2.7 Формула Тейлора

Допустимо, що функція $y = f(x)$ має всі похідні до $(n+1)$-го порядку включно на деякому проміжку, який містить точку $x = a$. Знайдемо многочлен $P_n(x)$ степеня, не більшого за *n*, значення якого в точці $x = a$ дорівнює значенню функції *f*(*x*) в цій точці, а значення його похідних до *n*-го порядку в точці $x = a$ дорівнюють значенням відповідних похідних від функції *f*(*x*) у цій точці

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (4.24)$$

Шукатимемо цей многочлен у формі многочлена за степенями $(x-a)$ з невідомими коефіцієнтами

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots + C_n(x-a)^n. \quad (4.25)$$

Продиференціювавши *n* разів вираз (4.25), дістанемо:

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x) = 2\cdot 1 C_2 + 3\cdot 2\, C_3(x-a) + \dots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}\right\} \quad (4.26)$$

Візьмемо у виразах (4.25) та (4.26) $x = a$. Результат підставимо в рівності (4.24), маємо:

$$\begin{array}{l} f(a) = C_0, \\ f'(a) = C_1, \\ f''(a) = 2\cdot 1\cdot C_2, \\ f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}$$

Звідки:

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = f(a),\ C_1 = f'(a),\ C_2 = \dfrac{1}{1\cdot 2} f''(a), \\ C_3 = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a), \dots, C_n = \dfrac{1}{1\cdot 2\dots n} f^{(n)}(a). \end{array}\right\} \quad (4.26)$$

Підставляючи знайдені значення $C_1, C_2, \dots, C_n$ (4.26) у формулу (4.25), одержимо шуканий многочлен у вигляді:

$$\begin{array}{l} P_n(x) = f(a) + \dfrac{x-a}{1!} f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dfrac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \\ \qquad + \dfrac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a). \end{array} \quad (4.27)$$

Позначимо через $R_n(x)$ різницю значень заданої функції $f(x)$ та побудованого многочлена $P_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

звідки

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

або, у розгорнутому вигляді:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x). \qquad (4.28)$$

$R_n(x)$ називається залишковим членом у формулі Тейлора (4.28). Для тих значень *x*, для яких залишковий член $R_n(x)$ малий, многочлен $P_n(x)$ дає наближене подання функції *f*(*x*).

Оцінимо залишковий член $R_n(x)$ при різних значеннях *x*, для цього запишемо його в вигляді

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x), \qquad (4.29)$$

де $Q(x)$ — невідома функція.

Згідно з (4.29) формула (4.28) запишеться так:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \qquad (4.30)$$

Для значень *t* (*t* лежить між величинами *a* та *x*) введемо допоміжну функцію:

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\ldots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \qquad (4.31)$$

Знайдемо похідну $F'(t)$ від функції $F(t)$ (4.31):

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{x-t}{1!}f''(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f''(t)-$$
$$-\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)+\ldots-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)-$$
$$-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q(x),$$

або, після скорочення:

$$F'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}Q(x). \qquad (4.32)$$

На основі формул (4.30) та (4.31) можна встановити: $F(x)=0,\ F(a)=0.$

Таким чином, функція $F(t)$ задовольняє умови теореми Ролля $\Rightarrow$ між величинами *a* та *x* існує таке значення $t=\xi,$ при якому $F'(\xi)=0.$ Згідно з (4.32) маємо

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^n}{n!}Q(x)=0,$$

або

$$Q(x)=f^{(n+1)}(\xi).$$

Підставляючи цей вираз у формулу (4.29), маємо:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Здобута рівність називається *залишковим членом у формі Лагранжа*.

Оскільки величина ξ лежить між величинами $\underline{x}$ та *a*, то її можна подати у вигляді $\xi=a+\Theta(x-a),$ де $0<\Theta<1;$ тоді формула для залишкового члена набирає вигляду:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a)).$$

Вираз

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}\,f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a)), \qquad (0<\Theta<1)$$

називається формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.

Узявши у формулі a = 0, дістанемо формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}\,f'(0)+\frac{x^2}{2!}\,f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}\,f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\Theta\, x). \quad (4.33)$$

Розклад за формулою Маклорена функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$

Розклад функції $f(x)=e^x$**.** Послідовно диференціюючи функцію e^x, дістаємо:

$$\begin{aligned}&f(x)=e^x, \quad f(0)=1;\\ &f'(x)=e^x, \quad f(0)=1;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f^{(n)}(x)=e^x, \quad f(0)=1.\end{aligned}$$

Підставляючи здобуті вирази у формулу (4.33), маємо:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x}, \ \ 0<\Theta<1.$$

Нехай $|x|\le 1,\ n=8.$ Оцінка залишкового члена в цьому разі така:

$$R_8<\frac{1}{9!}<10^{-5}.$$

При x = 1 маємо формулу для знаходження наближеного значення числа e:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}\approx 2{,}71828\,,$$

при цьому допущена похибка не перевищує числа $\frac{3}{9!}$ або 0,00001.

Можна також показати, що для будь-яких $|x|>1$

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x}=0.$$

Таким чином, для будь-яких $x\in(-\infty,+\infty)$, взявши достатнє число членів, можна обчислити e^x з заданим степенем очності.

Розклад функції $f(x)=\sin x$. Знаходимо послідовно похідні від $f(x)=\sin x$:

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=\sin x, & f(0)=0; \\
f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right), & f'(0)=1; \\
f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\dfrac{\pi}{2}\right), & f''(0)=0; \\
f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\dfrac{\pi}{2}\right), & f'''(0)=-1; \\
f^{(4)}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\dfrac{\pi}{2}\right), & f^{(4)}(0)=0; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right), & f^{(n)}(0)=\sin\dfrac{\pi n}{2}; \\
f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right), & f^{(n+1)}(\xi)=\left(\xi+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) \\
 & (\xi=\Theta x,\ 0<\Theta<1).
\end{array}
$$

Підставляючи здобуті значення у формулу (4.33), дістаємо розклад функції $f(x)=\sin x$ за формулою Маклорена:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Оскільки $\left|\sin\left(\xi+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\le 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ для всіх $x\in(-\infty,+\infty)$.

Застосуємо здобуту формулу для наближеного обчислення sin 20°. Візьмемо n = 3, тобто обмежимося двома першими членами розвинення:

$$\sin 20^\circ \approx \sin\frac{\pi}{9}\approx\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3=0{,}342.$$

Оцінимо зроблену похибку, яка дорівнює залишковому члену:

$$|R_3|=\left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\frac{1}{4!}\sin(\xi+2\pi)\right|\le\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\frac{1}{4!}\approx 0{,}00062<0{,}001.$$

Розклад функції $f(x)=\cos x$. Знаходячи значення послідовних похідних при x = 0 від функції $f(x)=\cos x$ та підставляючи у формулу Маклорена, дістаємо:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),\quad |\xi|<|x|.$$

Тут $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ при всіх $x\in(-\infty,+\infty)$.

Розклад функції $f(x)=\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1},\ |\xi|<|x|.$$

Тут $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)}\left(\dfrac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}=0$ при $-1<x<1$.

Розклад функції $f(x)=(1+x)^m$:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\Theta x)^{m-n-1},\ 0<\Theta<1.$$

Тут $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}\ x^{n+1}(1+\Theta x)^{m-n-1} = 0$ при $|x|<1$.

Приклад. Подати функцію $f(x)=\sqrt[3]{x}$ у вигляді многочлена п'ятого степеня відносно двочлена $x-1$.

● Обчислимо значення функції $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ та її похідних до п'ятого порядку включно при $a = 1$:

$$f(1)=1,\qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\qquad f'(1)=\frac{1}{3};$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},\qquad f''(1)=-\frac{2}{9};$$
$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}},\qquad f'''(1)=\frac{10}{27};$$
$$f^{(4)}(x)=-\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}},\qquad f^{(4)}(1)=-\frac{80}{81};$$
$$f^{(5)}(x)=\frac{880}{243}x^{-\frac{14}{3}},\qquad f^{(5)}(1)=\frac{880}{243}.$$

Звідси, за формулою Тейлора дістанемо:

$$\sqrt{x} = 1+\frac{1}{3}(x-1)+\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-$$
$$-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-1)^5+R_5,$$

де $R_5 = \dfrac{f^{(6)}(\Theta x)}{6!}(x-1)^6 = -\dfrac{12320}{729\cdot 6!}(\Theta x)^{-17/3}(x-1)^6,\quad 0<\Theta<1.$

Приклад. Обчислити з точністю до 10^{-3} наближене значення $\sqrt[3]{29}$.

Запишемо задане число так: $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=3\left(1+\dfrac{2}{27}\right)^{1/3}$. Використаємо розклад:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n.$$

Звідси одержимо наближену рівність

$$(1+x)^m \approx 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

похибка якої

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\Theta x)^{m-n-1}$$

може бути зроблена як завгодно малою при $|x|<1$ та при достатньо великому n.

Візьмемо $x=\dfrac{2}{27}$ та $m=\dfrac{1}{3}$, одержимо:

$$\sqrt[3]{29}\approx 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}-\frac{2^5\cdot 5}{81^4}+\ldots+R_n\right).$$

Оцінюючи величини послідовних похибок обчислення $3|R_n|$, знаходимо:

$$3|R_1| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{81^2} < 0{,}002\,,$$

$$3|R_2| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{81^3} < 0{,}0003\,.$$

Звідси для обчислення з заданою точністю достатньо взяти три члени, які стоять у розкладі перед залишком R2, тобто $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0{,}024 - 0{,}0006) = 3{,}072$.