

## 2.1 Функція однієї змінної

### Поняття функціональної залежності

Величина називається змінною (сталого), якщо в умовах даної задачі вона набуває різних (тільки одного) значень.

Розглянемо дві змінні величини  $x \in D \subseteq R$  і  $y \in E \subseteq R$ .

**Означення.** Функцією  $y = f(x)$  називається така відповідність між множинами  $D$  і  $E$ , за якої кожному значенню змінної  $x$  відповідає одне й тільки одне значення змінної  $y$ .

При цьому вважають, що:

$x$  — незалежна змінна, або аргумент;

$y$  — залежна змінна, або функція;

$f$  — символ закону відповідності;

$D$  — область визначення функції;

$E$  — множина значень функції.

Розрізняють три способи завдання функції: аналітичний, графічний і табличний.

**Означення.** Функція  $y = F(u)$ , де  $u = \varphi(x)$ , називається складною (складеною) функцією, або суперпозицією функцій  $F(u)$  та  $\varphi(x)$ , і позначається  $y = F(\varphi(x))$ .

**Приклад.**  $y = 2^{\sin^2 x}$  — складна функція, вона буде суперпозицією трьох функцій:  $y = 2^u$ ,  $u = v^2$ ,  $v = \sin x$ .

**Приклад.**  $y = \operatorname{tg}(3u) \cdot f(u)$ , де  $u = 3x + 1$ ,  $f(x) = (2x + 5)^3$ . Оскільки  $f(u) = (2u + 5)^3$ , то  $y = \operatorname{tg}(3(3x + 1))(2(3x + 1) + 5)^3 = \operatorname{tg}(9x + 3)(6x + 7)^3$ .

**Означення.** Нехай функція  $y = f(x)$  встановлює відповідність між множинами  $D$  та  $E$ . Якщо обернена відповідність між множинами  $E$  та  $D$  буде функцією, то вона називається оберненою до даної  $y = f(x)$ ; її позначають  $y = f^{-1}(x)$ .

За означенням, для взаємно обернених функцій маємо:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

**Приклад.**  $f(x) = x^3$ ,  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  — взаємно обернені функції:

$$\sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої  $y = x$  (рис. 1).

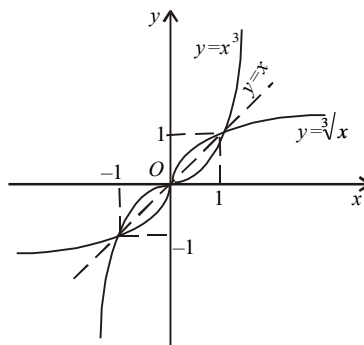


Рис. 1

**Означення.** Функція (функціональна залежність змінної  $y$  від змінної  $x$ ) називається неявною, якщо її задано рівнянням  $F(x, y) = 0$ , яке не розв'язане відносно змінної  $y$ .

**Приклад.** Рівняння  $y + x + 2^y = 0$  визначає неявну функцію  $y$  від  $x$ .

**Означення.** Система рівнянь

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

визначає параметричну залежність функції  $y$  від змінної  $x$  ( $t$ —параметр).

Вираз  $y = f(x)$  самої залежності  $y$  від  $x$  можна дістати виключенням параметра  $t$  з останньої системи рівнянь.

**Приклад.** Параметрична залежність

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

визначає коло радіуса  $r$  з центром у початку прямокутної декартової системи координат. Справді, зводячи до квадрата параметричні рівняння і підсумовуючи результат, дістаємо:  $x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)$ , або  $x^2 + y^2 = r^2$ .

### Загальні властивості функцій

**Означення.** Множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції, називається *природною областю визначення функції*. Область визначення може бути заданою; у цьому випадку вона залежить також від умови задачі.

**Приклад.** Знайти область визначення функції

$$y = \frac{\arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{1 - x^2}}{\lg(1 + x)}.$$

$$D(y) = \begin{cases} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 1 \\ 1 - x^2 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \\ \lg(x + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x| \leq 1 \\ x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$D(y) = (-1; 0) \cup (0; 1]$  — природна область визначення. Якщо за умовою задачі  $x$  — відстань, а це означає, що  $x \geq 0$ , тоді  $D(y) = (0; 1]$  — задана область визначення.

**Означення.** Функція  $y = f(x)$  називається *парною (непарною)*, якщо для будь-якого  $x \in D$  виконується умова  $f(-x) = f(x)$ , ( $f(-x) = -f(x)$ ).

Функція буде ні парною, ні непарною, якщо для  $x \in D$ ,  $f(-x) \neq \pm f(x)$ .

**Приклад.**  $y = \cos x$  — парна функція (графік функції симетричний відносно осі ординат (рис. 2)), бо  $y(x) = \cos(-x) = \cos x = y(x)$ ;  $y = \operatorname{arctg} x$  — непарна функція (графік функції симетричний відносно початку координат (рис. 3)), бо  $y(-x) = \pm \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x = -y(x)$ ;  $y = \operatorname{arccos} x$  — ні парна, ні непарна (рис. 4), бо  $y(-x) = \operatorname{arccos}(-x) = \pi - \operatorname{arccos} x \neq \pm y(x)$ .

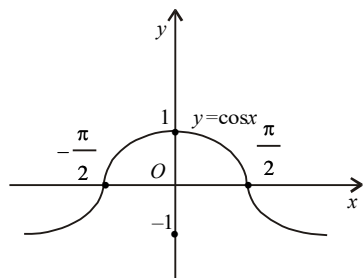


Рис. 2

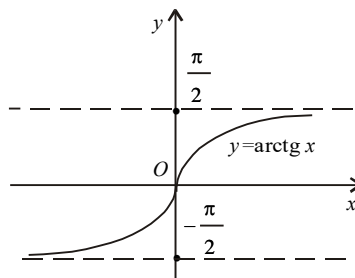


Рис. 3

**Означення.** Функція  $y = f(x)$  називається *періодичною*, якщо для  $x \in D$  виконується умова  $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$ , де число  $T$  — період функції.

**Приклад.**  $y = \operatorname{tg} x$  — періодична функція з мінімальним періодом  $T = \pi$  (див. рис. 5), бо  $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x$ .

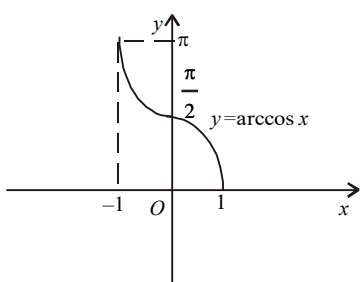


Рис. 4

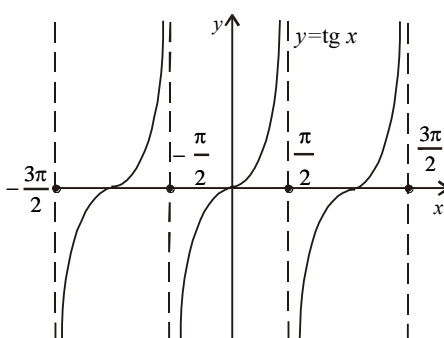


Рис. 5

**Означення.** Функція  $y = f(x)$  називається *обмеженою на множині  $D$* , якщо для всіх  $x \in D$  виконується умова  $|f(x)| \leq M$ , де  $M > 0$  — деяке скінченне число.

**Приклад.**  $y = \arcsin x$  — обмежена функція для всіх  $x \in [-1; 1]$  (рис. 6), бо  $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Означення.** Функція  $y = f(x)$  називається *монотонно зростаючою (спадною)* на множині  $D$ , якщо для всіх  $x \in D$  більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції, тобто  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$  ( $f(x_2) < f(x_1)$ ).

**Приклад.**  $y = \log_a x$  — монотонно спадна функція при  $0 < a < 1$ , а при  $a > 1$  — монотонно зростаюча (рис. 7).

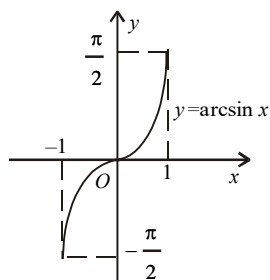


Рис. 6

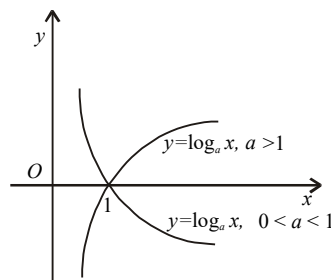


Рис. 7

## Елементарні функції

Основні з них:

- 1) степенева  $y = x^a$ ;
- 2) показникова  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  (рис. 8);
- 3) логарифмічна  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  (рис. 7);
- 4) тригонометричні:  $y = \cos x$  (рис. 3.2);  $y = \sin x$  (рис. 9);  $y = \operatorname{tg} x$  (рис. 5);  $y = \operatorname{ctg} x$  (рис. 10);
- 5) обернені тригонометричні:  $y = \arcsin x$  (рис. 6);  $y = \arccos x$  (рис. 4);  $y = \operatorname{arctg} x$  (рис. 5);  $y = \operatorname{arcctg} x$  (рис. 11).

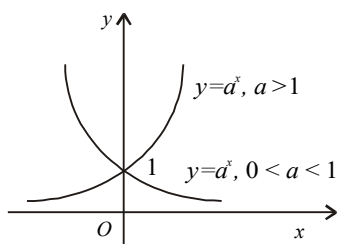


Рис. 8

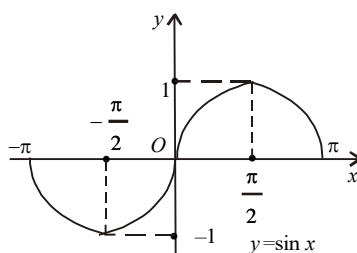


Рис. 9

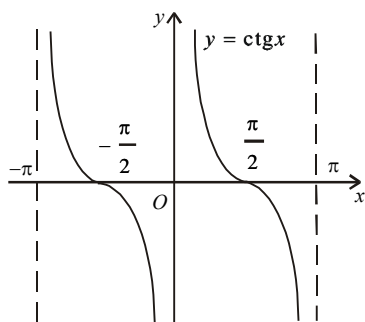


Рис. 10

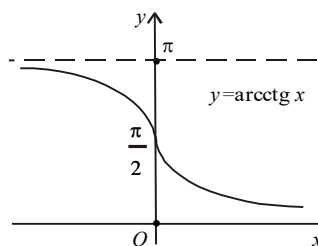


Рис. 11

Функція вважається *елементарною*, якщо вона може бути побудована з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості алгебраїчних дій та суперпозицій, наприклад:

$$y = 2^{\operatorname{tg}^3(x^2 + \arcsin \sqrt{x})} + \cos^2\left(\log_2\left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}\right)\right) \text{ — елементарна функція.}$$

**Означення.** Функція  $y = y(x)$  називається *алгебраїчною*, якщо  $y(x)$  — розв'язок рівняння

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$$

де  $P_i(x)$ ,  $i = \overline{0, n}$  — многочлени.

**Приклад.** Функція  $y = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x-1}}$  буде алгебраїчною, бо вона є розв'язком рівняння

$$y^3(x-1) - (x^2+1) = 0.$$

Усі неалгебраїчні функції називаються *трансцендентними*.

Алгебраїчні функції поділяються на *раціональні* (цілі й дробові) та *ірраціональні*.

Цілою раціональною функцією буде упорядкований многочлен

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, a_i \in R.$$

Дробово-раціональною функцією буде відношення многочленів

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ або } y = R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}.$$

### Зразки розв'язування вправ

**Приклад 1.** Знайти область визначення функції  $y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$ .

Функція визначена, якщо  $x-1 \neq 0$  та  $1+x > 0$ . Таким чином, областю визначення функції є:  $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

**Приклад 2.** Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}.$$

Перший доданок  $\sqrt{1-2x}$  набуває дійсних значень при  $1-2x \geq 0$ , а другий — при  $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$ . Розв'язавши здобуту систему нерівностей, знайдемо область визначення функції:

$$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

**Приклад 3.** Визначити, яка із заданих функцій парна чи непарна: а)  $y = x^2 \sqrt[3]{x} + 2 \sin x$ ; б)  $y = 2^x + 2^{-x}$ ; в)  $y = x^2 + 5x$ .

а) Оскільки  $f(-x) = (-x)^2 \sqrt[3]{-x} + 2 \sin(-x) = (x^2 \sqrt[3]{-x} + 2 \sin x) = -f(x)$ , то функція непарна.

б) Маємо  $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x)$ .

Функція парна.

в) Тут  $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x \neq \pm f(x)$ .

Таким чином, функція не є ні парною, ні непарною.