz'(t)dt =$$
$$= (\overline{a}, \overline{\tau})dt = \left(\overline{a}, \frac{\overline{\tau}}{\left|\overline{\tau}\right|}\right)\left|\overline{\tau}\right| dt = (\overline{a}, \overline{\tau}^0)dl.$$

Дістаємо формулу зв'язку між криволінійними інтегралами 1-го і 2-го роду:

$$\boxed{\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_L (\overline{a}, \overline{\tau}^0)dl.}$$

15.3. Властивості криволінійного інтеграла

1 (*лінійність*). Для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_L (\alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2, d\overline{r}) = \alpha\int\limits_L (\overline{a}_1, d\overline{r}) + \beta\int\limits_L (\overline{a}_2, d\overline{r}).$$

2 (*адитивність*). Якщо криву L розбито на дві ланки L_1 та L_2, то

$$\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_{L_1} (\overline{a}, d\overline{r}) + \int\limits_{L_2} (\overline{a}, d\overline{r}).$$

3 (*орієнтованість*). Криволінійний інтеграл 2-го роду вздовж кривої L залежить від її орієнтації, тобто

$$\int\limits_{L^+} (\overline{a}, d\overline{r})dl = -\int\limits_{L^-} (\overline{a}, d\overline{r}).$$

Справді, зміна орієнтації кривої L^+ на протилежну L^- означає заміну вектора $d\overline{r}$ на вектор $(-d\overline{r})$.

15.4. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду

1. Криву L задано параметричними рівняннями $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha;\beta]. \\ z = z(t), \end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &\quad = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t) + \tilde{R}(t)z'(t)]dt, \end{aligned}}$$

де $\tilde{P}(t) = P(x(t), y(t), z(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t), y(t), z(t)), \tilde{R}(t) = R(x(t), y(t), z(t))$.

2. Криву L задано параметричними рівняннями $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha;\beta].$

$$\boxed{\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t)]dt,}$$

де $\tilde{P}(t) = P(x(t), y(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t), y(t))$.

3. Якщо плоску криву L задано явно рівнянням $y = f(x), x \in [a;b]$, то криву природно можна задати параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} x \in [a;b].$$

Отже,

$$\boxed{\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx.}$$

Приклад 15.1. Обчислити $\int\limits_L 2x^2dx-(y^2-x^2)dy$, де L — частина параболи $y=x^2$ з початковою точкою $A(0;0)$ і кінцевою точкою $B(2;4)$.

Приклад 15.2. Обчислити $\int\limits_L ydx+(x-z)dy+(x-y)dz$, де L — лінія перетину циліндра $x^2+y^2=R^2$ з площиною $x-z+2=0$.

15.5. Формула Остроградського — Ґріна

Встановімо формулу, яка зв'язує криволінійний інтеграл 2-го роду вздовж замкненої кривої із подвійним інтегралом за областю, яка обмежена цією кривою.

Нехай у площині Oxy задано замкнену область D з межею L. Вважають, що межа L області D орієнтована додатно (від'ємно), якщо під час руху вздовж L область D розташована ліворуч (праворуч). Вважають, що скінченну область D обмежує додатно орієнтована крива.

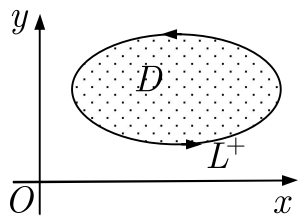


Рис. 15.3. Область D обмежена додатно орієнтованою кривою L^+

Теорема 15.1 (Остроградського — Ґріна). Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні й мають неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ у замкненій однозв'язній області D, обмеженій кусково-гладкою кривою L, то правдива *формула Остроградського — Ґріна*:

$$\boxed{\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.}$$

►Нехай область D є правильною у напрямі осі Oy і обмежена:

зверху — кривою $y=f_2(x), x\in[a;b]$;

знизу — кривою $y=f_1(x), x\in[a;b]$.

За правилом обчислення подвійного інтеграла маємо

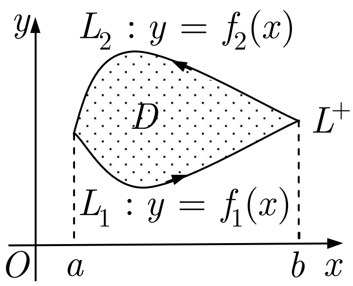


Рис. 15.4. Формула Остроградського — Ґауса

$$\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int\limits_a^b\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)}dx=$$

$$=\int\limits_a^b P(x,f_2(x))dx-\int\limits_a^b P(x,f_1(x))dx=-\int\limits_{L_2}P(x,y)dx-\int\limits_{L_1}P(x,y)dx=$$

$$=-\oint\limits_L P(x,y)dx.$$

Якщо б область D з боків обмежували відрізки вертикальних прямих γ_1 та γ_2, то

$$\int_{\gamma_1} P(x,y)dx = \int_{\gamma_2} P(x,y)dx = 0,$$

оскільки $dx\,|_{\gamma_1} = dx\,|_{\gamma_2} = 0$.

Отже,

$$\boxed{\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L P(x,y)dx.}$$

Так само доводять (якщо область D правильна у напрямі осі Ox), що

$$\boxed{\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)dy.}$$

Віднімаючи дві рівності, дістаємо формулу Остроградського — Ґауса:

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.}$$

Формула є правдивою для довільної області, яку можна розбити на скінченну кількість правильних областей. ◄

Приклад 15.3. Обчислити інтеграл $I = \oint_L (-x^2 y dx + xy^2 dy)$, де L — коло $x^2 + y^2 = R^2$, яке пробігається проти годинникової стрілки.

Наступний приклад показує, що умови неперервності функцій P та Q і частинних похідних P'_y, Q'_x істотні.

Приклад 15.4. Обчислити $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, де L — $x^2 + y^2 = 1$, яке пробігається проти годинникової стрілки.

Лекція 16. Криволінійний інтеграл 2-го роду. Ч. 2

16.1. Незалежність криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування

Нехай $L \subset G$ — довільна орієнтована крива з початковою точкою A і кінцевою точкою B.

Криволінійний інтеграл 2-го роду вздовж кривої L залежить не лише від розташування початкової і кінцевої точок шляху інтегрування, але й від самого шляху інтегрування.

Наступна теорема дає 4 еквівалентних умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.

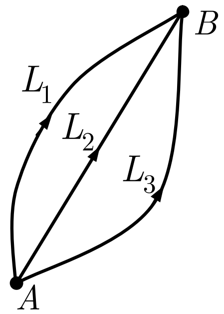


Рис. 16.1. Залежність інтеграла від шляху інтегрування

Теорема 16.1. Якщо $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ — функції, неперервно диференційовні в однозв'язній області G, то рівносильні такі 4 твердження:

1. Криволінійний інтеграл за будь-яким замкненим контуром $L \subset G$ дорівнює нулеві:

$$\boxed{\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.}$$

2. Криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування:

$$\boxed{\int_{L_1} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{L_2} Pdx + Qdy + Rdz,}$$

де L_1, L_2 — довільні кусково-гладкі криві, розташовані в області G, які мають спільний початок і кінець.

3. Існує неперервно диференційовна функція $u = u(x,y,z)$ така, що *диференціальна форма* $W = Pdx + Qdy + Rdz$ є її повним диференціалом:

$$\boxed{du = Pdx + Qdy + Rdz} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P; \frac{\partial u}{\partial y} = Q; \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

4. Для диференціальної форми $W = Pdx + Qdy + Rdz$ виконано умови:

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z}; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},}$$

які називають *умовами інтегровності*.

Повне доведення цієї теореми проводять за коловою схемою:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1.$$

16.2. Відновлення функції за її повним диференціалом

Якщо виконано умови теореми 15.1, то диференціальна форма

$$W = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

є повним диференціалом функції $u = u(x,y,z)$:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Функцію u можна відновити за формулою

$$\boxed{u(x,y,z) = \int\limits_{M_0(x_0;y_0;z_0)}^{M(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz + C,}$$

де C — довільна стала.

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то за шлях можна вибрати ламану, що з'єднує точки M_0 та M, з ланками паралельними осям координат.

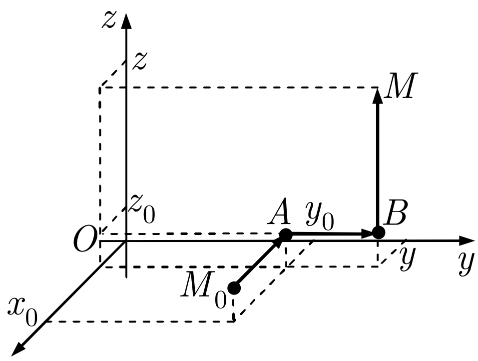


Рис. 16.2. Відновлення функції за її повним диференціалом

$$u(x,y,z) = \int\limits_{M_0ABM} Pdx + Qdy + Rdz + C =$$

$$= \int\limits_{\substack{M_0A \\ x=t, \\ y=y_0,\ t\in[x_0;x] \\ z=z_0}} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{\substack{AB \\ x=x, \\ y=t,\ t\in[y_0;y] \\ z=z_0}} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{\substack{BM \\ x=x, \\ y=y,\ t\in[z_0;z] \\ z=t}} Pdx + Qdy + Rdz + C =$$

Отже,

$$\boxed{u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C,}$$

де $M_0(x_0;y_0;z_0)$ — довільна точка неперервності функцій P, Q та R; C — довільна стала.

Одержаний результат можна сформулювати й для двох змінних.

Нехай $P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ — неперервно диференційовні в однозв'язній області D функції. Тоді, якщо виконано умову

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},}$$

то диференціальна форма $W = Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ в області D. Цю функцію можна відновити за формулою

$$\boxed{u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,t)dt+C,}$$

де $M_0(x_0;y_0)$ — довільна точка неперервності функцій P та Q; C — довільна стала.

Приклад 16.1. Перевірити, що вираз du є повним диференціалом і відновити функцію $u(x,y)$, якщо

$$du=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy.$$

Приклад 16.2. Перевірити, що вираз du є повним диференціалом і відновити функцію, якщо

$$du=(2xy+3z^2)dx+x^2dy+6xzdz.$$

16.3. Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду

1. Робота векторного поля $\overline{a}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$ під час переміщення вздовж кривої L від точки A до точки B.

$$\boxed{\mathrm{A}_L(\overline{a})=\int\limits_{L=AB}Pdx+Qdy+Rdz.}$$

2. Площа фігури, обмеженої замкненою кривою L.

$$\boxed{S(D)=\frac{1}{2}\oint\limits_{L}xdy-ydx.}$$

Справді, застосовуючи формулу Остроградського — Ґауса до криволінійного інтеграла маємо:

$$\oint\limits_{L}-ydx+xdy=\begin{vmatrix}P=-y,\\ Q=x,\end{vmatrix}=\iint\limits_{D}2dxdy=2S(D).$$

3. Циркуляція векторного поля $\overline{a}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ вздовж замкненого контуру L:

$$\boxed{\mathrm{C}_L(\overline{a})=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy+Rdz.}$$

Приклад 16.3. Знайти роботу сили $\overline{a}=-x\overline{i}+y\overline{j}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2+\dfrac{y^2}{9}=1, x\geq 0, y\geq 0$, від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;3)$.

Приклад 16.4. Знайти площу фігури, обмеженої астроїдою $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$

Лекція 17. Поверхневий інтеграл 1-го роду

17.1. Означення поверхневого інтеграла

Нехай задано гладку поверхню Ω задано явно рівнянням і неперервна в точках цієї поверхні функцію $f(x, y, z)$.

Розіб'ємо поверхню Ω на ділянки Ω_i площею $\Delta\sigma_i$ і діаметром $d_i, i = \overline{1, n}$. У кожній ділянці Ω_i довільно виберімо точку $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ й утворімо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i.$$

Означення 17.1. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми, коли найбільший діаметр ділянки прямує до нуля, що не залежить ані від способу розбиття поверхні Ω на ділянки Ω_i, ані від вибору точок $M_i \in \Omega_i, i = \overline{1, n}$, то її називають *поверхневим інтегралом 1-го роду* (*за площею поверхні*) від функції $f(x, y, z)$ за поверхнею Ω і позначають

$$\boxed{\iint\limits_{\Omega} f(x, y, z)d\sigma = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i.}$$

17.2. Властивості поверхневого інтеграла 1-го роду

1 (*лінійність*). Для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\iint\limits_{\Omega} [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)]\,d\sigma = \alpha\iint\limits_{\Omega} f(x, y, z)d\sigma + \beta\iint\limits_{\Omega} g(x, y, z)d\sigma.$$

2 (*адитивність*). Якщо кусково-гладка поверхня Ω є об'єднанням двох кусково-гладких поверхонь Ω_1 та Ω_2 без спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{\Omega_1} f(x, y, z)d\sigma + \iint\limits_{\Omega_2} f(x, y, z)d\sigma.$$

3 (*нормованість*). $\iint\limits_{\Omega} 1d\sigma = \text{площа}(\Omega) = S(\Omega).$

17.3. Площа поверхні

Нехай треба обчислити площу поверхні $\Omega : z = f(x, y)$, яка обмежена лінією L, де функція $f(x, y)$ неперервна і має неперервні частинні похідні.

Спроектуємо поверхню Ω на площину Oxy в область D, яка обмежена кривою Γ.

Розіб'ємо довільним чином область D на n ділянок D_i площею $\Delta S_i, i = \overline{1, n}$. В кожній ділянці D_i довільно виберімо точку $N_i(\xi_i; \eta_i)$.

На поверхні Ω:

точці N_i відповідає точка $M_i(\xi_i;\eta_i;z_i), z_i = f(\xi_i,\eta_i)$;

ділянці D_i відповідає ділянка Ω_i площею $\Delta\sigma_i$.

Через точку M_i до поверхні Ω проводимо дотичну площину:

$$z - z_i = f'_x(\xi_i,\eta_i)(x-\xi_i) + f'_y(\xi_i,\eta_i)(y-\eta_i).$$

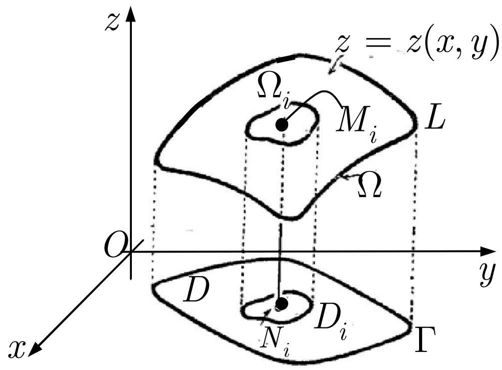


Рис. 17.1. Знаходження площі поверхні

На дотичній площині виділимо ділянку T_i, площею ΔT_i і діаметром d_i, яка проектується у ділянку D_i.

Для гладкої поверхні можна вважати, що

$$\Delta\sigma_i \approx \Delta T_i;$$

$$S(\Omega) \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i.$$

Площею поверхні Ω називають

$$\boxed{S(\Omega) = \lim_{\substack{\max d_i \to 0,\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i.}$$

Якщо γ_i — гострий кут між дотичною площиною і площиною Oxy, то

$$\Delta T_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}.$$

Кут γ_i є кутом між віссю Oz і нормальним вектором до дотичної площини

$$\overline{n} = -f'_x(N_i)\overline{i} - f'_y(N_i)\overline{j} + \overline{k}$$

Отже,

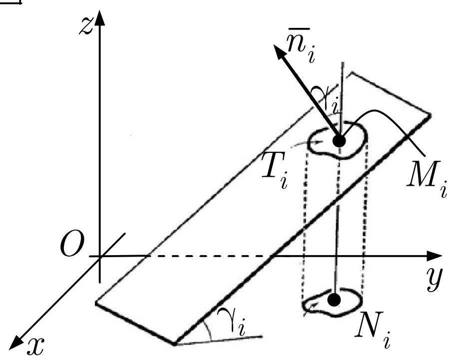


Рис. 17.2. Знаходження площі поверхні

$$\Delta\sigma_i \approx \Delta T_i = \sqrt{1 + (f'_x(N_i))^2 + (f'_y(N_i))^2}\,\Delta S_i$$

і можна вважати, що

$$\boxed{d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy.}$$

Якщо поверхню Ω задано неявно рівнянням $F(x,y,z) = 0$, то

$$\overline{n} = \pm\,\mathrm{grad}\,F;$$

$$\left|\overline{n}\right| = \left|\mathrm{grad}\,F\right| = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2};$$

$$\left|\cos(\widehat{\overline{n},\overline{k}})\right| = \frac{\left|F'_z\right|}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

Отже,

$$\boxed{d\sigma = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{\left|F'_z\right|} dxdy.}$$

17.4. Обчислення поверхневого інтеграла 1-го роду

Обчислення поверхневого інтеграла за поверхнею Ω зводиться до обчислення подвійного інтеграла за областю D — проекції на одну з координатних площин.

Якщо поверхню задано рівнянням $z = f(x,y)$ і вона однозначно проектується на площину Oxy в область D_{Oxy}, то правдива формула

$$\boxed{\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{Oxy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy.}$$

17.5. Застосування поверхневого інтеграла 1-го роду

1. Площа поверхні Ω.

$$\boxed{S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\sigma.}$$

2. Маса розподілена по поверхні Ω з густиною $\mu(x,y,z)$.

$$\boxed{m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)d\sigma.}$$

3. Статичні моменти поверхні Ω щодо координатних площин:

$$\boxed{M_{\left\{\begin{smallmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{smallmatrix}\right\}} = \iint\limits_{\Omega} \left\{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} \mu(x,y,z)d\sigma.}$$

4. Координати центра мас поверхні.

$$\boxed{x_C = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_C = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_C = \frac{M_{xy}}{m}.}$$

Приклад 17.1. Обчислити площу поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Приклад 17.2. Обчислити площу частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, яка відтинається циліндром $x^2 + y^2 = 2ax, a > 0$.

Приклад 17.3. Визначити сумарний електричний заряд, розподілений на частині поверхні параболоїда $2z = x^2 + y^2$, що відтинається від нього циліндром $x^2 + y^2 = 1$, якщо густина дорівнює z.

Лекція 18. Поверхневий інтеграл 2-го роду

18.1. Орієнтація поверхні

Візьмімо на гладкій поверхні Ω довільну точку M і виберімо в цій точці певний нормальний вектор до поверхні Ω.

Якщо неперервно переміщувати точку M уздовж замкненого контуру, який лежить на поверхні Ω і не перетинає її межі, то у вихідне положення точка M вернеться або з початковим, або з протилежним напрямом нормалі.

Означення 18.1. **1.** Якщо на поверхні Ω є хоча б одна точка і хоча б один контур, під час обходу якого напрям нормалі в точці зміниться на протилежний, то поверхню Ω називають *однобічною*.
2. Якщо для будь-якої точки поверхні Ω і будь-якого замкненого контуру після обходу напрям нормалі не змінюється, то поверхню називають *двобічною*, а сукупність усіх точок поверхні з вибраними в них напрямами нормалі називають *боком* такої *поверхні*.

Прикладом однобічної поверхні є листок Мебіюса, а двобічної — площина, сфера, конус, параболоїд тощо.

Для двобічної поверхні вибір напряму нормалі в одній точці визначає напрям нормалі в усіх точках поверхні, тобто визначає бік поверхні.

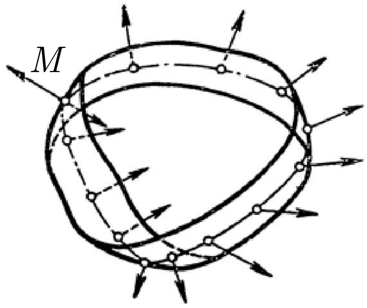


Рис. 18.1 Однобічна поверхня

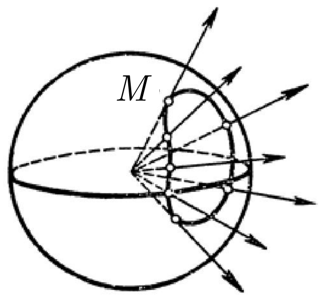


Рис. 18.2. Двобічна поверхня

Для замкнених поверхонь розрізняють внутрішній і зовнішній бік поверхні.

Нехай Ω — незамкнена двобічна поверхні, яка обмежена контуром L без точок самоперетину і на ній вибрано бік. Додатним напрямом обходу контуру L називають той, під час руху за яким вибраний бік поверхні залишається ліворуч. Протилежний напрям обходу називають від'ємним.

Поверхню Ω, у кожній точці якої задано нормальний вектор $\overline{n}$ і напрям обходу вздовж контуру L, називають *орієнтованою*.

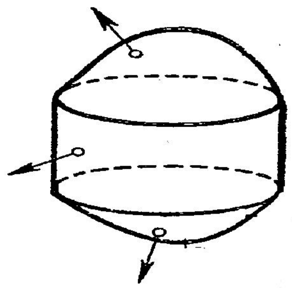


Рис. 18.3. Зовнішній бік замкненої поверхні

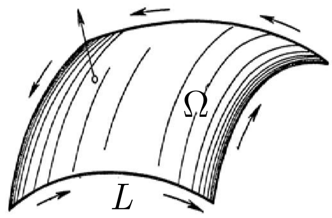


Рис. 18.4. Додатний напрям обходу контуру

18.2. Потік вектора через орієнтовану поверхню

Розгляньмо векторне поле швидкостей рухомої нестисливої рідини

$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$$

Треба визначити об'єм рідини Π, що протікає через кусково-гладку поверхню Ω за одиницю часу.

Кусково-гладкими кривими розіб'ємо поверхню Ω на ділянки Ω_i площею $\Delta\sigma_i$ і діаметром $d_i, i = \overline{1,n}$. Виділимо ділянку Ω_i і нехай $\overline{n}_i^0$ — орт вектора в довільній точці $M_i \in \Omega_i$. Об'єм рідини, що протече через ділянку Ω_i в одиницю часу дорівнює об'єму криволінійного циліндра.

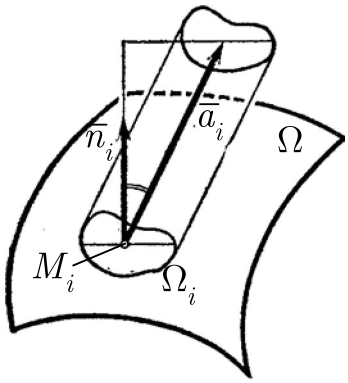


Рис. 18.3. Потік векторного поля

Якщо розбити поверхню Ω на досить дрібні частини, то ділянку Ω_i можна вважати плоскою. Тоді об'єм $\Delta\Pi_i$ циліндра наближено дорівнює

$$\Delta\Pi_i \approx h_i \Delta\sigma_i.$$

Але

$$h_i = \text{pr}_{\overline{n}_i^0}\, \overline{a}(M_i) = (\overline{a}(M_i), \overline{n}_i^0).$$

Тобто

$$\Delta\Pi_i \approx (\overline{a}(M_i), \overline{n}_i^0)\Delta\sigma_i.$$

Сума

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \overline{n}_i^0)\Delta\sigma_i.$$

виражає наближено об'єм рідини, що протікає через всю поверхню Ω.

Отже,

$$\boxed{\Pi = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \overline{n}_i^0)\Delta\sigma_i.}$$

18.3. Означення

Нехай в області G означено вектор-функцію

$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},$$

де P, Q, R — неперервні в області G функції.

І нехай в області G задано кусково-гладку поверхню Ω, орієнтовану вектором нормалі $\overline{n}^0 = \overline{n}^0(M)$.

Розіб'ємо поверхню Ω на ділянки Ω_i площею $\Delta\sigma_i$ і діаметром $d_i, i = \overline{1,n}$. Виберімо в кожній ділянці довільну точку M_i.

Утворімо інтегральну суму $\sum\limits_{i=1}^{n}(\overline{a}(M_i),\overline{n}^0(M_i))\Delta\sigma_i$.

Означення 18.2. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми, коли найбільший діаметр ділянки прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття поверхні Ω на ділянки Ω_i, ані від вибору точок M_i у кожній ділянці, то її називають *поверхневим інтегралом 2-го роду* від вектор-функції $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ за поверхнею Ω і позначають

$$\boxed{\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma = \lim_{\substack{\max d_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}(\overline{a}(M_i),\overline{n}^0(M_i))\Delta\sigma_i.}$$

Одиничний вектор нормалі до орієнтованої поверхні $F(x,y,z)=0$ знаходять за формулою

$$\boxed{\overline{n}^0 = \pm\frac{\operatorname{grad}F}{\left|\operatorname{grad}F\right|},}$$

де знак вибирають з геометричних міркувань.

Враховуючи, що

$$\overline{n}^0 = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix},$$

$$dydz = \cos\alpha d\sigma, dxdz = \cos\beta d\sigma, dxdy = \cos\gamma dxdy,$$

дістанемо формулу

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma &= \iint\limits_{\Omega}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =\\ &= \iint\limits_{\Omega}Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.\end{aligned}}$$

Приклад 18.1. Обчислити $\iint\limits_{\Omega} zdydz - 4ydzdx + 8x^2dxdy$, де Ω — зовнішній бік частини поверхні $z = x^2 + y^2$, відтятої площиною $z = 1$.

18.4. Властивості поверхневого інтеграла 2-го роду

1 (*лінійність*). Для будь-яких $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$\iint\limits_{\Omega}(\alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2,\overline{n}^0)d\sigma = \alpha\iint\limits_{\Omega}(\overline{a}_1,\overline{n}^0)d\sigma + \beta\iint\limits_{\Omega}(\overline{a}_2,\overline{n}^0)d\sigma.$$

2 (*адитивність*). Якщо поверхня Ω розбити на дві частини Ω_1 та Ω_2 без спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n})d\sigma=\iint\limits_{\Omega_1}(\overline{a},\overline{n})d\sigma+\iint\limits_{\Omega_2}(\overline{a},\overline{n})d\sigma.$$

3 (*орієнтованість*). Якщо розглянути поверхневий інтеграл за протилежним боком поверхні, то й знак інтеграла $\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma$ зміниться на протилежний:

$$\iint\limits_{\Omega^+}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma=-\iint\limits_{\Omega^-}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma.$$

18.5. Застосування поверхневого інтеграла 2-го роду

Потік векторного поля $\overline{a}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ через вибраний бік поверхні Ω.

$$\boxed{\Pi_{\Omega}(\overline{a})=\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma.}$$

Лекція 19. Скалярні і векторні характеристики векторних полів

19.1. Силові лінії векторного поля

Означення 19.1. *Силовою лінією* поля $\overline{a}$ називають криву, в кожній точці якої напрям дотичного вектора збігається з напрямом поля $\overline{a}$.

Приклади силових ліній: лінії течії рідини, силові лінії магнітного поля тощо.

Складімо рівняння силових ліній поля $\overline{a}$.

Якщо

$$\overline{r}(t)=x(t)\overline{i}+y(t)\overline{j}+z(t)\overline{k},$$

то вектор

$$\overline{r}'(t)=x'(t)\overline{i}+y'(t)\overline{j}+z'(t)\overline{k}$$

напрямлений уздовж дотичної до неї. Тоді й вектор

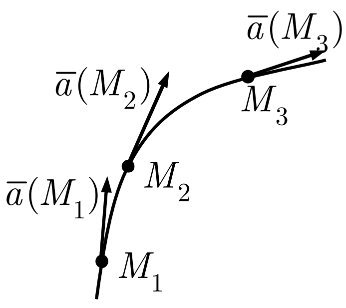


Рис. 19.1. Силові лінії

$$d\overline{r}=\overline{r}'(t)dt=\begin{pmatrix}x'(t)dt\\y'(t)dt\\z'(t)dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}$$

також напрямлений уздовж дотичної до векторної лінії. Звідси, за означенням силової лінії, вектори

$$\overline{a}=\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}\text{ і }d\overline{r}=\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}$$

колінеарні, а отже, їхні координати пропорційні:

$$\boxed{\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}}.$$

Це є системою диференціальних рівнянь силових ліній.

Просторові області, утворені з векторних ліній, називають *векторними трубками*. В кожній точці M поверхні векторної трубки вектор $\overline{a}(M)$ лежить у дотичній площині до поверхні.

Приміром, у разі поля швидкостей стаціонарного потоку рідини, векторна трубка є частина простору, яка заповнює під час переміщення деякий фіксований об'єм рідини.

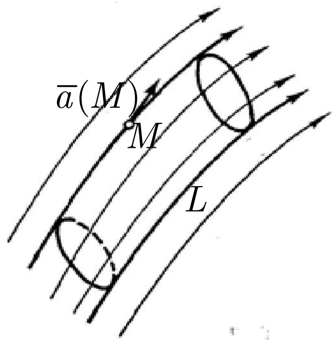


Рис. 19.2. Векторні трубки

19.2. Потік векторного поля через поверхню

Нехай $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ — довільне векторне поле, а Ω — кусково-гладка поверхня.

Означення 19.2. *Потоком* векторного поля $\overline{a}$ через поверхню Ω, орієнтовану нормаллю $\overline{n}^0(M)$, називають поверхневий інтеграл

$$\boxed{\Pi_\Omega(\overline{a}) = \iint\limits_\Omega (\overline{a}(M), \overline{n}^0) d\sigma,}$$

Властивості потоку:

1) якщо $(\widehat{\overline{a}, \overline{n}^0}) < \dfrac{\pi}{2}$, то $\Pi > 0$ (у цьому разі потік вектора $\overline{a}$ йде з внутрішньої на зовнішній бік поверхні Ω);

2) якщо $(\widehat{\overline{a}, \overline{n}^0}) > \dfrac{\pi}{2}$, то $\Pi < 0$ (у цьому разі потік вектора $\overline{a}$ йде із зовнішнього на внутрішній бік поверхні Ω);

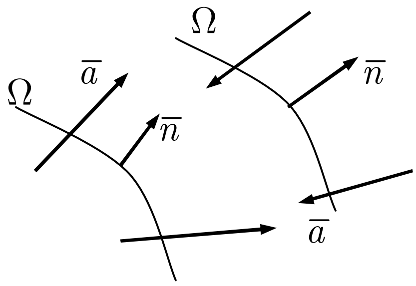


Рис. 19.3. Потік векторного поля

3) від зміни орієнтації поверхні знак потоку Π міняється на протилежний;

Для замкненої поверхні Ω:

4) якщо $\Pi = 0$, це означає що з тіла G, яке обмежене поверхнею Ω, витікає стільки ж рідини, скільки й втікає в нього;

5) якщо $\Pi > 0$, то рідини витікає більше, ніж втікає. Це означає, що всередині тіла G є *джерело* — місце де з'являється рідина;

6) якщо $\Pi < 0$, то рідини витікає з тіла менше, ніж втікає. Це означає, що всередині тіла G є *стік* — місце, це зникає рідина.

Приклад 19.1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Omega} z dx dy$, де Ω — верхній бік поверхні трикутника, утвореного перерізом площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами.

19.3. Дивергенція векторного поля

Розгляньмо векторне поле $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ і виділімо в ньому мале тіло G об'ємом V, обмежене замкненої поверхнею Ω. Відношення потоку вектора $\overline{a}$ через поверхню Ω до об'єму V:

$$\frac{\Pi_{\Omega}(\overline{a})}{V} = \frac{\iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0)}{V}$$

характеризує середню густину джерел або стоків у одиницю об'єму.

Означення 19.3. *Дивергенцією* (*розбіжністю*) вектора $\overline{a}$ в точці M називають границю середньої густини джерел або стоків, коли тіло G стягується в точку M і позначають

$$\boxed{\operatorname{div} \overline{a}(M) = \lim_{G \to M} \frac{\iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma}{V}.}$$

Це означення не зв'язано з системою координат у просторі — його називають інваріантним означенням дивергенції.

Властивості дивергенції:

1) якщо $\operatorname{div} \overline{a}(M) > 0$, то у точці M є джерела;

2) якщо $\operatorname{div} \overline{a}(M) < 0$, то у точці M є стоки;

3) якщо $\operatorname{div} \overline{a}(M) = 0$, то у точці M немає ані джерел, ані стоків.

Якщо у просторі $\mathbb{R}^3$ запроваджено ПДСК $Oxyz$ і $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$, де P, Q, R — гладкі функції, то дивергенцію можна обчислити за формулою

$$\boxed{\operatorname{div} \overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.}$$

Правила обчислення дивергенції:

1) $\operatorname{div}(\overline{a} + \overline{b}) = \operatorname{div} \overline{a} + \operatorname{div} \overline{b}$;

2) $\operatorname{div} \overline{c} = 0, \overline{c} = \overline{\text{const}}$;

3) $\operatorname{div}(\varphi \overline{a}) = \varphi \operatorname{div} \overline{a} + (\overline{a}, \operatorname{grad} \varphi), \varphi = \varphi(x, y, z)$;

4) $\operatorname{div}(\varphi \overline{c}) = (\overline{c}, \operatorname{grad} \varphi)$, де $\overline{c} = \overline{\text{const}}$.

Приклад 19.2. Знайти дивергенцію радіуса-вектора $\overline{r}$.

19.4. Формула Остроградського — Ґауса

Нехай Ω — поверхня, краєм (межею) якого є замкнена крива L. Один і той самий замкнений контур L може бути краєм нескінченної кількості поверхонь. Приміром, конуса, півсфери, частини площини, краєм якого є коло L.

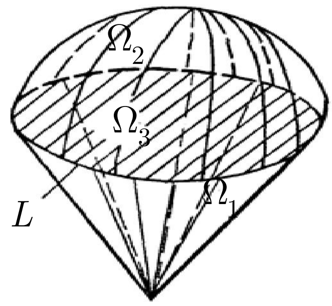


Рис. 19.4. Контур L обмежує різні поверхні

Обмежену поверхню, що не має краю, називають *замкненою*. Прикладами є сфера, еліпсоїд, поверхня куба, піраміди тощо.

Формула Остроградського — Ґауса зв'язує поверхневий інтеграл за зовнішнім боком замкненої поверхні з потрійним інтегралом за областю, обмеженою цією поверхнею.

Теорема 19.1 (Остроградського — Ґауса). Якщо $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ — векторне поле, координатні функції P, Q та R якого неперервні разом зі своїми першими частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ у замкненій області G, яка обмежена гладкою поверхнею Ω, то правдива *формула Остроградського — Ґауса*

$$\oiint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

де поверхневий інтеграл обчислюють за зовнішнім боком замкненої поверхні Ω.

►Розгляньмо циліндричну в напрямі осі Oz область G, обмежену:

знизу поверхнею Ω_1, яку задає рівняння $z = z_1(x, y)$,

зверху — поверхнею Ω_2, яку задає рівняння $z = z_2(x, y)$,

з боків — циліндричною поверхнею Ω_3 із твірними, паралельними осі Oz.

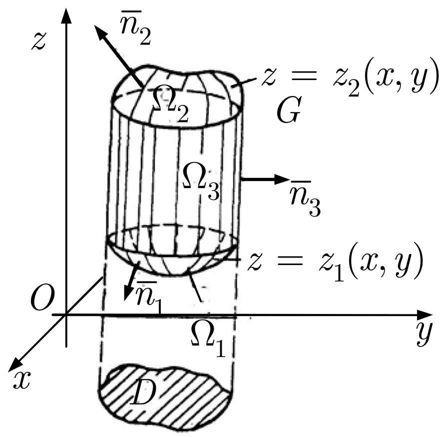


Рис. 19.5. Теорема Остроградського — Ґауса

Нехай D — проекція тіла G на площину Oxy, а $\overline{n}_1, \overline{n}_2$ та $\overline{n}_3$ — вектори зовнішньої нормалі до поверхонь Ω_1, Ω_2 та Ω_3. Розгляньмо

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint\limits_{D} R(x,y,z_1(x,y))dxdy.$$

Перший інтеграл можна записати як поверхневий інтеграл 2-го роду за верхнім боком поверхні, а другий інтеграл — як поверхневий інтеграл 2-го роду за нижнім боком поверхні або за верхнім боком поверхні, узятим із протилежним знаком:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Omega_1} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} R(x,y,z)dxdy,$$

де поверхневі інтеграли беруть за зовнішнім боком поверхні.

Оскільки $\overline{n}_3 = \alpha_3\overline{i} + \beta_3\overline{j} + 0\overline{k}$, то

$$\iint\limits_{\Omega_3} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_D (0\cdot\alpha_3 + 0\cdot\beta_3 + R\cdot 0)dxdy = 0.$$

Тому додаючи до правої частини рівності $\iint\limits_{\Omega_3} R(x,y,z)dxdy = 0$, дістанемо

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} R(x,y,z)dxdy,$$

де інтеграл береться за зовнішнім боком замкненої поверхні $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.

Так само для y-циліндричної і x-циліндричної областей можна одержати відповідні рівності:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} Q(x,y,z)dxdz,$$

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz.$$

Розглядаючи області G, які можна розбити на скінченну кількість циліндричних областей, дістаємо для них формулу Остроградського — Ґауса:

$$\oiint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \blacktriangleleft$$

Враховуючи означення потоку векторного поля теорему Остроградського — Ґауса можна сформулювати ще так:

Теорема Остроградського — Ґауса. Потік вектора $\overline{a}$ через зовнішній бік замкненої поверхні дорівнює потрійному інтегралові від дивергенції вектора за просторовою областю, обмеженою цієї поверхнею:

$$\boxed{\oiint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma = \iiint\limits_G \operatorname{div} \overline{a} dxdydz.}$$

Приклад 19.3. Обчислити інтеграл

$$\iint_{\Omega} (e^{2y} + x)dydz + (x - 2y)dzdx + (y^2 + 3z)dxdy,$$

де Ω — зовнішній бік поверхні кулі $(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 9$.

Приклад 19.4. Обчислити інтеграл

$$\iint_{\Omega} (x + y)dydz + (y - x)dzdx + (z - 2)dxdy,$$

де Ω — зовнішній бік частини конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, відтятої площиною $z = 1$.

Приклад 19.5. Знайти потік радіуса-вектора через будь-яку замкнену гладку поверхню (нормаль зовнішня).

19.5. Циркуляція векторного поля

Нехай у ДПСК означено векторне поле $\overline{a} = (P; Q; R)$.

Означення 19.4. *Циркуляцією* векторного поля $\overline{a}$ вздовж контуру L, орієнтованого вектором $\overline{\tau}^0$, називають криволінійний інтеграл

$$\boxed{\mathrm{C}_L(\overline{a}) = \oint_L (\overline{a}, d\overline{r}).}$$

Якщо $\overline{a}$ — вектор сили (силове поле), то циркуляція виражає роботу цієї сили за замкненим контуром L.

З'ясуймо фізичний зміст циркуляції, розглядаючи, зокрема, векторне поле $\overline{a} = \overline{a}(M)$ як поле $\overline{v} = \overline{v}(M)$ лінійних швидкостей рухомої рідини.

Помістимо в потік рідини коліщатко з лопатями, розташованими по його ободу — колу L. Частинки рідини, діючи на лопаті, утворюватимуть обертові моменти, сумарна дія яких може обертати коліщатко навколо осі $\overline{N}$, перпендикулярної до площини коліщатка, і яка проходить через його центр.

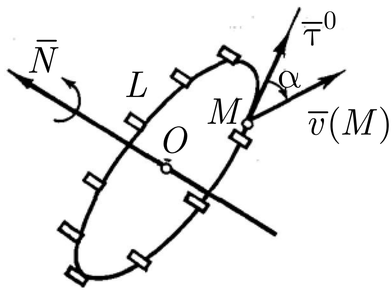


Рис. 19.6. Фізичний зміст циркуляції

Обертовий момент поля в кожній точці M характеризує проекція вектора $\overline{v}(M)$ на вектор $\overline{\tau}^0(M)$ дотичний до кола L:

$$\mathrm{pr}_{\overline{\tau}^0}\, \overline{v}(M) = (\overline{v}(M), \overline{\tau}^0).$$

Якщо підсумувати обертові моменти за всім контуром, то прийдемо до поняття циркуляції.

Приклад 19.6. Знайти циркуляцію поля $\overline{a} = x\overline{i} - 2z^2\overline{j} + y\overline{k}$ уздовж лінії перетину L циліндра $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ з площиною $z = 1$ (проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатної півосі осі Oz).

19.6. Ротор векторного поля

Нехай Ω — орієнтована плоска ділянка з вектором нормалі $\overline{n}^0$, а L — її край із вказаним напрямом обходу. Відношення циркуляції вектора $\overline{a}$ до площі S ділянки

$$\frac{\mathrm{C}_L(\overline{a})}{S} = \frac{\oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r})}{S}$$

характеризує середню густину циркуляції в одиниці площі.

Означення 19.5. *Густиною циркуляції* $C(M)$ векторного поля $\overline{a}$ в точці M у напрямі вектора $\overline{n}^0$ називають

$$\boxed{C(M) = \lim_{M \to \Omega} \frac{\oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r})}{S}.}$$

де ділянка Ω стягується в точку $M \in \Omega$.

Означення 19.6. *Ротором* векторного поля $\overline{a}$ називають вектор $\operatorname{rot}\overline{a}$, проекція якого на напрям нормалі $\overline{n}^0$ до ділянки Ω дорівнює густині циркуляції вектора $\overline{a}$ в заданій точці M у напрямі вектора $\overline{n}^0$:

$$\boxed{(\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0)\,|_M = \operatorname{pr}_{\overline{n}^0} \operatorname{rot}\overline{a}(M) = C(M).}$$

Ротор векторного поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ у ПДСК знаходять за формулою:

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.}$$

З'ясуймо фізичний зміст ротора на прикладі поля швидкостей точки, що обертається навколо деякої осі. З механіки відомо, що лінійна швидкість $\overline{v}$ пов'язана з кутовою швидкістю $\overline{\omega}$ як

$$\overline{v} = [\overline{\omega}, \overline{r}],$$

де $\overline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \overline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ — радіус-вектор точки M. Маємо

$$\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overline{i}(z\omega_y - y\omega_z) - \overline{j}(z\omega_x - x\omega_z) + \overline{k}(y\omega_x - x\omega_y).$$

Звідси

$$\operatorname{rot}\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} = 2\omega_x\overline{i} + 2\omega_y\overline{j} + 2\omega_z\overline{k} = 2\overline{\omega}.$$

Тобто ротор швидкості $\overline{v}$ точки, що обертається навколо осі відмінний від нуля і дорівнює подвоєній кутовій швидкості обертання $\overline{\omega}$.

Отже, відмінний від нуль-вектора вектор $\operatorname{rot}\overline{a}$ характеризує обертання векторного поля $\overline{a}$.

Правила обчислення ротора.

1) $\operatorname{rot}(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) = \alpha\operatorname{rot}\overline{a} + \beta\operatorname{rot}\overline{b}$, де $\alpha, \beta = \mathrm{const}$;

2) $\operatorname{rot}\overline{c} = \overline{0}$, де $\overline{c} = \overline{\mathrm{const}}$;

3) $\operatorname{rot}(\varphi\overline{a}) = \varphi\operatorname{rot}\overline{a} + [\operatorname{grad}\varphi, \overline{a}], \varphi = \varphi(x, y, z)$.

19.7. Формула Стокса

Формула Стокса зв'язує криволінійний інтеграл за замкненою просторовою кривою L із поверхневим інтегралом за поверхнею Ω, краєм якої є L.

Теорема 19.2. (Стокса). Нехай L — замкнена кусково-гладка орієнтована крива у просторі й Ω — гладка поверхня, краєм якої є L. Якщо на поверхні Ω задано векторне поле $\overline{a} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$, координатні функції P, Q та R якої неперервні разом зі своїми першими частинними похідними на цій поверхні, то правдива *формула Стокса*

$$\boxed{\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Omega (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma,}$$

де обхід контуру відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця вектора нормалі.

Зауважимо, що у формулі Стокса вибір поверхні Ω із краєм L не грає жодної ролі. Важлива лише орієнтація її у просторі.

Ураховуючи означення циркуляції і потоку векторного поля, твердження можна переформулювати ще так:

Теорема Стокса. Циркуляція векторного поля вздовж контуру дорівнює потоку ротора цього поля через поверхню, обмежену цим контуром.

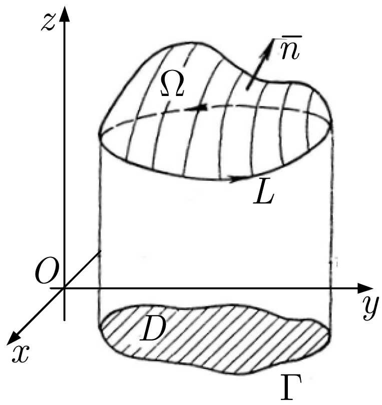


Рис. 19.7. Теорема Стокса

Приклад 19.7. Використовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл

$$\oint\limits_L (x+3y+2z)dx + (2x+z)dy + (x-y)dz,$$

де Γ — контур трикутника ABC з вершинами $A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;1)$ (контур обходиться проти годинникової стрілки), якщо дивитись з осі Oz.

Приклад 19.8. Обчислити інтеграл

$$\oint\limits_L (z^2-x^2)dx + (x^2-y^2)dy + (y^2-z^2)dz$$

за контуром $(z>0):\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=z^2, \end{cases}$ який обходиться проти годинникової стрілки.

Лекція 20. Спеціальні типи векторних полів. Оператор Гамілтона

20.1. Соленоїдальне поле та його властивості

Означення 20.1. Векторне поле $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ називають *соленоїдальним (трубчатим)* у деякій області G, якщо

$$\boxed{\operatorname{div}\overline{a}(M) = 0,\ \forall M \in G.}$$

Прикладами соленоїдальних полів є магнітне поле, створене прямолінійним провідником, уздовж якого тече електричний струм, поле лінійних швидкостей рухомого твердого тіла, поле лінійних швидкостей стаціонарної течії нестисливої рідини, що не має джерел і стоків тощо.

Соленоїдальне поле характеризується тим, що не має в області ані джерел, ані стоків.

Властивості соленоїдальних полів:

1) потік вектора $\overline{a}(M)$ через будь-яку замкнену поверхню Ω дорівнює нулеві;

2) (*принцип збереження інтенсивності векторної трубки*) потоки соленоїдального векторного поля через різні перерізи векторної трубки рівні між собою;

3) силові лінії не можуть ані починатись, ані закінчуватись усередині поля. Вони або замкнені, або починаються і закінчуються на межі поля, або мають нескінченні гілки (у разі необмеженого поля);

4) в однозв'язній області потік вектора $\overline{a}(M)$ через будь-яку поверхню Ω, що напинається на замкнений контур L, не залежить від вигляду цієї поверхні, а лише від самого контуру L.

Приклад 20.1. Обчислити дивергенцію напруженості поля точкового заряду q, тобто $\overline{E} = q\dfrac{\overline{r}}{|\overline{r}|^3}$. ($\operatorname{div}\overline{E} = 0$, тобто в усіх точках, де означений вектор $\overline{E}$ не має ані джерел, ані стоків; у точці де розміщено заряд q $\left|\overline{r}\right| = 0$ і вектор $\overline{E}$ не означений).

20.2. Потенціальні векторні поля

Означення 20.2. Векторне поле $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ називають *потенціальним (безвихровим)* у деякій області G, якщо

$$\boxed{\operatorname{rot}\overline{a}(M) = \overline{0},\ \forall M \in G.}$$

Згідно з означенням ротора, умова рівносильна рівностям

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Приклади потенціальних полів: магнітне поле, створене рухомим прямолінійним провідником, гравітаційне поле, електричне поле напруженості точкового заряду тощо.

Правдива

Теорема 20.1. Нехай в однозв'язній області обсягу G задано векторне поле $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$, де P, Q і R — гладкі функції. Поле $\overline{a}$ є потенціальним в обсягу G тоді й лише тоді, коли існує двічі неперервно диференційовна скалярна функція $u = u(x, y, z)$ така, що

$$\boxed{\overline{a} = \operatorname{grad} u.}$$

Означення 20.3. Функцію $u = u(x, y, z)$, що справджує в області G рівність

$$\overline{a} = \operatorname{grad} u,$$

називають *потенціальною функцією* або *потенціалом* поля $\overline{a}$.

Співвідношення $\overline{a} = \operatorname{grad} u$ рівносильно трьом скалярним рівностям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R,$$

що є диференціальними рівняннями для визначення потенціалу $u = u(x, y, z)$.

Потенціал поля визначається неоднозначно, з точністю до довільного доданку. Справді, якщо u — потенціал поля, то

$$\overline{a} = \operatorname{grad} u = \operatorname{grad}(u + C),$$

де C — довільна стала. Тобто $u + C$ — також потенціал поля $\overline{a}$.

Якщо векторне поле $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ потенціально в однозв'язній області G, то

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = u(N) - u(M),$$

де u — потенціал поля $\overline{a}$; M, N — відповідно початкова й кінцева точки кривої $L \subset G$. Звідси випливає, що якщо L — замкнений контур, циркуляція вектора $\overline{a}(M)$ уздовж нього дорівнює нулеві.

Правдиве й обернене твердження: якщо циркуляція вектора $\overline{a}$ за будь-яким замкненим контуром $L \subset G$ дорівнює нулеві, поле $\overline{a}$ потенціальне в області G.

Приклад 20.2. Перевірити потенціальність поля

$$\overline{a} = (2xy + z)\overline{i} + (x^2 - 2y)\overline{j} + x\overline{k}$$

і знайти його потенціал.

20.3. Гармонічне поле

Означення 20.4. Векторне поле $\overline{a} = \overline{a}(M)$ називають *гармонічним*, якщо воно є соленоїдальним і потенціальним одночасно, тобто

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div} \overline{a}(M) = 0, \\ \operatorname{rot} \overline{a}(M) = \overline{0}, \end{cases} \forall M \in G.}$$

Якщо поле потенціальне, то $\overline{a} = \operatorname{grad} U$. Його потенціал справджує диференціальне рівняння в частинних похідних — *рівняння Лапласа*

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U = 0.}$$

20.4. Оператор Гамілтона

Вже розглянуто три основні операції теорії поля (векторного аналізу): обчислення $\operatorname{grad} u$ для скалярного поля $u = u(x, y, z)$ і $\operatorname{div} \overline{a}$ та $\operatorname{rot} \overline{a}$ для векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(M)$. Ці операції можуть бути записані у простішому вигляді з допомогою символічного оператору ∇ («набла»):

$$\boxed{\nabla = \overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.}$$

1. Якщо $u = u(x, y, z)$ — скалярна диференційовна функція, то за правилом множення вектора на скаляр дістанемо

$$\nabla u = \left(\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k} = \operatorname{grad} u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla u = \operatorname{grad} u.}$$

2. Якщо

$$\overline{a} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k},$$

де P, Q, R — диференційовні функції, то за формулою для знаходження скалярного добутку дістанемо

$$(\nabla, \overline{a}) = \left(\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \overline{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(\nabla, \overline{a}) = \operatorname{div} \overline{a}.}$$

3. Обчислюючи векторний добуток $[\nabla, \overline{a}]$, дістанемо

$$[\nabla, \overline{a}\,] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \overline{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{[\nabla, \overline{a}] = \operatorname{rot} \overline{a}.}$$

Для сталої функції $u = c$ дістанемо

$$\nabla c = 0,$$

а для сталого вектора $\overline{c}$ матимемо

$$\boxed{(\nabla, \overline{c}) = 0, [\nabla, \overline{c}] = \overline{0}.}$$

Зауваження 20.1.
1. Умовились вважати, що оператор ∇ діє на всі величини, написаних за ним. У цьому розумінні, приміром
$(\nabla, \overline{a}) \neq (\overline{a}, \nabla)$,
оскільки

$$(\nabla, \overline{a}) = \operatorname{div} \overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

$$(\overline{a}, \nabla) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}.$$

2. Застосовуючи оператор ∇ до добутку яких-небудь величин, використовують правило диференціювання добутку.
3. Щоб відзначити той факт, що «набла» не діє на величину, що входить у склад складної формули, цю величину відмічають індексом c (const), який у підсумку випускають.
4. Використовуючи формалізм дій з оператором ∇ як з вектором, треба пам'ятати, що ∇ не є звичайним вектором — він не має ані довжини, ані напрямку, так що, приміром, вектор $[\nabla, \overline{a}]$ не буде, взагалі кажучи, перпендикулярним до вектора $\overline{a}$.

Приклад 20.3. Нехай $u = u(x, y, z)$ — скалярна диференційовна функція, $\overline{a} = \overline{a}(x, y, z)$ — векторна диференційовна функція. Довести, що

$$\operatorname{div}(u\overline{a}) = u \operatorname{div} \overline{a} + (\overline{a}, \operatorname{grad} u).$$

❍ Перепишімо ліву частину в символічному вигляді

$$\operatorname{div}(u\overline{a}) = (\nabla, u\overline{a}) = (\nabla, u_c\overline{a}) + (\nabla, u\overline{a}_c) =$$

$$= u_c(\nabla, \overline{a}) + (\nabla u, \overline{a}_c) = u \operatorname{div} \overline{a} + (\overline{a}, \operatorname{grad} u). \bullet$$

Приклад 20.4. Довести правдивість формули

$$\operatorname{div}[\overline{a}, \overline{b}] = (\overline{b}, \operatorname{rot} \overline{a}) - (\overline{a}, \operatorname{rot} \overline{b}).$$

❍ Маємо

$$\operatorname{div}[\overline{a}, \overline{b}] = (\nabla, [\overline{a}, \overline{b}]) = (\nabla, [\overline{a}, \overline{b}_c]) + (\nabla, [\overline{a}_c, \overline{b}]) =$$

$$= (\nabla, [\overline{a}, \overline{b}_c]) - (\nabla, [\overline{b}, \overline{a}_c]) = ([\nabla, \overline{a}], \overline{b}_c) - ([\nabla, \overline{b}], \overline{a}_c) =$$

$$= (\operatorname{rot} \overline{a}, \overline{b}) - (\operatorname{rot} \overline{b}, \overline{a}). \bullet$$

20.5. Диференціальні операції 2-го порядку. Оператор Лапласа

Диференціальні операції 2-го порядку дістаємо в результаті дворазового застосування оператора ∇.

1. Нехай задано скалярне поле $u = u(x, y, z)$. У цьому полі оператор ∇ породжує векторне поле

$$\nabla u = \operatorname{grad} u.$$

У векторному полі $\operatorname{grad} u$ можна означити дві операції:

$$\boxed{(\nabla, \nabla u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u,}$$

що приводить до скалярного поля, і

$$\boxed{[\nabla, \nabla u] = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u,}$$

що приводить до векторного поля.

2. Нехай задано векторне поле $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$. Тоді оператор ∇ породжує скалярне поле

$$(\nabla, \bar{a}) = \operatorname{div} \bar{a}.$$

У скалярному полі $\operatorname{div} \bar{a}$ оператор ∇ породжує векторне поле

$$\boxed{\nabla(\nabla, \bar{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a}.}$$

3. У векторному полі $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ оператор ∇ породжує також векторне поле

$$[\nabla, \bar{a}] = \operatorname{rot} \bar{a}.$$

Застосовуючи до цього поля знову оператор ∇, дістанемо:

а) скалярне поле

$$\boxed{(\nabla, [\nabla, \bar{a}]) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a},}$$

б) векторне поле

$$\boxed{[\nabla, [\nabla, \bar{a}]] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}.}$$

Виберімо у просторі ПДСК $Oxyz$ і розгляньмо кожну операцію 2-го порядку детальніше.

1. Нехай функція $u(x, y, z)$ має неперервні другі частинні похідні за x, y, z, дістаємо

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = \left(\bar{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\bar{k} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Символ

$$\boxed{\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

називають *оператором Лапласа* або *лапласіаном*. Його можна записати як скалярний добуток оператора Гамілтона ∇ на самого себе

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \nabla^2.$$

Скалярне поле $u(x, y, z)$, що справджує умову $\Delta u = 0$, є гармонічним.

2. Нехай функція $u(x, y, z)$ має неперервні частинні похідні 2-го порядку включно. Тоді

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} u \equiv \bar{0}.}$$

Справді,

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla]u = \overline{0},$$

оскільки $[\nabla, \nabla] = \overline{0},$ як векторний добуток двох однакових «векторів».

3. Нехай задано векторне поле

$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},$$

координати якого P, Q, R мають неперервні частинні похідні 2-го порядку. Тоді маємо

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a} = \nabla(\nabla, \overline{a}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\overline{j} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\overline{k} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\overline{i} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\overline{k}.$$

4. За тих же умов, маємо

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a} = 0.}$$

Ці співвідношення вже було доведено безпосереднім обчисленням. Доведімо його, скориставшись властивістю оператора ∇.

Маємо

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a} = (\nabla, [\nabla, \overline{a}]) = (\overline{a}, [\nabla, \nabla]) = 0,$$

оскільки $[\nabla, \nabla] = 0$ як векторний добуток двох однакових «векторів».

5. Нарешті, за тих самих умов,

$$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a} - \Delta\overline{a},}$$

де для вектора $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ вираз $\Delta\overline{a}$ треба розуміти як

$$\Delta\overline{a} = \Delta P\overline{i} + \Delta Q\overline{j} + \Delta R\overline{k}.$$

Зведімо всі можливі диференціальні операції 2-го порядку до таблиці:

	Скалярне поле $u(x,y,z)$	Векторне поле $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$	
	grad	div	rot
grad		$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a}$	
div	$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$		$\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a} = 0$
rot	$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \overline{0}$		$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{a}$

3

Диференціальні рівняння

Лекція 21. Диференціальні рівняння 1-го порядку

21.1. Основні поняття

Розв'язуючи різноманітні задачі математики, фізики, хімії та інших наук часто використовують математичні моделі, записані за допомогою рівнянь, що зв'язують незалежну змінну, шукану функцію та її похідні:

$$\boxed{F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.}$$

Такі рівняння називають *диференціальними*.

Розв'язком диференціального рівняння називають функцію, яка після підставлення в рівняння перетворює його на тотожність. Якщо функцію, яка справджує диференціальне рівняння задано неявно співвідношенням $\Phi(x, y) = 0$ або параметрично, то кажуть про *інтеграл рівняння*.

Процес розв'язування диференціального рівняння називають його *інтегруванням*, а графік розв'язку диференціального рівняння — *інтегральною кривою*.

Приміром, розв'язком найпростішого диференціального рівняння

$$y' = f(x)$$

є функція $y = F(x)$ — первісна для функції $f(x)$.

Найвищий порядок похідної, яка входить у диференціальне рівняння, називають *порядком* рівняння.

Приміром, $y'' + y' - xy^5 = 0$ — диференціальне рівняння 2-го порядку.

21.2. Задача про радіоактивний розпад

Відомо, що швидкість радіоактивного розпаду пропорційна кількості x речовини, яка ще не розпалася. Треба знайти залежність x від часу t, якщо в початковий момент $t = t_0$ в наявності було $x = x_0$ речовини.

Диференціальне рівняння, яке описує процес розпаду:

$$\boxed{x' = -kx.}$$

Тут k — додатну сталу розпаду вважають відомою, знак «—» указує на зменшення кількості речовини x під час зростання t.

Початкову умову задає рівність

$$x(t_0) = x_0.$$

Можна показати, що розв'язком диференціального рівняння є функція

$$x(t) = Ce^{-kt},$$

де C — довільна стала, яку можна визначити підставляючи початкову умову.

Розв'язком диференціального рівняння, який справджує початкову умову є функція

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}.}$$

Зауважимо, що будь-який процес (не лише радіоактивний розпад), під час якого швидкість розпаду пропорційна кількості речовини, що ще не прореагувала, описується рівнянням $x' = -kx$, яке є математичною моделлю процесу.

21.3. Диференціальні рівняння 1-го порядку

Розгляньмо диференціальне рівняння 1-го порядку

$$\boxed{F(x, y, y') = 0.}$$

Якщо в цьому рівнянні вдається виразити похідну y' через x та y, то дістанемо рівняння

$$\boxed{y' = f(x, y),}$$

розв'язане щодо похідної.

Підставляючи

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

і розглядаючи символ похідної як відношення диференціалів, дістанемо диференціальне рівняння у *диференціальній формі*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Leftrightarrow dy = f(x, y)dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow dy - f(x, y)dx = 0$$

або рівняння загальнішого вигляду

$$\boxed{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.}$$

Два диференціальних рівняння

$$F_1(x, y, y') = 0, F_2(x, y, y') = 0$$

називають *еквівалентними* в деякій області D змінювання величин x, y, y', якщо будь-який розв'язок $y(x) \in D$ одного з цих рівнянь є розв'язком другого рівняння і навпаки. Під час перетворення диференціальних рівнянь треба слідкувати за тим, щоб перетворене рівняння було еквівалентне початковому.

Зауважимо, що множина розв'язків диференціального рівняння зазвичай нескінченна.

Приміром, диференціальне рівняння

$$y' = 2x$$

має розв'язком будь-яку функцію $y = x^2 + C$, де C — довільна стала.

21.4. Геометричний зміст диференціального рівняння

Розгляньмо диференціальне рівняння 1-го порядку

$$y' = f(x,y),$$

де функція $f(x,y)$ означена і неперервна в області D змінних x та y. Нехай $y = \varphi(x)$ є розв'язком цього рівняння в інтервалі $(a;b)$.

Оскільки функція $\varphi(x)$ має в кожній точці інтервалу $(a;b)$ похідну, то графік функції $y = \varphi(x)$ має в кожній своїй точці дотичну, з кутом нахилу α. В кожній точці $M(x;y)$ інтегральної кривої виконано співвідношення

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = f(x,y).}$$

Отже, *диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ виражає залежність між координатами кожної точки M інтегральної кривої і кутовим коефіцієнтом її дотичної в точці M.*

Рівність $\operatorname{tg}\alpha = f(x,y)$ у кожній точці $M(x;y)$ визначає одиничний вектор

$$\boxed{\bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\sin\alpha.}$$

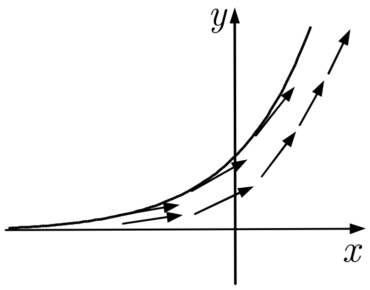


Рис. 21.2. Поле напрямів диференціального рівняння

Множина таких векторів утворює *поле напрямків* диференціального рівняння.

Будь-яка інтегральна крива (графік розв'язку диференціального рівняння) має властивість: *напрям її дотичної в певній точці збігається з напрямом поля у цій точці*.

21.5. Частинний і загальний розв'язок диференціального рівняння

Щоб з нескінченної множини розв'язків диференціального рівняння вилучити певний розв'язок, треба підкорити його деякій додатковій умові.

Означення 21.1. Розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y' = f(x,y),$$

що справджує *початкову умову*

$$\boxed{y(x_0) = y_0}$$

називають *частинним розв'язком* диференціального рівняння, який справджує цю початкову умову.

Частинний розв'язок, який заданий неявно співвідношенням

$$\Phi(x, y) = 0,$$

називають *частинним інтегралом*.

Геометрично початкова умова означає, що задають точку $M_0(x_0; y_0)$, через яку повинна проходити шукана інтегральна крива.

Означення 21.2. Сукупність функцій

$$\boxed{y = y(x, C),}$$

де C — довільна стала, називають *загальним розв'язком* диференціального рівняння

$$y' = f(x, y),$$

якщо:

1) функція $y = y(x, C)$ є розв'язком цього ДР для будь-якого значення C;

2) для будь-якої початкової умови $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$ таке, що функція $y = y(x, C_0)$ справджує цю початкову умову.

Загальний розв'язок, який заданий неявно співвідношенням

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок є сукупністю інтегральних кривих, залежних від одного параметра. Частинний розв'язок є однією з кривих цієї сукупності, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

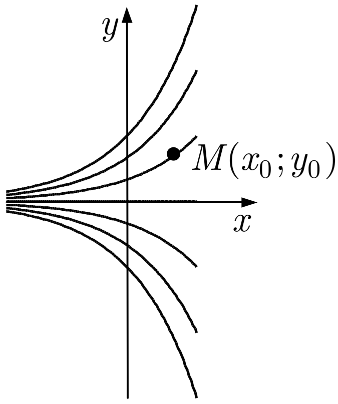


Рис. 21.3. Загальний і частинний розв'язки

21.6. Задача Коші для диференціального рівняння 1-го порядку

Означення 21.3. Задачу відшукання частинного розв'язку диференціального рівняння

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

який справджує початкову умову

$$\boxed{y(x_0) = y_0}$$

називають *задачею Коші* (*початковою задачею*) для диференціального рівняння.

Теорема 21.1 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші). Якщо в диференціальному рівняння

$$y' = f(x,y)$$

функція $f(x,y)$ та її частина похідна $f_y'(x)$ неперервні в деякій області D, яка містить точку $M_0(x_0;y_0)$, то існує єдиний розв'язок $y=\varphi(x)$ цього рівняння, який справджує початкову умову

$$\varphi(x_0)=y_0.$$

Геометрично це означає, що через точку $M_0(x_0;y_0)$ проходить одна і лише одна інтегральна крива рівняння.

Зауважимо, що теорема 21.1 має локальний характер: вона гарантує існування єдиного розв'язку диференціального рівняння лише в досить малому околі точки x_0.

Приклад 21.1. Довести, що будь-яка задача Коші для диференціального рівняння $y' = x + y$ має єдиний розв'язок.

❍Приміром, у рівнянні $y' = x + y$ функція $f(x,y) = x + y$ означена і неперервна в усіх точках площини Oxy і має скрізь $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1.$ На підставі теореми 21.1 через кожну точку $(x_0;y_0)$ площини Oxy проходить єдина інтегральна крива цього рівняння.●

Означення 21.4. Розв'язок $y = \Psi(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x,y)$ називають *особливим*, якщо в кожній його точці порушується властивість єдиності, тобто через кожну його точку $(x_0;y_0)$ крім цього розв'язку проходить і інший розв'язок рівняння, відмінний від $y = \Psi(x)$ у як завгодно малому околі точки $(x_0;y_0)$.

Лекція 22. Розв'язання диференціальних рівнянь 1-го порядку

22.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння вигляду

$$\boxed{f_1(y)dy = f_2(x)dx}$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними*. Тут $f_1(y), f_2(x)$ — відомі неперервні функції.

Розв'яжімо це рівняння. Нехай $F_1(y)$ та $F_2(x)$ — первісні функції $f_1(y)$ і $f_2(y)$ відповідно. Інтегруючи обидві частини рівняння, одержимо його загальний інтеграл:

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx \Leftrightarrow F_1(y) = F_2(x) + C;$$
$$F_1(y) - F_2(x) = C,$$

де C — довільна стала.

Приміром, зінтегруємо диференціальне рівняння $xdx + ydy = 0$.

$$ydy = -xdx; \int ydy = -\int xdx;$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = C,\ C = \text{const}.}$$

Інтегральними кривими диференціального рівняння для $C \geq 0$ є кола з центром у початку координат радіусом $\sqrt{C}$.

Рівняння вигляду

$$\boxed{f_1(x)\varphi_1(y)dx = f_2(x)\varphi_2(y)dy,}$$

у якому коефіцієнти при диференціалах розкладаються на множники, що залежать лише від x і лише від y, називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*, оскільки ділячи обидві частини рівняння на $\varphi_1(y)f_2(x) \neq 0$ в ньому можемо відокремити змінні:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy.$$

Ділення на $\varphi_1(y)f_2(x)$ можна призвести до втрати розв'язків вигляду

$$x = \alpha, y = \beta,$$

де $f_2(\alpha) = 0, \varphi_1(\beta) = 0$.

Приклад 22.1. Зінтегрувати рівняння $(1 + y^2)dx = xdy$.

Деякі рівняння за допомогою заміни змінної можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Приміром, рівняння вигляду

$$\boxed{y' = f(ax + by + c),}$$

де $f(z)$ — неперервна функція, $a, b, c = \text{const}$, підстановою

$$\boxed{z = ax + by + c}$$

перетворюється на диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 22.2. Зінтегрувати рівняння $y' = \cos(x - y)$.

22.2. Задача про динаміку популяції

Рівняння

$$\boxed{x' = kx, k > 0,}$$

що відрізняється лише знаком правої частини від рівняння радіоактивного розпаду, описує лавиноподібний процес розмноження, приміром «розмноження» нейтронів у ланцюгових ядерних реакціях або розмноження бактерій у припущенні, що швидкість їхнього розмноження пропорційна наявній кількості бактерій.

Розв’яжімо це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow \frac{dx}{x} = kdt;$$

$$\int \frac{dx}{x} = k\int dt; \ln\left|x\right| = kt + \ln\left|C\right|, C \neq 0 \Rightarrow x(t) = Ce^{kt}.$$

Але обмеження на C можна зняти, оскільки $x \equiv 0$ є розв’язком. Отже, загальний розв’язок рівняння

$$x(t) = Ce^{kt}, C = \text{const}.$$

Знайдімо тепер частинний розв’язок, який справджує початкову умову

$$x(t_0) = x_0.$$

— тобто розв’яжімо задачу Коші для диференціального рівняння:

$$x_0 = x(t_0) = Ce^{kt_0} \Rightarrow C = x_0 e^{-kt_0}.$$

Отже,

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}.}$$

Рівняння радіоактивного розпаду і рівняння розмноження можна об’єднати в одне диференціальне рівняння

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky, k = \text{const},}$$

що дає найпростішу математичну модель динаміки популяцій (сукупностей особин того чи іншого виду рослинних або тваринних організмів). Тут

$$k = m - n,$$

де m — коефіцієнт відносної швидкості народжуваності, а n — коефіцієнт відносної швидкості вмирання. Але сталі відносні швидкості не можливі для великих популяцій. Справді, велика кількість членів популяції призводить до зменшення відповідних ресурсів, що знижує швидкість народжуваності і збільшує швидкість умирання.

Узагальненням записаного рівняння динаміки популяції є *логістичне рівняння*

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \alpha(A - y)y, \alpha, A = \text{const},}$$

яке є фундаментальним у демографії і в математичній теорії екології, і математично описує, приміром, поширення чуток, хвороб тощо.

Загальний розв'язок цього рівняння

$$y = \frac{ACe^{A\alpha t}}{1 + Ce^{A\alpha t}}.$$

Частинний розв'язок, який справджує початкову умову $y(0) = y_0$:

$$\boxed{y(t) = \frac{A}{1 + \left(\frac{A}{y_0} - 1\right)e^{-A\alpha t}}.}$$

22.3. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння 1-го порядку вигляду

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

називають *однорідним щодо змінних* x та y.

Змінні в однорідному рівнянні відокремлюють, запроваджуючи нову функцію

$$\boxed{u(x) = \frac{y}{x}} \Leftrightarrow \boxed{y = u(x)x, \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.}$$

Справді,

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

— дістали рівняння з відокремленими змінними.

Приклад 22.3. Зінтегрувати рівняння $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

До однорідного диференціального рівняння зводиться рівняння вигляду

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1},}$$

де a, b, c, a_1, b_1, c_1 — сталі.

Якщо $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то запроваджують нові змінні за формулами:

$$\boxed{x = t + \alpha, y = s + \beta,}$$

де сталі α, β треба підібрати.

Якщо $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$ то запроваджують нову функцію

$$\boxed{z = ax + by.}$$

Приклад 22.4. Зінтегрувати рівняння $y' = -\dfrac{x+y-2}{x-y+4}$.

22.4. Лінійні диференціальні рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку називають рівняння вигляду

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x).}$$

Теорема 22.1. Якщо функції $p(x)$ і $q(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, то лінійне диференціальне рівняння

$$y' + p(x)y = q(x)$$

завжди має єдиний розв'язок, який справджує початкову умову

$$y\,|_{x=x_0} = y_0,$$

де точка $(x_0;y_0)$ належить смузі $a < x < b,\ -\infty < y < +\infty$.

► Розв'яжімо диференціальне рівняння щодо похідної y':

$$y' = -p(x)y + q(x),$$

де права частина

$$f(x,y) = -p(x)y + q(x)$$

справджує всім умовам теореми 21.1: вона неперервна за сукупністю змінних x та y і має обмежену частинну похідну

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$$

у вказаній смузі. Звідси випливає правдивість теореми. ◄

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

інтегрують:

1) *методом варіації довільної сталої* (*методом Лаґранжа*);

2) *методом Бернуллі* (Якоба).

1. Метод варіації довільної сталої (метод Лаґранжа). Лінійному неоднорідному диференціальному рівнянню

$$y' + p(x)y = q(x)$$

відповідає лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$\boxed{y' + p(x)y = 0,}$$

у якому відокремлюються змінні:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y; \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx; \;\; \ln\left|y\right| = -\int p(x)dx + \ln\left|C\right|, C \neq 0;$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, C \neq 0.$$

Під час ділення на y, був втрачений розв'язок $y = 0$, який відповідає нульовому значенню сталої C.

Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння

$$\boxed{y_{\text{заг. одн.}} = Ce^{-\int p(x)dx},}$$

де $C = \mathrm{const}$.

Згідно з гіпотезою Лаґранжа, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$\boxed{y_{\text{заг. неодн.}} = C(x)e^{-\int p(x)dx},}$$

де $C(x)$ — невідома функція («варіюють довільну сталу»).

Справді,

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)).$$

Отже,

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + q(x) = 0.$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x); \frac{dC(x)}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx};$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + \tilde{C}.$$

Отже,

$$\boxed{y_{\text{заг. неодн.}} = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + \tilde{C}\right).}$$

Звідси випливає

Теорема 22.2 (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР). Загальний розв'язок неоднорідного ЛДР дорівнює сумі загального розв'язку однорідного ЛДР і частинного розв'язку неоднорідного ЛДР.

$$\boxed{y_{\text{заг. неодн.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}.}$$

2. Метод Бернуллі. Полягає в тому, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння шукають у вигляді

$$\boxed{y = u(x)v(x),}$$

де $u(x), v(x)$ — невідомі функції, одну з яких можна вибирати довільно.

Справді, вибираємо

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = q(x);$$

$$\underbrace{u'(x)v(x) + u(x)(v'(x) + p(x)v(x)) = q(x)}_{\text{вибираємо } v(x) \text{ так, щоб вираз в дужках став рівним нулеві}} \Rightarrow \begin{cases} v'(x) + p(x)v(x) = 0, \\ u'(x)v(x) = q(x). \end{cases}$$

Отже, щоб розв'язати лінійне диференціальне рівняння треба зінтегрувати два диференціальних рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 22.5. Розв'язати задачу Коші $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos^3 x}, y(0) = 0.$

22.5. Рівняння Бернуллі (Якоба)

Рівнянням Бернуллі називають диференціальне рівняння вигляду

$$\boxed{y' + p(x) = q(x)y^{\alpha}, \alpha = \mathrm{const}.}$$

При $\alpha = 1$ маємо однорідне лінійне рівняння

$$y' + [p(x) - q(x)]y = 0.$$

При $\alpha = 0$ — неоднорідне лінійне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Рівняння Бернуллі інтегрують:

1) *методом Лагранжа*, розв'язуючи спершу відповідне лінійне однорідне рівняння $y' + p(x)y = 0$;

2) *методом Бернуллі*, шукаючи загальний розв'язок у вигляді $y = u(x)v(x)$.

Приклад 22.6. Зінтегрувати рівняння $y' + 2xy = 2xy^2$.

22.6. Рівняння в повних диференціалах

Диференціальне рівняння

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

називають *рівнянням у повних диференціалах*, якщо ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ двох незалежних функцій x та y, тобто

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Тоді загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$u(x,y) = C.$$

Теорема 22.3. Диференціальна форма $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ буде повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ двох незалежних змінних x та y, тоді й лише тоді, коли

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.}$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння у повних диференціалах

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C.}$$

Приклад 22.7. Зінтегрувати диференціальне рівняння

$$\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy.$$

Лекція 23. Диференціальні рівняння вищих порядків

23.1. Задача Коші

Розгляньмо диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане щодо старшої похідної

$$\boxed{y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}).}$$

Щоб з нескінченної множини розв'язків цього диференціального рівняння вилучити певний розв'язок, треба підкорити його деяким додатковим умовам.

Означення 23.1. Розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}),$$

що справджує *початкові умови*

$$\boxed{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0',\dots,y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},}$$

називають *частинним розв'язком* диференціального рівняння, який справджує ці початкові умови.

Означення 23.2. Сукупність функцій

$$\boxed{y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n),}$$

де C — довільна стала, називають *загальним розв'язком* диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

якщо:

1) функція $y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ є розв'язком цього ДР для будь-яких значень сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$;

2) для будь-яких початкових умов

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

існує єдиний набір значень $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$, такий, що функція $y = y(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$ справджує ці початкові умові.

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку полягає в знаходженні розв'язку диференціального рівняння, який справджує n початкових умов. Приміром, геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння 2-го порядку

$$y'' = f(x, y, y'),$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$$

полягає в тому, що з множини інтегральних кривих, які проходять через точку $M_0(x_0; y_0)$ треба вибрати криву, що має заданий кутовий коефіцієнт дотичної в точці M_0, рівний y_0'.

Теорема 23.1 (існування і єдиності розв'язку задачі Коші). Якщо в задачі Коші для диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

з початковими умовами:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ та її частинні похідні $f_y', f_{y'}', \dots, f_{y^{(n-1)}}'$ неперервні в деякій області D, то для будь-якої точки $M_0(x_0; y_0; y_0'; \dots; y_0^{n-1}) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші.

23.2. Рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку

1. Рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)} = f(x),}$$

де $f(x)$ — відома неперервна функція. Враховуючи, що $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, і інтегруючи за змінної x ліву і праву частини рівняння, дістаємо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

тобто приходимо до рівняння того ж типу, що й початкове; далі маємо

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2.$$

Після n кроків дістаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y(x) = \int\left[\int\left(...\int f(x)dx...\right)dx\right]dx +$$
$$+C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)} + ... + C_n.$$

Приклад 23.1. Зінтегрувати рівняння $y''' = x + \cos x$.

Приклад 23.2. Знайти закон прямолінійного руху матеріальної точки, що рухається із сталим прискоренням a, якщо у початковий момент t_0 вона мала відхилення $s(t_0) = s_0$ і швидкість $v(t_0) = v_0$.

❍Треба знайти формулу $s = s(t)$, що виражає пройдений шлях як функцію часу. За умовою (і 2-м законом Ньютона) маємо

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a$$

— диференціальне рівняння 2-го порядку. Послідовно знаходимо

$$\frac{ds}{dt} = at + C_1,$$

$$s(t) = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Визначаючи довільні сталі з початкових умов і підставляючи їх у загальний розв'язок, дістанемо відомий закон рівноприскореного руху:

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + a\frac{(t-t_0)^2}{2}.$$ ●

2. Якщо рівняння не містить шуканої функції та її похідних до порядку $(k-1)$ включно, тобто

$$\boxed{F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0,}$$

то порядок рівняння можна знизити до порядку $(n-k)$ заміною

$$\boxed{y^{(k)} = p(x).}$$

Після такої заміни рівняння набуде вигляду

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Приклад 23.3. Зінтегрувати рівняння $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

3. Якщо диференціальне рівняння не містить явно незалежної змінної x, тобто має вигляд

$$\boxed{F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,}$$

то його порядок можна знизити на одиницю підставленням

$$\boxed{y' = p(y),}$$

де $p(y)$ розглядають як нову невідому функція, а y беруть (тимчасово) за незалежну змінну. У цьому разі всі похідні $\dfrac{d^k y}{dx^k}, k = \overline{1,n}$, треба виразити через похідні від функції p за y:

$$\frac{dy}{dx} = p(y),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dy}(p(y))\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy};$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}, \ldots$$

Зауважимо, що розв'язуючи задачу Коші для диференціального рівняння доцільно визначати значення сталих під час розв'язання, а не після знаходження загального розв'язку рівняння.

Приклад 23.3. Розв'язати задачу Коші: $2y'' = 3y^2, y(-2) = 1, y'(-2) = -1$.

23.3. Лінійні однорідні диференціальні n-го порядку

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),}$$

де $p_1(x), \ldots, p_n(x), f(x)$ — задані на деякому відрізку $[a;b]$ функції. Якщо $q(x) \equiv 0$ на цьому інтервалі, то рівняння називають *лінійним однорідним (ЛОДР)*, інакше називають *неоднорідним (ЛНДР)*.

Розв'яжімо лінійне однорідне диференціальне рівняння щодо старшої похідної:

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_n(x)y.$$

Якщо коефіцієнти $p_k(x), k = \overline{1,n}$, цього рівняння неперервні на відрізку $[a;b]$, то права частина диференціального рівняння неперервна за змінною $x, a \le x \le b$, і за змінними $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ для довільних значень, і, крім того, має частинні похідні за $y^{(k)}$, рівні $-p_{n-k}(x)$, обмежені на $[a;b]$. Тому з теореми 23.1 випливає

Теорема 23.2. Якщо коефіцієнти $p_k(x), k=\overline{1,n}$, диференціального рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

неперервні на $[a;b]$, то для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$x_0 \in (a;b), \left|y_0^{(k)}\right| < +\infty, k = \overline{0, n-1},$$

існує єдиний розв'язок диференціального рівняння, який справджує ці початкові умови.

Кажуть, що на множині E задано *оператор* A зі значеннями у множині F, якщо кожному елементу $y \in E$ за деяким законом відповідає певний елемент $f = Ay \in F$. Множину E називають *областю означення* оператора A.

Нехай E — лінійний простір. Оператор A, заданий на множині E, називають *лінійним*, якщо він справджує умови:

1) $A[y_1 + y_2] = A[y_1] + A[y_2] \;\; \forall y_1, y_2 \in E$;

2) $A[\alpha y] = \alpha A[y] \; \forall y \in E \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Запишімо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

у вигляді

$$\boxed{L[y] = 0,}$$

де

$$\boxed{L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y.}$$

Оператор L є лінійним диференціальним оператором, означеним на лінійному просторі функцій $y(x)$, неперервних в інтервалі $(a;b)$, разом із своїми похідними до n-го порядку включно. Доведімо лінійність оператора, тобто

1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$;

2) $L[Cy] = CL[y], C = \text{const}$.

►Обмежмося випадком $n = 2$. Маємо

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)'' + p_1(x)(y_1 + y_2)' + p_2(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 + y_2'' + p_1(x)y_2'' + p_2(x)y_2 = L[y_1] + L[y_2].$$
$$L[Cy] = (Cy)'' + p_1(x)(Cy)' + p_2(x)(Cy) =$$
$$= Cy'' + Cp_1(x)y' + Cp_2(x)y = C(y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y) = CL[y].◄$$

Наслідок. $L\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[y_i], C_i = \text{const}.$

23.4. Властивості лінійного однорідного диференціального рівняння

1. Якщо функція $y_0(x)$ є розв'язком лінійного однорідного ДР

$$L[y]=0,$$

то функція $Cy_0(x), C=\text{const}$, також є розв'язком цього рівняння.

2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного ДР

$$L[y]=0,$$

то функція $y_1(x)+y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння.

3. Лінійна комбінація з довільними сталими коефіцієнтами

$$\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$$

розв'язків $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ лінійного однорідного ДР $L[y]=0$ є розв'язком цього ж рівняння.

4. Якщо лінійне однорідне ДР

$$L[y]=0$$

з дійсними коефіцієнтами $p_k(x), k=\overline{1,n}$, має комплексний розв'язок

$$y(x)=u(x)+iv(x),$$

то дійсна частина цього розв'язку $u(x)$ та його уявна частина $v(x)$ окремо є розв'язками цього ж однорідного рівняння.

23.5. Лінійно залежні й лінійно незалежні системи функцій

Нехай маємо систему функцій $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$, означених в інтервалі $(a;b)$.

Означення 23.3. Систему функцій $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ називають *лінійно залежною* в інтервалі $(a;b)$, якщо існують такі сталі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що в цьому інтервалі виконано тотожність за змінною x:

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0,$$

причому, хоча б одне з чисел α_i відмінне від нуля.

Якщо ця тотожність правдива лише при $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$, то систему функцій $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ називають *лінійно незалежною* в інтервалі $(a;b)$.

Лінійна залежність пари функцій $\{y_1(x), y_2(x)\}$ означає, що одна з функцій є добутком сталої на іншу функцію:

$$y_1(x)=\alpha y_2(x).$$

Визначником Вронського або *вронскіаном* системи функцій

$$\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$$

називають визначник

$$\boxed{W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.}$$

Теорема 23.3. Для будь-якої системи розв'язків $\{y_1(x), y_2(x)\}$ диференціального рівняння $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ правдива *формула Ліувіля — Остроградського*:

$$\boxed{W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)dx},}$$

де x_0, x_1 — довільні точки інтервалу $(a;b)$.

Наслідок. З формули Ліувіля — Остроградського випливає, що:
або вронскіан $W(x)$ тотожно рівний нулеві в інтервалі $(a;b)$,
або вронскіан $W(x)$ відмінний від нуля в усіх точках інтервала $(a;b)$.

Вронскіан дозволяє досліджувати лінійну залежність (незалежність) системи функцій.

Теорема 23.4. Система розв'язків $\{y_1(x), y_2(x)\}$ лінійного однорідного ДР

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$$

з неперервними на відрізку $[a;b]$ коефіцієнтами є лінійно незалежні в інтервалі $(a;b)$ тоді й лише тоді, коли визначник Вронського $W(x)$ цієї системи розв'язків відмінний від нуля.

► **1.** *Необхідність*. Нехай розв'язки лінійно незалежні в $(a;b)$. Треба довести, що $W(x)\neq 0\ \forall x\in(a;b)$.

Доведімо від супротивного. Нехай в деякій точці $x_0\in(a;b)$ маємо $W(x_0)=0$. Тоді за формулою Остроградського — Ліувіля

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'\equiv 0\,\forall x\in(a;b).$$

Зафіксуємо таку точку $x_1\in(a;b)$, що $y_1(x_1)\neq 0$. Тоді $y_2(x_1)\neq 0$. Справді, якщо $y_2(x_1)=0$, тоді з умови $W(x_1)=0$ випливає, що $y_2'(x_1)=0$. На підставі теореми єдиності це означало б, що $y_2(x)\equiv 0$, і суперечило б умові.

Тоді тотожність $W(x)\equiv 0$ можна переписати як

$$\frac{y_2'}{y_2}=\frac{y_1'}{y_1};\ \int\frac{y_2'}{y_2}dx=\int\frac{y_1'}{y_1}dx;$$
$$\ln y_2(x)=\ln y_1(x)+\ln C;\ y_2(x)=Cy_1(x).$$

Отже, система $\{y_1(x),y_2(x)\}$ — лінійно залежна, що суперечить умові.

2. *Достатність*. Нехай виконано умову $W(x)\neq 0\ \forall x\in(a;b)$. Треба довести лінійну незалежність системи розв'язків $\{y_1(x),y_2(x)\}$.

Припустімо, що система функцій $\{y_1(x),y_2(x)\}$ — лінійно залежна, це означає, що, приміром, $y_1(x)=Cy_2(x)$ і

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & Cy_1(x)\\ y_1'(x) & Cy_1'(x)\end{vmatrix}=0,$$

Одержана суперечність доводить твердження теореми.◄

Приклад 23.5. Довести лінійну незалежність систем функцій:

1) $\{1,x\}$; 2) $\{e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x}\},\lambda_1\neq\lambda_2$; 3) $\{e^{\lambda x},xe^{\lambda x}\}$.

❍1. $\begin{vmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow\ \{1,x\}$ — система лінійно незалежна.

2. $\begin{vmatrix}e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x}\end{vmatrix}=\lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}-\lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\neq 0.$

3. $\begin{vmatrix}e^{\lambda x} & xe^{\lambda x}\\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}+x\lambda e^{\lambda x}\end{vmatrix}=e^{2\lambda x}+x\lambda e^{2\lambda x}-x\lambda e^{2\lambda x}=e^{2\lambda x}\neq 0.$ ●

23.6. Структура загального розв'язку лінійного однорідного ДР

Означення 23.4. Сукупність будь-яких n лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного ДР n-го порядку називають його *фундаментальною системою розв'язків.*

Теорема 23.5 (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного ДР). Загальним розв'язком в області $a<x<b,\left|y^{(k)}\right|<+\infty,\ \ k=\overline{0,n-1},$ лінійного однорідного ДР

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0$$

з неперервними на відрізку $[a;b]$ коефіцієнтами $p_k(x), k=\overline{1,n},$ є лінійна комбінація n лінійно незалежних в інтервалі $(a;b)$ частинних розв'язків $y_i(x), i=\overline{1,n},$ цього рівняння:

$$\boxed{y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).}$$

де $C_i = \text{const}, i=\overline{1,n}.$

►З властивостей лінійного однорідного ДР випливає, що якщо $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ — фундаментальна система розв'язків ДР, то будь-яка їх лінійна комбінація

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

також буде розв'язком ДР.

Доведімо, що це буде загальний розв'язок для $n=2.$ Тобто, існує єдиний частинний розв'язок, який справджує початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', x_0 \in (a;b).$$

Підставляючи початкові умови в розв'язок

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0), \end{cases}$$

з невідомими C_1 та C_2.

Визначником цієї системи є

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Оскільки розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему на $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$, то $W(x_0) \neq 0.$

Отже, система щодо C_1 та C_2 завжди має єдиний розв'язок і

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

є загальним розв'язком лінійного однорідного ДР 2-го порядку. ◄

Теорема 23.6. Якщо два лінійних однорідних диференціальних рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0,$$

$$y^{(n)} + \tilde{p}_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + \tilde{p}_n(x) y = 0,$$

де функції $p_i(x)$ та $\tilde{p}_i(x), i = \overline{1,n}$, неперервні на відрізку $[a;b]$, мають спільну фундаментальну систему розв'язків $\{y_1(x),\dots,y_n(x)\}$, то ці рівняння збігаються, тобто $p_i(x) \equiv \tilde{p}_i(x), x \in [a;b]$.

Це означає, що фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння повністю визначає це рівняння.

Приклад 23.6. Побудувати однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку з ФСР $\{y_1(x), y_2(x)\}$.

$$❍\ y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y'(x) \\ y_1''(x) & y_3''(x) & y''(x) \end{vmatrix} = 0. ●$$

Приклад 23.7. Переконатись, що функції $y_1(x) = x$ та $y_2(x) = x^2$ лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ і записати ДР для якого ці функції утворюють ФСР.

Лекція 24. Лінійні однорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

24.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку

Розгляньмо ЛОДР 2-го порядку

$$\boxed{y'' + p_1y' + p_2y = 0,}$$

де p_1, p_2 — дійсні числа. Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння треба знайти будь-які два його лінійно незалежні розв'язки. Згідно з *методом Ейлера*, шукатимемо їх у вигляді

$$\boxed{y = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}.}$$

Тоді,

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Підставляючи вирази для y, y', y'' у диференціальне рівняння, дістанемо

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2) = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то повинно виконуватись рівність

$$\boxed{\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0,}$$

яку називають *характеристичним рівнянням* для диференціального рівняння, а його ліву частина $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$ називають *характеристичним многочленом*.

Корені квадратного характеристичного рівняння, які позначимо через λ_1 та λ_2, можуть бути:

1) дійсними різними;
2) комплексними спряженими;
3) дійсними рівними.

1. Якщо корені λ_1, λ_2 характеристичного многочлена дійсні й різні, то частинними розв'язками диференціального рівняння будуть функції

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.}$$

Ці розв'язки лінійно незалежні $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ і, отже, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння. Загальний розв'язок має вигляді

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.}$$

2. Нехай корені λ_1, λ_2 характеристичного многочлена комплексні. Оскільки коефіцієнти p_1 та p_2 характеристичного многочлена дійсні, комплексні корені входять попарно спряженими. Покладімо

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Частинні розв'язки диференціального рівняння можна записати у вигляді

$$\boxed{\tilde{y}_1(x) = e^{(\alpha + i\beta)x}, \tilde{y}_2(x) = e^{(\alpha - i\beta)x}.}$$

Це комплекснозначні функції дійсного аргументу x, а нас цікавлять дійсні розв'язки. За допомогою Ейлерової формули

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x, e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

частинні розв'язки $\tilde{y}_1$ та $\tilde{y}_2$ диференціального рівняння можна зобразити у вигляді

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Із властивостей лінійного однорідного ДР випливає, що частинними розв'язками диференціального рівняння будуть також функції

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \operatorname{tg}\beta x \neq \text{const}$$

і, отже, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння. Загальний розв'язок у цьому разі

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).}$$

3. Нехай тепер корені λ_1, λ_2 характеристичного многочлена дійсні й рівні: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Один частинний розв'язок

$$\boxed{y_1 = e^{\lambda x}}$$

дістаємо відразу. Другий частинний розв'язок, лінійно незалежний з першим, шукатимемо у вигляді

$$y_2(x) = e^{\lambda x} u(x),$$

де $u(x)$ — нова невідома функція. Диференціюючи, дістаємо

$$y_2' = \lambda e^{\lambda x} u + e^{\lambda x} u',$$
$$y_2'' = \lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} u' + e^{\lambda x} u''.$$

Підставляючи одержані вирази у диференціальне рівняння, маємо

$$e^{\lambda x}[u'' + (2\lambda + p_1)u' + (\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)u] = 0.$$

Оскільки λ — двократний корінь характеристичного рівняння, то

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0, 2\lambda + p_1 = 0.$$

Отже,

$$u'' = 0 \Rightarrow u = Ax + B, A, B = \mathrm{const}.$$

Зокрема, можна покласти $A = 1, B = 0$; тоді

$$\boxed{u = x.}$$

За частинний розв'язок рівняння, лінійно незалежний з y_1, можна взяти

$$\boxed{y_2 = xe^{\lambda x}.}$$

Справді, цей розв'язок лінійно незалежний з першим, оскільки

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = x \neq \mathrm{const}.$$

Розв'язки $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння. Загальний розв'язок у цьому разі матиме вигляд

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x).}$$

Приклад 24.1. Зінтегрувати диференціальні рівняння:
1) $y'' - 3y' + 2y = 0$; 2) $y'' - 2y' + 2y = 0$; 3) $y'' - 2y' + y = 0$.

24.2. Фізичні застосування: рівняння коливань

Лінійні ДР зі сталими коефіцієнтами виникають у задачах про механічні та електричні коливання. Розгляньмо *рівняння вільних механічних коливань*, причому незалежною змінною вважають час t:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dy}{dt}+ky=0,}$$

де y — відхилення точки, що коливаються, від точки рівноваги, m — маса точки, h — коефіцієнт тертя (вважаймо, що сила тертя пропорційна швидкості), $k>0$ — коефіцієнт пружності, відновлюваної сили (вважаймо, що ця сила пропорційна відхиленню). Характеристичне рівняння для рівняння коливань

$$m\lambda^2+h\lambda+k=0$$

має корені

$$\lambda_{1,2}=-\frac{h}{2m}\pm\sqrt{\frac{h^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}.$$

Якщо тертя досить велике, $h^2>4mk$, то ці корені дійсні й від'ємні. Загальний розв'язок рівняння у цьому разі матиме вигляд

$$y=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}.$$

Оскільки $\lambda_1<0, \lambda_2<0$, то з останньої рівності випливає, що при великому терті відхилення точки від положення рівноваги з часом (тобто, коли $t\to\infty$) прямує до нуля, не коливаючись.

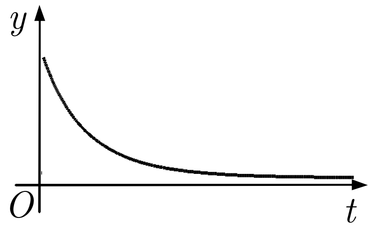


Рис. 24.1. Випадок великого тертя

Якщо тертя мале, $h^2<4mk$, то характеристичне рівняння має комплексно спряжені корені

$$-\alpha\pm i\beta,\ \alpha=\frac{h}{2m}>0, \beta=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{h^2}{4m^2}}.$$

Загальний розв'язок рівняння у цьому разі

$$y=e^{-\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)=$$
$$=Ae^{-\alpha t}\sin(\beta t+\delta)\ \ (\alpha>0).$$

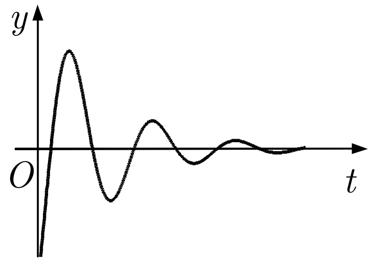


Рис. 24.2. Випадок малого тертя

У разі малого тертя точка коливатиметься згасально.

Якщо тертя немає. тобто $h=0$, то характеристичне рівняння має суто уявні корені

$$\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Загальний розв'язок у цьому разі має вигляд

$$y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t=A\sin(\omega t+\delta),$$

де $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, тобто в цьому разі точки коливається гармонічно незгасально з певною частотою і довільними амплітудою і початковою фазою.

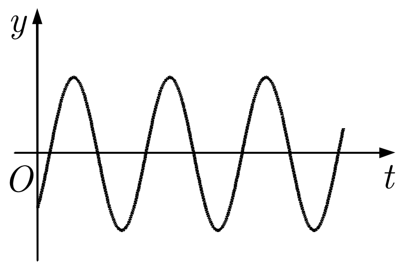


Рис. 24.3. Випадок коливання без тертя

24.3. Загальний випадок: рівняння довільного порядку

Розгляньмо ЛОДР довільного порядку $n \geq 1$ із сталими коефіцієнтами

$$\boxed{L[u] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,}$$

де $p_1, p_2, ..., p_n$ — дійсні числа. Розв'язуємо це рівняння так само як і рівняння 2-го порядку за методом Ейлера.

1. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$\boxed{y = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}.}$$

Підставляючи замість y величину $e^{\lambda x}$ дістаємо характеристичне рівняння

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} \varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n.$$

2. Знаходьмо корені характеристичного рівняння.

3. За природою коренів виписуємо частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння, керуючись тим, що:

а) кожному дійсному однократному кореню λ характеристичного рівняння відповідає частинний розв'язок

$$e^{\lambda x};$$

б) кожній парі однократних комплексно-спряжених коренів

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

відповідає пара лінійно незалежних частинних розв'язків

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

в) кожному дійсному кореню λ кратності r відповідає r лінійно незалежних частинних розв'язків

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, ..., x^{r-1} e^{\lambda x}.$$

Можна показати, що ці функції є розв'язками й лінійно незалежні;

г) кожній парі комплексно-спряжених коренів $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ кратності 2μ відповідає 2μ частинних розв'язки

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, ..., x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, ..., x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

4. Маючи n лінійно незалежних розв'язків

$$y_1(x), ..., y_n(x) \text{ — ФСР ЛОДР,}$$

дістаємо загальний розв'язок цього рівняння

$$\boxed{y = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x),}$$

де $C_1, ..., C_n$ довільні сталі.

Схема розв'язання ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ЛОДР} \to \text{ХР} \to \text{корені ХР} \to \text{частинні розв'язки ЛОДР} \to \\ \to \text{загальний розв'язок ЛОДР}\end{array}}$$

Приклад 24.2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(6)} - y'' = 0.$

Лекція 25. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

25.1. Загальна теорія

Теорема 25.1. Якщо коефіцієнти $p_k(x), k = \overline{1,n},$ і права частина $f(x)$ диференціального рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),$$

неперервні на $[a;b]$, то для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$x_0 \in (a;b), \left|y_0^{(k)}\right| < +\infty, k = \overline{0, n-1},$$

існує єдиний розв'язок диференціального рівняння, який справджує ці початкові умови.

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$\boxed{L[u] = f(x),}$$

де $L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y.$

Теорема 25.2. Якщо функція $\tilde{y}(x)$ є розв'язком неоднорідного рівняння

$$L[y] = f(x),$$

а $y_0(x)$ є розв'язком відповідного однорідного рівняння

$$L[y] = 0,$$

то сума $\tilde{y}(x) + y_0(x)$ є розв'язком неоднорідного рівняння.

►Завдяки лінійності оператора L маємо

$$L[\tilde{y}] = f(x), L[y_0] = 0 \Rightarrow L[\tilde{y} + y_0] = L[\tilde{y}] + L[y_0] = 0.◄$$

Теорема 25.3 (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР). Загальний розв'язок в області $a < x < b, \left|y^k\right| < +\infty, \quad k = \overline{0, n-1},$ диференціального рівняння

$$L[y] = f(x)$$

з неперервними на відрізку $[a;b]$ коефіцієнтами $p_k(x), k=\overline{1,n}$, і правою частиною $f(x)$ дорівнює сумі загального розв'язку

$$y_{\text{заг. одн.}}(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$$

відповідного ЛОДР і будь-якого частинного розв'язку $y_{\text{част. неодн.}}(x)$ неоднорідного ДР, тобто

$$\boxed{y_{\text{заг. неодн.}}=y_{\text{заг. одн.}}+y_{\text{част. неодн.}}.}$$

Теорема 25.4 (принцип суперпозиції). Якщо $y_1(x)$ є розв'язком рівняння

$$L[y]=f_1(x),$$

а $y_2(x)$ є розв'язком рівняння

$$L[y]=f_2(x),$$

то функція $f_1(x)+f_2(x)$ є розв'язком рівняння

$$L[y]=f_1(x)+f_2(x).$$

Теорема 25.5. Якщо диференціальне рівняння

$$L[y]=U(x)+iV(x),$$

де коефіцієнтами $p_k(x), k=\overline{1,n}$, і функції $U(x)$ та $V(x)$ — дійсні має розв'язок

$$y(x)=u(x)+iv(x),$$

то дійсна частина цього розв'язку $u(x)$ та його уявна частина $v(x)$ окремо є розв'язками рівнянь

$$L[u]=U(x), L[v]=V(x).$$

25.2. Інтегрування лінійного неоднорідного ДР методом варіювання довільної сталої

Обмежмося випадком рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами

$$\boxed{y''+p_1y'+p_2y=f(x),}$$

де $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$.

Для інтегрування ЛНДР застосуймо *метод Лагранжа* (*варіювання довільних сталих*).

1. Знаходимо загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного ДР

$$y''+p_1y'+p_2y=0,$$

у вигляді

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

2. Згідно з гіпотезою Лаґранжа загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР шукаємо у вигляді

$$\boxed{y_{\text{заг. неодн.}} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),}$$

де $C_1(x), C_2(x)$ — нові невідомі функції.

3. Щоб знайти функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ потрібно одержати два співвідношення для них.

Знаходимо вирази для $y'(x)$ та $y''(x)$.

$$y'(x) = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Для того щоб у вираз для $y''(x)$ не входили похідні 2-го порядку $C_1''(x)$ та $C_2''(x)$ накладаємо на функцію $C_1(x)$ та $C_2(x)$ умову:

$$\boxed{C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0.}$$

Отже, $y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$

$$y''(x) = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

Щоб знайти ще одне співвідношення, підставляємо у ДР замість $y(x), y'(x)$ та $y''(x)$ відповідні вирази:

$$\begin{gathered}
C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x) + \\
+ p_1[C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)] + p_2[C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)] = f(x) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow C_1(x) \underbrace{[y_1''(x) + p_1 y_1'(x) + p_2 y_1(x)]}_{\text{вираз у дужках дорівнює нулеві}} + C_2(x) \underbrace{[y_2''(x) + p_1 y_2'(x) + p_2 y_2(x)]}_{\text{вираз у дужках дорівнює нулеві}} + \\
+ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \boxed{C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x).}
\end{gathered}$$

Для знаходження функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ дістаємо систему 2-го порядку лінійних алгебричних рівнянь щодо $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$:

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases}}$$

Визначник цієї системи

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки система розв'язків $\{y_1(x), y_2(x)\}$ є фундаментальною.

4. Інтегруючи $C'(x)$ та $C_2'(x)$ знаходимо шукані функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$.

Приклад 25.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

25.3. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Функція вигляду

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)}$$

називають *функцією спеціального вигляду* (*квазімногочленом*).
До розв'язання таких рівнянь застосовують *метод підбирання* частинного розв'язку ЛНДР. Розгляньмо типи рівнянь до яких він застосовний.

1. Рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = P_m(x),}$$

де

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m.$$

а) якщо $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_{\text{ч.н.}} = Q_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,}$$

де $A_i, i = \overline{0, m},$ — невизначені коефіцієнти;

б) якщо $\lambda = 0$ є коренем характеристичного рівняння кратності r (є «резонанс» порядку r), то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_{\text{ч.н.}} = x^r Q_m(x) = x^r(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m),}$$

де $A_i, i = \overline{0, m},$ — невизначені коефіцієнти.

2. Рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = e^{ax} P_m(x),}$$

де

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m.$$

а) якщо $\lambda = a$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_{\text{ч.н.}} = e^{ax} Q_m(x) = e^{ax}(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m),}$$

де $A_i, i = \overline{0, m},$ — невизначені коефіцієнти;

б) якщо $\lambda = a$ є коренем характеристичного рівняння кратності r (є «резонанс» порядку r), то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_{\text{ч.н.}} = x^r e^{ax} Q_m(x) = x^r e^{ax}(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m),}$$

де $A_i, i = \overline{0, m},$ — невизначені коефіцієнти.

3. Рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x),}$$

де

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$
$$Q_k(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \ldots + b_k.$$

а) якщо $\lambda = \alpha \pm \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_{\text{ч.н.}} = e^{\alpha x}(U_l(x)\cos\beta x + V_l(x)\sin\beta x,}$$

де $U_l(x)$ та $V_l(x)$ — многочлени порядку $l = \max\{m, k\}$ із невизначеними коефіцієнтами;

б) якщо $\lambda = \alpha \pm \beta i$ є коренями характеристичного рівняння кратності r (є «резонанс» порядку r), то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_{\text{ч.н.}} = x^r e^{\alpha x}(U_l(x)\cos\beta x + V_l(x)\sin\beta x,}$$

де $U_l(x)$ та $V_l(x)$ — многочлени порядку $l = \max\{m, k\}$ із невизначеними коефіцієнтами.

Щоб знайти невизначені коефіцієнти многочленів, треба підставити функцію $y_{\text{ч.н.}}(x)$ у ЛДНДР і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах рівняння. При цьому треба прирівнювати відповідні коефіцієнти тих многочленів, що стоять при $\cos\beta x,$ і окремо — коефіцієнти многочленів при $\sin\beta x.$

Зауважимо, що при накладанні різних правих частин для знаходження частинного розв'язку ЛНДР використовують принцип суперпозиції.

►Доведімо випадок 1 для ДР 2-го порядку.

А. Нехай $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \Rightarrow p_2 \neq 0.$$

Отже,

$$\boxed{y_{\text{ч.н.}} = y_* = Q_m(x)}, y_*' = Q_m'(x), y_*'' = Q_m''(x).$$

Після підставлення функції y_* та її похідних у ДР $y'' + p_1 y' + p_2 y = P_m(x)$ дістанемо:

$$Q''_m(x) + p_1 Q'_m(x) + p_2 Q_m(x) = P_m(x).$$

Зліва — многочлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, справа — многочлен степеня m, але з відомими коефіцієнтами. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x дістанемо систему $(m+1)$ алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів $A_0, A_1, \ldots, A_m$.

Б. Нехай $\lambda = 0$ є однократним (простим) коренем характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 0.$$

У цьому разі шукати розв'язок у вигляді $y_* = Q_m(x)$ вже не можна, оскільки після підставляння дістанемо рівність:

$$Q''_m(x) + p_1 Q'_m(x) = P_m(x).$$

У лівій частині — многочлен степеня $(m-1)$, у правій частині — многочлен степеня m.

Щоб одержати тотожність многочленів у розв'язку y_* треба мати многочлен степеня $(m+1)$. Тому частинний розв'язок шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = xQ_m(x).}$$

В. Якщо $\lambda = 0$ є коренем кратності 2 характеристичного многочлена, то так само з'ясовуємо, що частинний розв'язок треба шукати вже у вигляді

$$\boxed{y_* = x^2 Q_m(x).} \blacktriangleleft$$

Приклад 25.2. Визначити і записати структуру частинного розв'язку ЛНДР за виглядом функції $f(x)$:

1) $y'' + 2y' = f(x)$, де а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \sin 2x$;

2) $y'' + 6y' + 10y = f(x)$, де а) $f(x) = e^{-3x}$; б) $f(x) = e^{-3x}\sin x$;

3) $y'' - 8y' + 16y = 2\operatorname{ch} 4x$.

Приклад 25.3. Розв'язати диференціальне рівняння:

1) $y'' + 8y' = 8x$,

2) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$;

3) $y^{(4)} - 2y'' + y = \cos x$.

Приклад 25.4. Розв'язати задачу Коші: $y'' + 9y = 36e^{3x}, y(0) = 2, y'(0) = 6$.

25.4. Вимушені коливання. Резонанс

Розгляньмо випадок, коли коливний рух відбувається в середовищі без опору і на коливальну систему діє періодична зовнішня сила $\varphi(t) = H\sin\omega_1 t$. Тоді рух точки описується лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням

$$x'' + \omega^2 x = H \sin \omega_1 t.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є сума загального розв'язку однорідного рівняння

$$x_{\text{з.о.}} = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Розгляньмо два випадки.

1. *Нерезонансний випадок.* Припустімо, що $\omega_1 \neq \omega$, тобто частота зовнішньої сили відмінна від частоти вільних коливань. Отже, частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$x_{\text{ч.н.}} = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t.$$

Підставляючи цю функцію у ДР, маємо

$$x_{\text{ч.н.}} = \frac{H}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t;$$

$$x_{\text{з.н.}} = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{H}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t.$$

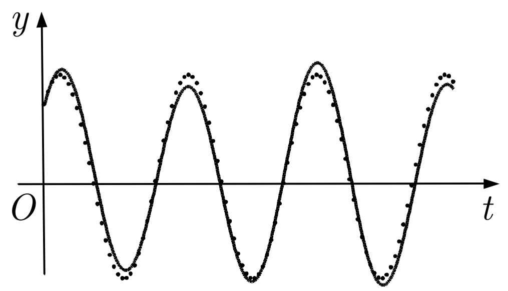


Рис. 25.1. Нерезонансний випадок коливань

У разі, якщо ω та ω_1 близькі за величиною, матеріальна точка коливається з великою сталою амплітудою.

2. *Резонансний випадок.* Нехай тепер $\omega = \omega_1$, тобто частота зовнішньої сили дорівнює частоті вільних коливань. Частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$x_{\text{ч.н.}} = t(A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Підставляючи в ДР, маємо

$$x_{\text{ч.н.}} = -\frac{Ht}{2\omega} \cos \omega t;$$

$$x_{\text{з.н.}} = A \sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{Ht}{2\omega} \cos \omega t.$$

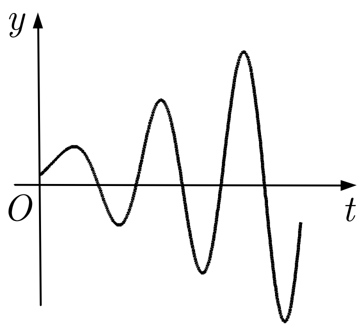


Рис. 25.2. Резонансний випадок коливань

Амплітуда коливань із плином часу необмежено зростає.

Лекція 26. Системи лінійних диференціальних рівнянь

26.1. Задача Вольтерра (система хижак-жертва)

Розгляньмо співіснування двох видів, приміром, риб. Позначимо кількість особин 1-го виду $x(t)$, 2-го виду — $y(t)$. Припускаємо:

1) 1-й вид харчується продуктами середовища, яких завжди вдосталь;

2) якби 1-й вид жив окремо, то кількість його особин неперервно б збільшувалась зі швидкістю пропорційною наявній кількості особин: $x' = k_1 x$, $k_1 > 0$.

3) особини 2-го виду харчуються лише особинами 1-го виду;

4) якби 2-й вид жив окремо, то він би поступово вимирав: $y' = -k_2 y$, $k_2 > 0$.

Розгляньмо тепер випадок, коли види співіснують. Припустімо також, що коефіцієнт k_1 зменшиться на величину пропорційну y. Так само, що коефіцієнт k_2 завдяки наявності 1-го виду (харчів) зміниться на величину пропорційну x. За цих припущень маємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = (k_1 - k_3 y)x, \\ y' = -(k_2 - k_4 x)y, \end{cases}$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 — додатні числа.

26.2. Основні поняття

Для розв'язання багатьох задач математики, фізики і техніки часто потрібно розглядати декілька невідомих функцій. Знаходження цих функцій може привести до кількох ДР, які утворюють систему.

Систему n ДР 1-го порядку, розв'язаних щодо похідної, вигляду

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

називають *нормальною* системою ДР.

Обмежмося розглядом нормальних систем із двома невідомими функціями:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t). \end{cases}$$

Цю систему можна записати у матричному вигляді

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f},$$

де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, або

$$L[\vec{x}(t)] = \vec{f}(t),$$

де $L = \dfrac{d}{dt} - A$.

Якщо стовпець $\vec{f} = \vec{0}$, то систему називають *однорідною*, інакше — *неоднорідною*.

Розв'язком системи ДР називають сукупність із двох функцій $x_1(t), x_2(t)$ які справджують кожному з рівнянь цієї системи.

Теорема 26.1. Якщо функції $a_{ij}(t), f_i(t), i, j = 1, 2,$ неперервні на відрізку $[a; b]$, то в досить малому околі кожної точки $M_0(t_0; x_{10}; x_{20}), t \in (a; b)$, виконано умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Якщо стовпці $\vec{x}_1(t)$ та $\vec{x}_2(t)$ є розв'язками лінійної однорідної системи $L[\vec{x}] = \vec{0}$, то для довільних сталих C_1 та C_2 стовпець $C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t)$ також є розв'язком цієї системи.

Теорема 26.2 (про структуру розв'язку однорідної системи). Загальним розв'язком нормальної лінійної однорідної системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

з неперервними на відрізку $[a; b]$ коефіцієнтами $a_{ij}(t), i, j = 1, 2$ є лінійна комбінація двох лінійно незалежних в інтервалі $(a; b)$ розв'язків $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ системи

$$\boxed{\vec{x}_{\text{заг.одн.}} = C_1\vec{x}_1(t) + C_1\vec{x}_2(t),}$$

де $C_1, C_2 = \text{const}$.

26.3. Метод Ейлера розв'язання однорідної системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Шукатимемо розв'язок однорідної системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

у вигляді

$$\boxed{\vec{x} = \vec{\gamma}e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 e^{\lambda t} \\ \gamma_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}.}$$

Підставляючи ці розв'язок у систему і перетворюючи її, дістанемо

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Щоб ця система мала ненульовий розв'язок необхідно й достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Це рівняння називають *характеристичним* рівнянням для системи.

1. Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 та λ_2 дійсні різні, то знаходять відповідні їм нетривіальні розв'язки $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ алгебричної системи і записують загальний розв'язок однорідної системи ДР у вигляді

$$\boxed{\vec{x}_{\text{заг. одн.}} = C_1\vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 t}, C_1, C_2 = \text{const}.}$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 та λ_2 комплексно спряжені:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha + i\beta,$$

то знаходять нетривіальний розв'язок алгебричної системи $\vec{\gamma}$, який відповідає $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тоді

$$\vec{x}_1(t) = \text{Re}(\vec{\gamma} e^{\alpha + i\beta}), \vec{x}_2(t) = \text{Im}(\vec{\gamma} e^{\alpha + i\beta}) \Rightarrow$$
$$\vec{x}_{\text{заг. одн.}}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t), C_1, C_2 = \text{const}.$$

3. Якщо корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння дійсні і рівні, то загальний розв'язок системи шукають у вигляді

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^{\lambda t}, A, B, C, D = \text{const}.$$

Приклад 26.1. Розв'язати систему $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

26.4. Метод виключення змінних

Нормальну неоднорідну систему ДР

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t). \end{cases}$$

можна звести до одного диференціального рівняння 2-го порядку, виражаючи або змінну $x_2(t)$ із 1-го рівняння системи, або змінну $x_1(t)$ із 2-го рівняння системи.

Приклад 26.2. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t, x(0) = 1, y(0) = -2. \end{cases}$$

Відповіді

2.1. $dz = 3x^2 \sin y dx + x^3 \cos y dx; dz(M_0) = \frac{3}{\sqrt{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} dy.$

2.2. $\frac{du}{dt} = \cos 2t.$

2.3. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y, \frac{dz}{dx} = y^x \ln y - xy^{x-1} \sin 2x.$

2.4. $\frac{\partial z}{\partial u} = 6(u-v)uv + 3(u-v)^2 v;\ \frac{\partial z}{\partial v} = -6(u-v)uv + 3(u-v)^2 u.$

2.5. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{e^z + 1}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^z + 1}.$

2.6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4}{(2x+3y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{6}{(2x+3y)^2},$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{6}{(2x+3y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{9}{(2x+3y)^2}.$

3.1. $\frac{\partial T(M_0)}{\partial l} = \frac{2e-5}{\sqrt{3}}.$

3.2. Густина зростає найшвидше в напрямі вектора $\operatorname{grad} \rho(M_0) = \left(-\frac{2}{5}; \frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)^T$

зі швидкістю, що дорівнює $\left|\operatorname{grad} \rho(M_0)\right| = \frac{\sqrt{104}}{5}.$

4.1. Рівняння дотичної: $\frac{x}{-a} = \frac{y-a}{0} = \frac{z - \frac{a\pi}{2}}{h}.$

Рівняння нормальної площини: $2ax - 2hz + a\pi h = 0.$

4.2. Рівняння дотичної площини: $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - z = 0.$

Рівняння нормалі $\frac{x-4}{\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{\frac{2}{3}} = \frac{z-4}{-1}.$

5.2. Точка мінімуму $M_0(1; -1)$

5.2. $\max\limits_{(x;y)\in \bar{D}} z(x,y) = f(\pm 1; 1) = f(\pm 1; -1) = 2; \min\limits_{(x;y)\in \bar{D}} z(x,y) = f(0,0) = 0.$

8.1. $\frac{\pi a^2}{4}.$

8.2. $\frac{1}{4}(\pi - \ln 4).$

9.1. Розбігається у звичайному розумінні і збігається у розумінні головного значення за Коші.

9.2. Збігається.

10.1. $\frac{a^3}{3}$.

10.2. $\frac{8}{3}$.

10.4. $\frac{27}{6}$.

10.5. $\frac{3}{2}\pi a^2$.

11.1. 268.

11.2. $S=\frac{16\sqrt{15}}{3}$.

11.3. $I=2$.

12.1. $\left|J(u,v)\right|=\frac{1}{2v}$. $S=\frac{b^2-a^2}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

12.2. $S=\pi ab$.

12.3. $m=5$.

13.1. $V=\frac{1}{3}$.

13.2. $V=\frac{\pi}{3}$.

13.3. $V=\frac{4}{3}\pi abc$.

13.4. $m=\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{4}R^4$.

14.1. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)$.

14.2. $8a$.

15.1. -8

15.2. 0.

15.3. $I=\frac{\pi R^4}{2}$.

15.4. $I=2\pi$.

16.1. $u(x,y)=\ln\left|x\right|+2\ln\left|y\right|+\frac{x}{y}+C$.

16.2. $u(x,y,z)=x^2y+3xz^2+C$.

16.3. $A=5$.

16.4. $S=\frac{3a^2\pi}{8}$.

17.1. $S=4\pi a^2$.

17.2. $S=\sqrt{2}\pi a^2$.

17.3. $\frac{2\pi}{15}(\sqrt{2}+1)$.

18.1. -4π.

19.1. $\Pi=-\frac{7}{6}$.

19.2. $\operatorname{div}\overline{r}=3$.

19.3. $V=72\pi$.

19.4. 2π.

19.5. $\Pi=3V$.

19.6. -5.

19.7. 0.

22.1. $x=Ce^{\operatorname{arctg} y}, C=\text{const}$.

22.2. $x+C=-\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}$.

22.3. $\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=Cx, y=\pm x$.

22.4. $(y-3)^2-2(y-3)(x+1)-(x+1)^2=\tilde{C}.$

22.5. $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}.$

22.6. $y=\dfrac{1}{1+Ce^{x^2}}, C=\text{const}.$

22.7. $x\sin y-y\cos x+\ln\left|xy\right|=C.$

23.1. $y=\dfrac{x^4}{24}-\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3.$

23.3. $y=\dfrac{C_1x-1}{C_1^2}e^{1+C_1x}+C_2.$

23.4. $x\sqrt{y}+2=0.$

23.7. $x^2y''-2xy'+2y=0.$

24.1. 1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$; 2) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 3) $y=e^x(C_1+C_2x)$.

24.2. $y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}+C_5\cos x+C_6\sin x.$

25.1. $y=C_1\sin x+C_2\cos x+\sin x\cdot\ln\left|\sin x\right|-x\cos x.$

25.2. 1) а) Ax^3+Bx^2+Cx; б) $A\cos 2x+B\sin 2x$;

2) а) Ae^{-3x}; б) $xe^{-3x}(A\cos x+B\sin x)$;

3) $Ax^2e^{4x}+Be^{-4x}$.

25.3. 1) $y=C_1+C_2e^{-8x}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{8}$; 2) $y=C_1e^{2x}+C_2e^x-\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)e^x$;

3) $y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-x}+\dfrac{1}{4}\cos x.$

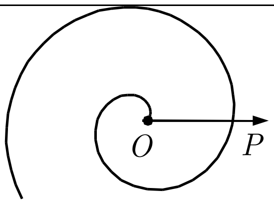
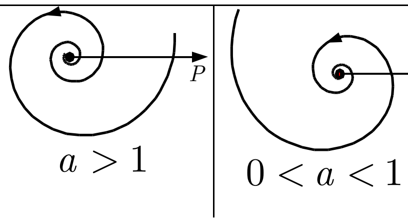
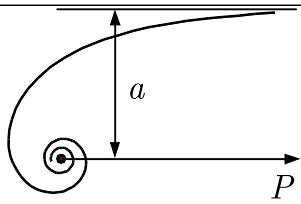
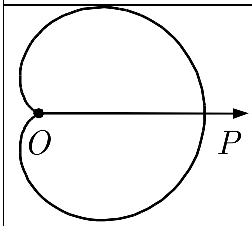
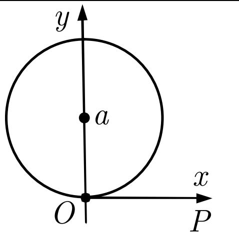
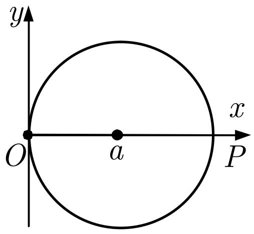
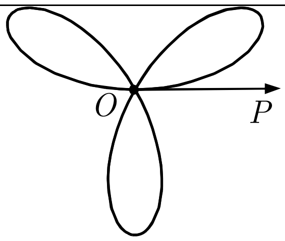
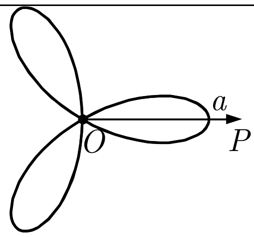
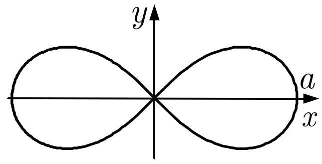
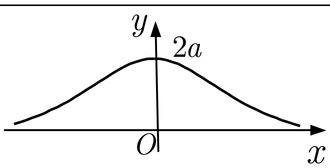
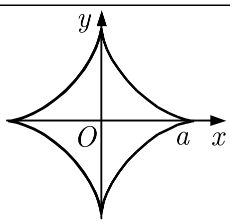
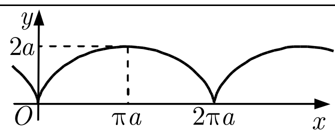
25.4. $y=2e^{3x}.$

26.1. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}\\C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}\end{pmatrix}, C_1,C_2=\text{const}.$

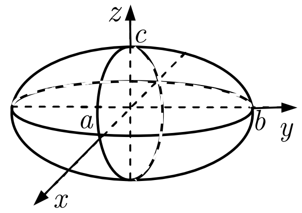
26.2. $\begin{cases}x=(1-t)\cos t-\sin t,\\y=(t-2)\cos t+t\sin t.\end{cases}$

Додаток

Д1. Деякі визначні криві

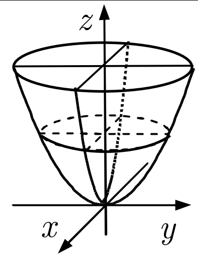
 ***Спіраль Архімеда*** $\rho = a\varphi$	 ***Логарифмічна спіраль*** $\rho = a^{\varphi}$	 ***Гіперболічна спіраль*** $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$
 ***Кардіоїда*** $\rho = 2a(\cos\varphi + 1)$	 ***Коло*** $x^2 + y^2 = 2ay$, $\rho = 2a\sin\varphi, a > 0$	 ***Коло*** $x^2 + y^2 = 2ax$, $\rho = 2a\cos\varphi, a > 0$
 ***Трипелюсткова роза*** $\rho = a\sin 3\varphi$	 ***Трипелюсткова роза*** $\rho = a\cos 3\varphi$	 ***Лемніската Бернуллі*** $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$
 ***Кучер Аньєзі*** $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$	 ***Астроїда*** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} t \in [0; 2\pi]$	 ***Циклоїда*** $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

Д2. Визначні поверхні і просторові криві



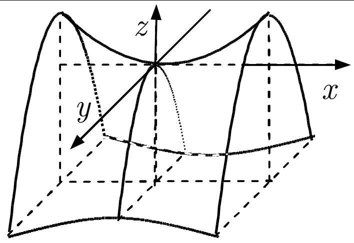
Еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



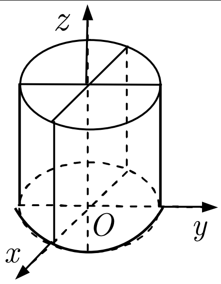
Еліптичний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



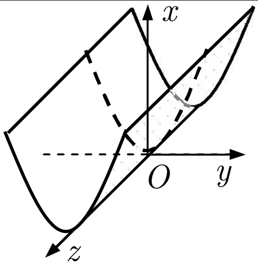
Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$



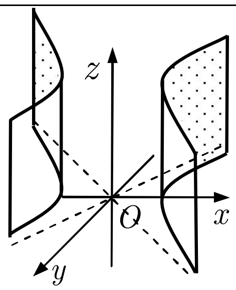
Еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



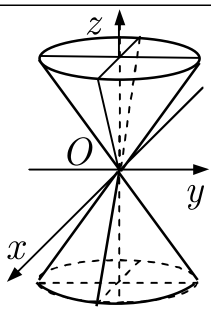
Параболічний циліндр

$$y^2=2px$$



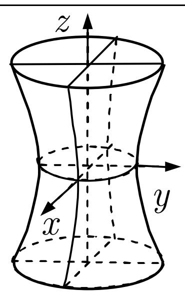
Гіперболічний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



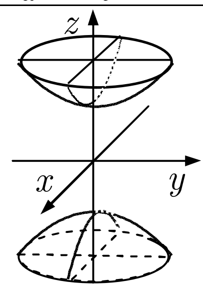
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



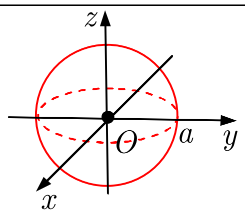
Однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



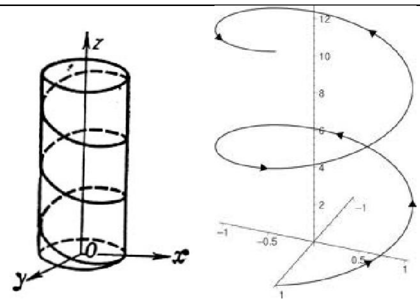
Двопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



Сфера

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$



Циліндрична гвинтова лінія

$$\left\{x=a\cos t, y=a\sin t, z=\frac{ht}{2\pi}\right.$$

Конічна гвинтова лінія

$$\begin{cases} x=at\cos t, y=at\sin t, \\ z=bt \end{cases}$$

Список літератури

Підручники і посібники

1. *Вища* математика: підручник. У 2 кн. Кн. 1 / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 400 с. — ISBN 966-06-0229-4.

2. *Вища* математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 368 с. — ISBN 966-06-0228-6.

3. *Вся* высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 2. — М.: Эдиториал УРСС, 2007. — 192 с. — ISBN 978-5-382-00208-8.

4. *Вся* высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 3. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — 240 с. — ISBN 978-5-354-00270-2.

5. *Вся* высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 4. — М.: Эдиториал УРСС, 2012. — 352 с. — ISBN 978-5-354-01425-5.

6. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.

7. *Жевняк Р. М.* Высшая математика: учеб. пособие Ч.2. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 224 с.

8. *Жевняк Р. М.* Высшая математика: учеб. пособие Ч.3. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 208 с.

9. *Жевняк Р. М.* Высшая математика: учеб. пособие Ч.4. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1987. — 240с.

10. *Овчинников П. П.* Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 1 / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. — К.: Техніка, 2003. — 600 с. — ISBN: 966-575-055-0.

11. *Овчинников П. П.* Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2003. — 792 с. — ISBN: 966-575-153-0.

12. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: *Айрис-Пресс*, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

13. *Шипачев В. С.* Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.

Задачники

14. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — С.Пб.: Лань, Специальная литература, 2002. — 448 с. — ISBN 5-8114-0107-8.

15. *Сборник* задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч. 2.: учеб. пособие / А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин, С. М. Коган и др. Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — М.: Изд. Физико-математ. литературы, 2001. — 432 с. — ISBN 5-94052-035-9.