

2.6 Застосування диференціального числення для дослідження функцій

Зростання та спадання функцій

Нагадаємо: функція $f(x)$ називається *зростаючою на проміжку*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_2 > x_1$ то $f(x_2) > f(x_1)$); функція *спадна* на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Теорема 1 (необхідна умова зростання (спадання) функції):

1. Якщо диференційовна функція зростає на деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна на цьому проміжку.
2. Якщо диференційовна функція спадає на деякому проміжку, то похідна цієї функції недодатна на цьому проміжку.

Теорема 2 (достатня умова зростання (спадання) функції):

1. Якщо похідна диференційовної функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому проміжку.
2. Якщо похідна диференційовної функції від'ємна всередині проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.

Приклад. Знайти проміжки зростання та спадання функції $y = 8x - x^2$.

Область визначення функції — уся числова вісь $-\infty < x < +\infty$. Знайдемо похідну $y' = 8 - 2x$. Функція диференційовна на проміжку $-\infty < x < +\infty$.

Для визначення проміжку зростання функції розв'яжемо нерівність $8 - 2x > 0$, $x < 4$, тобто функція зростає на проміжку $-\infty < x < 4$.

При визначенні проміжку спадання функції (рис. 4.8) маємо $8 - 2x < 0$, тобто $4 < x < +\infty$.

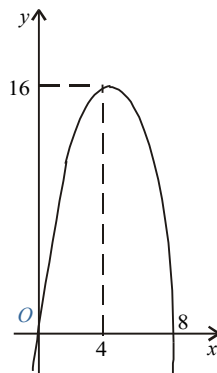


Рис. 1

Екстремуми функцій

Означення. При значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має максимум $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність (рис. 2) $f(x_1) > f(x)$ ($x \neq x_1$). Аналогічно: при значенні x_2 аргументу x функція $f(x)$ має мінімум $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 має місце нерівність (див. рис. 2) $f(x_2) < f(x)$ ($x \neq x_2$).

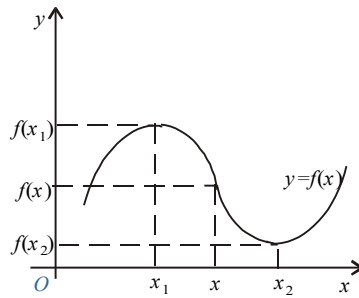


Рис. 2

Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції, а ті значення аргументу, при яких досягаються екстремуми функції, називаються точками екстремуму функції (відповідно точками максимуму або мінімуму функції).

Екстремум функції, у загальному випадку, має локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно з ближніми її значеннями.

Необхідна умова екстремуму функції.

Теорема. У точці екстремуму диференційовної функції похідна її дорівнює нулю:

$$f'(x_2) = 0. \quad (2.6.1)$$

Геометрична умова (4.19) означає, що в точці екстремуму диференційовної функції $y = f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі Ox (рис. 3).

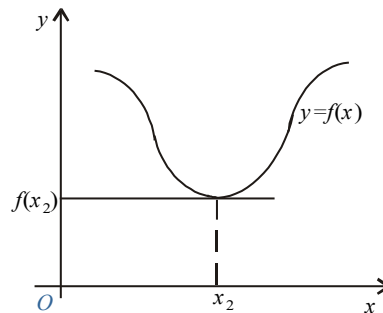


Рис. 3

Наслідок. Неперервна функція може мати екстремум тільки в тих точках, де похідна функції дорівнює нулю або не існує.

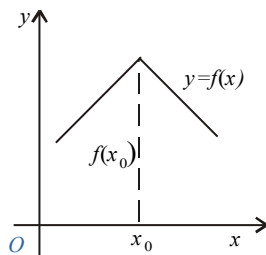


Рис. 4

Справді, якщо в точці x_0 екстремуму функції $f(x)$ існує похідна $f'(x_0)$, то, згідно з даною теоремою, ця похідна дорівнює нулю.

Те, що в точці екстремуму неперервної функції похідна може не існувати, показує приклад функції, графік якої має форму «ламаної» (рис. 4).

Ті значення аргументу x , які для заданої функції перетворюють на нуль її похідну $f'(x)$ або для якої похідна $f'(x)$ не існує (наприклад, перетворюється на нескінченність), називаються *критичними значеннями аргументу* (*критичними точками*).

Достатні умови екстремуму функції. Із того, що $f'(x_0) = 0$, не випливає, що функція $f(x)$ має екстремум при $x = x_0$.

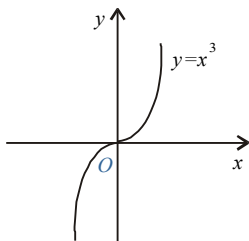


Рис. 5

Наприклад, нехай $f(x) = x^3$. Тоді $f'(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$, однак значення $f(0) = 0$ не є екстремумом даної функції, оскільки різниця $f(x) - f(0)$ змінює знак при зміні знаку аргументу x (рис. 5).

Отже, не для будь-якого критичного значення аргументу функції $f(x)$ має місце екстремум цієї функції. Через це поряд з необхідною умовою існують достатні умови існування екстремуму функції.

Теорема 1 (перше правило).

Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0 , і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

- 1) змінює знак з «+» на «-», то при $x = x_0$ функція має максимум;
- 2) змінює знак «-» на «+», то функція має у цій точці мінімум;
- 3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.

Геометрична ілюстрація теореми 1 (рис. 6). Нехай у точці $x = x_1$ маємо $f'(x_1) = 0$ і для всіх x , достатньо близьких до точки x_1 , виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ при } x < x_1; \\ f'(x) < 0 \text{ при } x > x_1. \end{cases}$$

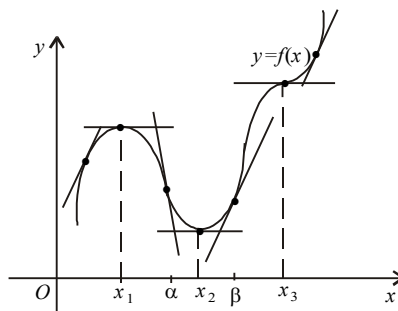


Рис. 6

Тоді при $x < x_1$ дотична до кривої утворює з віссю Ox гострий кут — функція зростає, а при $x > x_1$ дотична утворює з віссю Ox тупий кут — функція спадає; при $x = x_1$ функція переходить від зростання до спадання, тобто має максимум.

Якщо в точці x_2 маємо $f'(x_2) = 0$ і для всіх значень x , достатньо близьких до точки x_2 , виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x > x_2, \\ f'(x) < 0, & x < x_2, \end{cases}$$

то при $x < x_2$ дотична до кривої утворює з віссю Ox тупий кут — функція спадає, а при $x > x_2$ дотична до кривої утворює гострий кут — функція зростає. При $x = x_2$ функція переходить від спадання до зростання, тобто має мінімум.

Якщо при $x = x_3$ маємо $f'(x_3) = 0$ і для всіх значень x , достатньо близьких до x_3 , виконуються нерівності $f'(x) > 0$ при $x < x_3$; $f'(x) > 0$ при $x > x_3$, то функція зростає як при $x < x_3$, так і при $x > x_3$. Звідси при $x = x_3$ функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

Зауваження. На основі даної теореми можна сформулювати таке правило для дослідження неперервної функції $y = f(x)$ на максимум і мінімум.

1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.
 2. Обчислюємо критичні значення аргументу x (критичні точки), для цього:
 - а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x)=0$;
 - б) знаходимо значення x , для яких похідна $f'(x)$ має розрив.
 3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки. Оскільки знак похідної залишається сталим в інтервалі між двома критичними точками, для дослідження знака похідної ліворуч і праворуч, наприклад від критичної точки x_2 (див. рис. 4.13), досить визначити знак похідної в точках α і β ($x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$), де x_1 і x_3 — найближчі критичні точки).
 4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.
- Таким чином, маємо таке схематичне зображення можливих випадків:

x (досліджуваний інтервал змінної)	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, x_3)
$f'(x)$ (знак похідної в досліджуваному інтервалі)	+	$f'(x_2) = 0$ або не існує	-
	-		+
$f(x)$ (характер поведження функції)	+ (-)		+ (-)
	Функція зростає ↗	↘ Точка максимуму	Функція спадає ↘
	Функція спадає ↘	↗ Точка мінімуму	Функція зростає ↗
	Функція зростає (спадає) ↗ ↘	Немає ні максимуму, ні мінімуму	Функція зростає (спадає) ↗ ↘

Приклад. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

1. Знаходимо першу похідну $y' = x^2 - 4x + 3$.
 2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$ ($f'(x) = 0$). Звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.
 3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty, +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$.
- Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x = 0 \in (-\infty, 1), y'(0) = 3 > 0;$$

$$x = 2 \in (1, 3), y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0;$$




$$x = 4 \in (3, +\infty), y'(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 11 > 0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 4.1).

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення $x = 1$ похідна змінює знак з «+» на «-». Звідси, при $x = 1$ функція має максимум:

$$y_{\max}(1) = \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{3}.$$

Таблиця 4.1

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y		 $y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$		 $y_{\min}(3) = 1$	

При переході через значення $x = 3$ похідна змінює знак з «-» на «+». Звідси, при $x = 3$ функція має мінімум:

$$y_{\min}(3) = \frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$$

На інтервалі:

- 1) $(-\infty, 1)$ — функція зростає;
- 2) $(1, 3)$ — спадає;
- 3) $(3, +\infty)$ — зростає.

Крім того,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 \right) = \pm\infty.$$

На основі проведеного дослідження будемо графік функції (рис. 7).

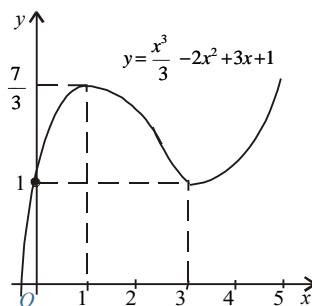


Рис. 7

Теорема 2 (друге правило). Якщо для диференційовної функції $f(x)$ у деякій точці x_0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то:

- 1) якщо друга похідна $f''(x_0) > 0$, то в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум;
- 2) якщо $f''(x_0) < 0$ — максимум;
- 3) якщо $f''(x_0) = 0$ — питання залишається відкритим, і для його розв'язання треба застосувати перше правило.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовується.

Приклад. За допомогою другої похідної дослідити на екстремум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Перша похідна цієї функції $y' = x^2 - 4x + 3$ перетворюється в нуль у точках $x = 1$ і $x = 3$ (див. попередній приклад).

Друга похідна $y'' = 2x - 4$:

а) при $x = 1$ $y''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0$, звідси в точці $x = 1$ функція має максимум $y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$;

б) при $x = 3$ $y''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$, тобто в точці $x = 3$ функція має мінімум $y_{\min}(3) = 1$ (див. рис. 7).

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення.

Найбільше значення функції на проміжку $[a; b]$ називається *абсолютним максимумом*, а найменше — *абсолютним мінімумом*.

Припустимо, що на даному проміжку функція $f(x)$ має скінченне число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається в середині проміжку $[a; b]$, то очевидно, що це значення буде одним із максимумів функції (якщо існує кілька максимумів), точніше — найбільшим максимумом. Однак можливо, що найбільше значення досягатиметься на одному з кінців проміжку.

Таким чином, **функція на відрізку $[a, b]$ досягає свого найбільшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій точці його, яка є точкою максимуму.**

Аналогічне твердження можна сформулювати й про найменше значення функції: **воно досягається на одному з кінців даного проміжку або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму.**

Правило. Якщо треба знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку $[a, b]$, то необхідно:

- 1) знайти всі максимуми функції на проміжку;
- 2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити $f(a)$ і $f(b)$;
- 3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше: воно й буде найбільшим значенням функції на проміжку.

Аналогічно треба діяти і при визначенні найменшого значення функції на проміжку.

Приклад. Визначити на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ найбільше й найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 3$.

1. Знаходимо максимуми й мінімуми функції на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$:

$$y' = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1;$$

$$y'' = 6x, y''(1) = 6 > 0.$$

Таким чином, у точці $x = 1$ маємо мінімум: $y_{\min}(1) = 1$.

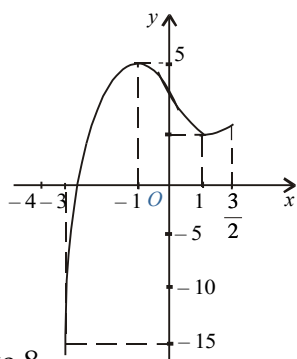


Рис.8

Далі, $y''(-1) = -6 < 0$, тобто в точці $x = -1$ маємо максимум:

$$y_{\max}(-1) = 5.$$

2. Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}, \quad y(-3) = -15.$$

3. Таким чином, найбільше значення заданої функції на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ є: $y_{\text{найб}} = y_{\max}(-1) = 5$, а найменше — $y_{\text{найм}} = y(-3) = -15$. Графік функції зображено на рис. 8.

Опуклість і вгнутість кривої. Точка перегину

Означення. Крива на проміжку називається *опуклою* (вгнутою), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

З графіка функції $y = f(x)$ (рис. 4.16) бачимо: крива $y = f(x)$ є опуклою на проміжку (a, c) і вгнутою на проміжку (c, b) .

Означення. Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається *точкою перегину*. На рис. 4.16 точка M — точка перегину.

Наведемо дві теореми.

Теорема 1. 1) Якщо в усіх точках проміжку (c, b) для функції $y = f(x)$ друга її похідна додатна ($f''(x) > 0$), то графік функції вгнутий.

2) Якщо в усіх точках проміжку (a, c) друга похідна від'ємна ($f''(x) < 0$), то графік функції випуклий.

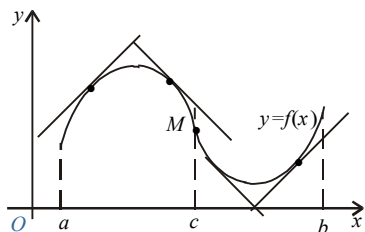


Рис. 9

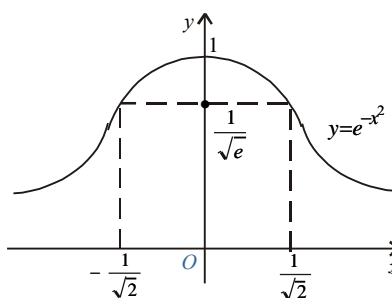


Рис. 10

Теорема 2. Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на обернений, то точка $M(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0, f(x_0))$ не є точкою перегину.

Приклад. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

$$\text{Маємо } y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}.$$

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0, \text{ звідки } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції (рис. 10).

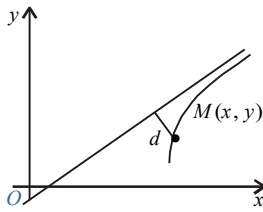
Результати дослідження заносимо в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
	+	0	-	0	+
	∪	Перегин	∩	Перегин	∪

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

Асимптоти

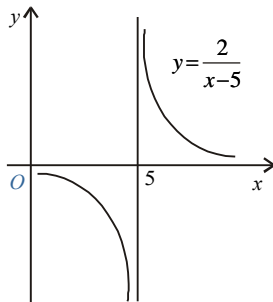


Змінна точка M рухається по кривій у нескінченність, коли відстань від цієї точки до початку координат необмежено зростає.

Означення. Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань d від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля (4.18). Асимптоти бувають

вертикальні й похилі.

Вертикальні асимптоти. Якщо



$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty,$$

або $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y = f(x)$.

Приклад. Крива $y = \frac{2}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x = 5$, оскільки $\lim_{x \rightarrow 5 \pm 0} y = \pm \infty$ (рис. 4.19).

Рис. 11

асимптоту $y = kx + b$, тоді

Похилі асимптоти. Нехай крива $y = f(x)$ має похилу

$$\left. \begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Якщо хоча б одна з границь (4.20) не існує, то крива похилих асимптот у відповідній напівплощині не має.

Приклад. Визначити асимптоти кривої $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} y = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \left(x + 2 - \frac{1}{x} \right) = \mp \infty,$$

то пряма $x = 0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y = kx + b$, тоді

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2.$$

Отже, пряма $y = x + 2$ — похила асимптота для графіка функції (рис. 12).

План дослідження функцій і побудови їхніх графіків

При дослідженні функцій треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.

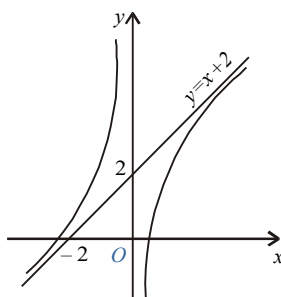


Рис. 12

8. Знайти асимптоти.

9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $\{-\infty < x < 1; 1 < x < +\infty\}$.

2. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} y = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} (x - 1)^2} = +\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Ox : $y = 0$, $\frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = 0$, $2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; з віссю Oy : $x = 0$, $y = \frac{-1}{1} = -1$, $(0; -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 4.3:




$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3}; y' = 0 \Rightarrow$$

$-2x=0 \Rightarrow x=0$ — критична точка. При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x=0$ на екстремум:

при $x=-1$ $y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-)$;

при $x=\frac{1}{2}$ $y' = \frac{-1}{-1/8} = 8 > 0(+)$.

Таблиця 4.3

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
	-	0	+	Не існує	-
		$y_{\min}(-1)$		Не існує	

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «-» на «+», через це в точці $x=0$ функція має мінімум:

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x=1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$; при $x=1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x=-\frac{1}{2}$:

при $x=-1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0(-)$;

при $x=0$ $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x=-\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0,9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий. Результати дослідження заносимо у табл. 4.4.

Таблиця 4.4

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
	+	0	+	Не існує	+
	∩	Перегин (-8/9)	∪	Не існує	∪

7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будемо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на рис. 4.21: $(-5; -0,3)$, $(\frac{2}{3}, 3)$, $(2; 3)$, $(3; 1,3)$.

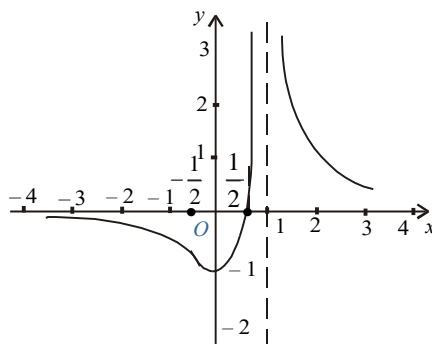


Рис. 13

Зразки розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Чисельник та знаменник дроби окремо прямують до нуля при $x \rightarrow 0$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$).

Використовуючи правило Лопіталя, дістаємо

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Приклад 2. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{x/2}}{x + e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{x/2}}{x + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} e^{x/2} \left(2 + \frac{x}{2}\right)}{e^x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{x}{2}}{e^{x/2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/2}{\frac{1}{2} e^{x/2}} = 0.$$

Приклад 3. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x) = [0 \cdot \infty]$.

Подамо добуток функцій у вигляді дроби, а потім, діставши невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Приклад 4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = [\infty - \infty]$.

Зведемо дроби до спільного знаменника. Маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. До неї застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(2 + x)} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 5. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = [\infty^0]$.

Позначимо задану функцію через y : $(\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = y$.

Прологарифмуємо її $\ln y = 2 \cos x \ln \operatorname{tg} x = \frac{2 \ln \operatorname{tg} x}{1/\cos x}$.

Обчислимо границю знайденого виразу за допомогою правила Лопіталя (маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln y &= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sec x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x \cdot 1/\operatorname{tg} x}{\sec x \cdot \operatorname{tg} x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0, \text{ тобто } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\ln x} = [1^\infty]$.

Логарифмуючи та застосовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \cdot \ln(1 + x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{1/\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1 + x)}{-1/(x \ln^2 x)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln^2 x}{x + 1} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{1 + \frac{1}{x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x} \ln x}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$.

Приклад 7. Знайти інтервали зростання та спадання функції

$$y = x(1 + \sqrt{x}).$$

Знайдемо похідну $y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Похідна додатна на проміжку $[0, +\infty)$. Таким чином, функція зростає на всій області означення.

Приклад 8. Дослідити на екстремум функцію $y = x \cdot \sqrt{1-x^2}$.

Функція визначена при $-1 \leq x \leq 1$. Знайдемо першу похідну $y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0$ при $1-2x^2 = 0$; звідси $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$ (стаціонарні точки); y' не існує ($y' = \infty$) при $x = \pm 1$, тобто на межах області визначення функції.

Знайдемо другу похідну: $y'' = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Обчислимо значення другої похідної в стаціонарних точках:

$$y''(1/\sqrt{2}) = \frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} < 0, \quad y''(-1/\sqrt{2}) = -\frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} > 0.$$

Отже, у точці $x = 1/\sqrt{2}$ функція має максимум

$$y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

у точці $x = -1/\sqrt{2}$ — має мінімум:

$$y_{\min} = -\frac{1}{2}.$$

У критичних точках $x = \pm 1$ екстремуму немає, бо за означенням точками екстремуму можуть бути лише внутрішні точки області визначення функції.

Приклад 9. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3x - x^2$ на сегменті $[-2, 3]$.

Знайдемо першу похідну $f'(x) = 3 - 2x$ та стаціонарні точки: $3 - 2x = 0$, тобто $x = 1.5$. Визначимо значення функції в стаціонарних точках та на кінцях сегмента: $f(1.5) = 2.25$, $f(-2) = -2$, $f(3) = -18$.

З одержаних чотирьох значень вибираємо найбільше та найменше: $f_{\max} = f(1.5) = 2.25$, $f_{\min} = f(3) = -18$.

Приклад 10. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{x^3/(x-2)}$.

Функція визначена на інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(2, +\infty)$. Із-за того, що $\lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt{x^3/(x-2)} = +\infty$, пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою кривої.

Визначимо тепер існування похилих асимптот:

$$1) k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x/(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1/(1-\frac{2}{x})} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}} \left(1 + \sqrt{1-\frac{2}{x}} \right)} = 1;$$

$$2) k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x} + \sqrt{2-x})} = -1.$$

Таким чином, існують права $y = x + 1$ та ліва $y = -x - 1$ похилі асимптоти кривої.