Навчальний модуль №2

Завдання для самостійної роботи з відповідями

2.1. Задано функцію $f(x)=x^2+6x-4$. Перевірити, що $f(1)=3$, $f(3)=24$.

2.2. $f(x)=x^2+1$. Обчислити значення:

а) $f(4)$; *Відповідь.* 17.

б) $f(\sqrt{2})$; *Відповідь.* 3.

в) $f(a+1)$; *Відповідь.* a^2+2a+2.

г) $f(a)+1$; *Відповідь.* a^2+2.

д) $f(a^2)$; *Відповідь.* a^4+1.

2.3. $f(x)=\lg x$; $\varphi(x)=x^3$. Записати вирази:

а) $f(\varphi(2))$. *Відповідь.* $3\lg 2$.

б) $f(\varphi(a))$. *Відповідь.* $3\lg a$.

2.4. Знайти області визначення функцій та побудувати їх графіки:

1) $y=\sqrt{4-x^2}$; *Відповідь.* $|x|\le 2$.

2) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$; *Відповідь.* $-1\le x\le 3$.

3) $y=1-\sqrt{2\cos 2x}$; *Відповідь.* $-\frac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\pi$.

4) $y=4\Big/\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)$; *Відповідь.* $|x|\ge 2$.

5) $y=\lg(3x-1)+2\lg(x+1)$; *Відповідь.* $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

6) $y=2^{-x^2}$. *Відповідь.* $(-\infty,\ \infty)$.

2.5. Побудувати графіки функції:

1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, 2) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,

3) $y=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, 4) $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}\right)$,

5) $y=x^3+1$, 6) $y=4-x^3$,

7) $y=x^4$, 8) $y=x^5$,

9) $y=|x|$, 10) $y=\log_2|x|$,

2.6. Довести, що при $n\to\infty$ послідовність $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ \ldots,\ 2+\frac{1}{n},\ \ldots$ має границею число 2.

2.7. Довести, що при $n\to\infty$ послідовність $\frac{7}{3},\ \frac{10}{5},\ \frac{13}{7},\ \ldots,\ \frac{3n+4}{2n+1},\ \ldots$ має границею число 1,5.

2.8. Знайти границі послідовностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3}$. *Відповідь.* $-\frac{1}{3}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}+n+1}{5n^3-\sqrt[4]{n}+3}$. *Відповідь.* 0.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}$. *Відповідь.* 1.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$. *Відповідь.* 3.

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. *Відповідь.* ∞.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$. *Відповідь.* 0.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$. *Відповідь.* $\dfrac{15}{17}$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. *Відповідь.* 1.

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$. *Відповідь.* 4.

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$. *Відповідь.* 0.

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$. *Відповідь.* 0.

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$. *Відповідь.* 0.

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$. *Відповідь.* $\dfrac{4}{3}$.

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$. *Відповідь.* 1.

2.9. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$. *Відповідь.* 9.

2.10. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$. *Відповідь.* ∞.

2.11. Знайти $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$. *Відповідь.* 0.

2.12. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. *Відповідь.* 0.

2.13. Знайти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. *Відповідь.* $-\dfrac{2}{5}$.

2.14. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}$.

2.15. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. *Відповідь.* 6.

2.16. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}$.

2.17. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{6}$.

2.18. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$. *Відповідь.* –2.

2.19. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. *Відповідь.* ∞.

2.20. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$. *Відповідь.* –1.

2.21. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$. *Відповідь.* ∞.

2.22. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$. *Відповідь.* 0.

2.23. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$. *Відповідь.* ∞.

2.24. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}$.

2.25. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$. *Відповідь.* –1.

2.26. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. *Відповідь.* 0.

2.27. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{4}$.

2.28. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$. *Відповідь.* 1.

2.29. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. *Відповідь.* 0.

2.30. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. *Відповідь.* 4.

2.31. Знайти $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{4}$.

2.32. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. *Відповідь.* 3.

2.33. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$. *Відповідь.* –1.

2.34. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{3}$.

2.35. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$. *Відповідь.* $-\dfrac{1}{4}$.

2.36. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. *Відповідь.* 3.

2.37. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{4}$.

2.38. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$. *Відповідь.* $\dfrac{5}{4}$.

2.39. Знайти $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$. *Відповідь.* $-0{,}1$.

2.40. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$. *Відповідь.* 0.

2.41. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$. *Відповідь.* $\dfrac{m}{n}$.

2.42. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$. *Відповідь.* $\dfrac{25}{9}$.

2.43. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}$.

2.44. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{x}$. *Відповідь.* m.

2.45. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$. *Відповідь.* $\dfrac{3}{4}$.

2.46. Знайти $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$. *Відповідь.* $-\dfrac{3}{2}$.

2.47. Знайти $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$. *Відповідь.* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.48. Знайти $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$. *Відповідь.* -2.

2.49. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$. *Відповідь.* $-2\sin a$.

2.50. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$. *Відповідь.* $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$.

2.51. Знайти $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$. *Відповідь.* $\dfrac{\sin 2\beta}{2\beta}$.

2.52. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x+1}$. *Відповідь.* e^{-1}.

2.53. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)^{3x+2}$. *Відповідь.* e^{-2}.

2.54. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$. *Відповідь.* e^2.

2.55. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$. *Відповідь.* 1.

2.56. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$. *Відповідь.* $\sqrt{e}$.

2.57. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$. *Відповідь.* $\sqrt{e}$.

2.58. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$. *Відповідь.* -2.

2.59. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$. *Відповідь.* e.

2.60. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. *Відповідь.* 2.

2.61. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$. *Відповідь.* 1.

2.62. Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1) $y=\frac{1}{x^2}$. *Відповідь.* $y'=-\frac{2}{x^3}$.

2) $y=\sqrt[3]{x^2}$. *Відповідь.* $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

3) $y=5\sin x+3\cos x$. *Відповідь.* $y'=5\cos x-3\sin x$.

4) $y=\frac{1}{e^x+1}$. *Відповідь.* $y'=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

5) $y=2^{x^2}$. *Відповідь.* $y'=2^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 2$.

2.63. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1) $y=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$. *Відповідь.* $y'=x^2\sqrt{x}(1-x^2)^2$.

2) $y=3x^3\cdot\ln x-x^3$. *Відповідь.* $y'=9x^2\cdot\ln x$.

3) $y=2^{3x}/3^{2x}$. *Відповідь.* $y'=\left(\frac{8}{9}\right)^x\cdot\ln\frac{8}{9}$.

4) $y=x\arccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$. *Відповідь.* $y'=\arccos\frac{x}{2}$.

5) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. *Відповідь.* $y'=\frac{1}{\cos x}$.

6) $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$. *Відповідь.* $y'=\frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

7) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(\sin x)+\ln\cos(\sin x)$. *Відповідь.* $y'=\operatorname{tg}^3(\sin x)\cdot\cos x$.

8) $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$. *Відповідь.* $y'=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

9) $y=2x\cdot\operatorname{tg}2x+\ln\cos 2x-2x^2$. *Відповідь.* $y'=4x\cdot\operatorname{tg}^2 2x$.

10) $y=\operatorname{arctg}\frac{3x-x^2}{1-3x^2}$. *Відповідь.* $y'=\frac{3}{1+x^2}$.

11) $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} - \arcsin e^x$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{2e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

12) $y = e^x \cdot 2^{5x} / 3^{4x}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}} \cdot \ln\dfrac{32e}{81}$.

13) $y = \dfrac{x^2 \cdot e^{x^2}}{x^2+1}$. *Відповідь.* $y' = 2e^{x^2} \cdot x \cdot \dfrac{x^4+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

14) $y = \log_{x^2} 2$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$.

15) $y = x^{\arcsin x}$. *Відповідь.* $y' = x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{x}\right)$.

16) $y = \dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x - x - 1)$. *Відповідь.* $y' = x(\ln x - 1)\cdot\dfrac{x^x}{e^x}\ln x$.

17) $y = \ln\left(e^x\cos x + e^{-x}\sin x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{(\cos x - \sin x)\left(e^x + e^{-x}\right)}{e^x\cos x + e^{-x}\sin x}$.

2.64. Знайти похідну y'_x від неявно заданих функцій:

1) $x\sin y + y\sin x = 0$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{y\cos x + \sin y}{x\cos y + \sin x}$.

2) $y^2 - 2xy + b = 0$. *Відповідь.* $\dfrac{y}{y-x}$.

3) $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$. *Відповідь.* $-\dfrac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$.

4) $y = 1 + xe^y$. *Відповідь.* $\dfrac{e^y}{2-y}$.

5) $y\sin x - \cos(x-y) = 0$. *Відповідь.* $\dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$.

6) $y = x + \operatorname{arctg} y$. *Відповідь.* $\dfrac{1+y^2}{y^2}$.

2.65. Знайти похідну y'_x від параметрично заданих функцій:

1) $x = 1-t^2$, $y = t - t^3$. *Відповідь.* $\left(3t^2-1\right)/(2t)$.

2) $x = \dfrac{t+1}{t}$, $y = \dfrac{t-1}{t}$. *Відповідь.* -1.

3) $x = \ln\left(1+t^2\right)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$. *Відповідь.* $\dfrac{t}{2}$.

4) $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$. *Відповідь.* $\dfrac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}$.

5) $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$. *Відповідь.* $\dfrac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}$.

2.66. Знайти похідні другого порядку від функцій:

1) $y = -\dfrac{22}{x+5}$. *Відповідь.* $y'' = -\dfrac{44}{(x+5)^3}$.

2) $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$. *Відповідь.* $y'' = \ln x$.

3) $y = -\frac{1}{9}x\sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$. *Відповідь.* $y'' = x \cdot \sin 3x$.

4) $y = xe^{x^2}$. *Відповідь.* $2e^{x^2}\left(3x + 2x^3\right)$.

5) $y = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x$. *Відповідь.* $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$.

6) $y = e^{\sqrt{x}}$. *Відповідь.* $\frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}$.

2.67. Знайти похідні третього порядку від функцій:

1) $y = ax^2 + bx + c$. *Відповідь.* $y''' = 0$.

2) $y = \ln\sin x$. *Відповідь.* $y''' = 2\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec}^2 x$.

3) $y = \frac{x}{6(x+1)}$. *Відповідь.* $y''' = \frac{1}{(x+1)^4}$.

4) $y = \frac{1}{2}\ln^2 x$. *Відповідь.* $y''' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$.

2.68. Знайти похідні n-го порядку від функцій:

1) $y = 2^x + 2^{-x}$. *Відповідь.* $y^{(n)} = \left(2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x}\right)\ln^n 2$.

2) $y = a^x$. *Відповідь.* $y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$.

3) $y = \ln(1+x)$. *Відповідь.* $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

4) $y = \frac{1-x}{1+x}$. *Відповідь.* $y^{(n)} = 2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

5) $y = xe^x$. *Відповідь.* $y^{(n)} = e^x(x+n)$.

2.69. Знайти границі за правилом Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$. *Відповідь.* $\frac{3}{5}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$. *Відповідь.* 2.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x}$. *Відповідь.* $\frac{\alpha}{\beta}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. *Відповідь.* $\frac{1}{3}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$. *Відповідь.* $-\frac{1}{2}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. *Відповідь.* –2.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. *Відповідь.* 2.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$. *Відповідь.* 1.

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{2}{3}$.

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cos x}{x^{4}}$. *Відповідь.* $\frac{1}{3}$.

12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\operatorname{ctg}\pi x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{\pi}$.

13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}x\right)$. *Відповідь.* 1.

14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)\cdot\operatorname{ctg}x$. *Відповідь.* 0.

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$. *Відповідь.* 0.

16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$. *Відповідь.* e^{2}.

17) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. *Відповідь.* $-\dfrac{1}{2}$.

18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2}}-\operatorname{ctg}^{2}x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{2}{3}$.

19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\pi-2x\right)^{\cos x}$. *Відповідь.* 1.

20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{3/x^{2}}$. *Відповідь.* e^{-6}.

21). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^{x}\right)^{1/x}$. *Відповідь.* 2.

22) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$. *Відповідь.* $e^{1/3}$.

2.70. Показати, що функція $y=2x^{3}+3x^{2}-12x+1$ спадає на інтервалі (–2, 1).

2.71. Показати, що функція $y=x^{3}+x$ скрізь зростає.

2.72. Показати, що функція $y=\operatorname{arctg}x-x$ скрізь спадає.

2.73. Знайти інтервали монотонності функцій:

1) $y=x^{4}-2x^{2}-5$.

Відповідь. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ — спадає; $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ — зростає.

2) $y=2-3x+x^{3}$.

Відповідь. На інтервалах $(-\infty,-1)$ та $(1,+\infty)$ функція зростає; на інтервалі (– 1, 1) — спадає.

3) $y=\left(x^{2}-1\right)^{3/2}$.

Відповідь. При $x > 1$ зростає; при $x < -1$ спадає.

4) $y=xe^{-x}$.

Відповідь. При $x < 1$ зростає; при $x > 1$ спадає.

5) $y=(2-x)(x+1)^{2}$.

Відповідь. При $|x|>1$ спадає; при $|x|<1$ зростає.

6) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

Відповідь. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ — зростає; $(-1,1)$ — спадає.

7) $y=x-e^x$.

Відповідь. $(-\infty,0)$ — зростає; $(0,+\infty)$ — спадає.

8) $y=x^2e^{-x}$.

Відповідь. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ — спадає; $(0,2)$ — зростає.

9) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Відповідь. $(0,1)\cup(1,e)$ — спадає; $(e,+\infty)$ — зростає.

10) $y=2x^2-\ln x$.

Відповідь. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ — спадає; $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ — зростає.

2.74. Знайти екстремуми функцій:

1) $y=2x^3-3x^2$. *Відповідь.* $y_{\max}(0)=0,\ y_{\min}(1)=-1$.

2) $y=2x^3-6x^2-18x+7$. *Відповідь.* $y_{\max}(-1)=17,\ y_{\min}(3)=-47$.

3) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$. *Відповідь.* $y_{\max}(0)=4,\ y_{\min}(-2)=\dfrac{8}{3}$.

4) $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$. *Відповідь.* $y_{\max}(0)=2,\ y_{\min}(2)=\sqrt[3]{4}$.

5) $y=x+\sqrt{3-x}$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\dfrac{11}{4}\right)=\dfrac{13}{4}$.

6) $y=\ln\left(x^2+1\right)$. *Відповідь.* $y_{\min}(0)=0$.

7) $y=(2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$. *Відповідь.* $y_{\min}(3)=0,\ y_{\max}(2)=3$.

8) $y=-x^2\sqrt{x^2+2}$. *Відповідь.* $y_{\max}(0)=0$.

9) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{205}}{10}$.

10) $y=x-\ln(1+x)$. *Відповідь.* $y_{\min}(0)=0$.

2.74. Знайти найменше та найбільше значення функції на зазначеному інтервалі:

1) $y=x^4-2x^3+3;\ [-3,2]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=2,\ y_{\text{найб}}=66$.

2) $y=x^4-2x^2+5;\ [-2,2]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=4,\ y_{\text{найб}}=13$.

3) $y=x+2\sqrt{x};\ [0,4]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=0,\ y_{\text{найб}}=8$.

4) $y=x^5-5x^4+5x^3+1;\ [-1,2]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-10,\ y_{\text{найб}}=2$.

5) $y=x^3-3x^2+6x-2;\ [-1,1]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-12,\ y_{\text{найб}}=2$.

6) $y=\sqrt{100-x^2};\ [-6,8]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=6,\ y_{\text{найб}}=10$.

7) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; $[0, 1]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=\dfrac{3}{5}$, $y_{\text{найб}}=1$.

84. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; $[0, 4]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-1$, $y_{\text{найб}}=\dfrac{3}{5}$.

8) $y=\sin 2x-x;\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-\dfrac{\pi}{2}$, $y_{\text{найб}}=\dfrac{\pi}{2}$.

2.75. Число 8 розбити на два такі доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.
Відповідь. 4 та 4.

2.76. Число 36 розкласти на два такі множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.
Відповідь. 6 та 6.

2.77. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

Відповідь. $\sqrt[3]{4V}$.

2.78. Знайти найбільший об'єм конуса з твірною l.

Відповідь. $V=\dfrac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27}$.

2.79. За допомогою другої похідної знайти екстремуми функцій:

1) $y=x^2(a-x)^2$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^4}{16}$, $y_{\min}(0)=0$, $y_{\min}(a)=0$.

2) $y=x+\sqrt{1-x}$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$.

3) $y=x+\sqrt{2-x^2}$. *Відповідь.* $y_{\max}(1)=1$, $y_{\min}(-1)=-1$.

4) $y=\dfrac{x}{\ln x}$. *Відповідь.* $y_{\min}(e)=e$.

2.80. Показати, що графік функції $y=x\operatorname{arctg} x$ скрізь вгнутий.

2.81. Показати, що графік функції $y=\ln(x^2-1)$ скрізь опуклий.

2.82. Знайти точки перегину кривих:

1) $y=(x-4)^5+4x+4$. *Відповідь.* P (4; 20).

2) $y=(x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$. *Відповідь.* P (1; 0).

3) $y=x^4-8x^3+24x^2$. *Відповідь.* Крива точок перегину не має.

2.83. Знайти точки перегину, інтервали вгнутості та опуклості графіків функцій.

1) $y=x^3-5x^2+3x-5$.

Відповідь. Точка перегину $\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{250}{27}\right)$. Інтервали: опуклості - $\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right)$, угнутості - $\left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$.

2) $y=(x+1)^4+e^x$.

Відповідь. Точок перегину не існує, графік функції вгнутий.

3) $y=3x^5-5x^4+3x-2$.

Відповідь. Точка перегину (1, –1). Інтервали: опуклості — $(-\infty, 1)$, угнутості — $(1, +\infty)$.

4) $y = \ln(1 + x^2)$.

Відповідь. Точки перегину $(\pm 1, \ln 2)$. Інтервали: опуклості — $(-\infty, -1)$, угнутості — $(-1, 1)$, опуклості — $(1, +\infty)$.

2.84. Знайти асимптоти кривих:

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$. *Відповідь.* $y = 0$.

2) $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$. *Відповідь.* $x = 0$; $y = 2x$.

3) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x} - 3x$. *Відповідь.* $x = 0$; $y = -3x$.

4) $y = \dfrac{1}{2}x + \operatorname{arctg} x$. *Відповідь.* $y = \dfrac{1}{2}x + \pi$; $y = \dfrac{1}{2}x$.

5) $y = x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$. *Відповідь.* $x = -\dfrac{1}{e}$, $y = x + \dfrac{1}{e}$.

6) $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$. *Відповідь.* $x = 0$, $y = x + 3$.

7) $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. *Відповідь.* $y = 2x \pm \dfrac{\pi}{2}$.

2.84. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty < x < +\infty)$. Графік симетричний відносно початку координат. $y_{\max}(1) = \dfrac{1}{2}$, $y_{\min}(-1) = -\dfrac{1}{2}$. Точки перегину $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота $y = 0$.

2) $y = (x^2 - 1)^3$.

Відповідь. Область $y_{\min} \approx 2{,}6$ визначення $(-\infty, +\infty)$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\min}(0) = -1$; $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, -\dfrac{64}{125}\right)$ — точки перегину. Асимптот немає.

3) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

Відповідь. Асимптоти $x = \pm 2$, $y = x$. Функція непарна. Графік проходить через початок координат. На інтервалі (– 2; 2) функція монотонно спадає. Екстремуми: $y_{\min}(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$, $y_{\max}(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$, точка перегину (0; 0). На інтервалах $(-\infty, -2)$ та (0, 2) графік функції опуклий, на інтервалах (–2, 0) та $(2, +\infty)$ — угнутий.

4) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Відповідь. $y_{\max}(e^2) = \dfrac{2}{e}$. Асимптота $y = 0$.

5) $y = 16x(x - 1)^3$.

Відповідь. $y_{\min}\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{27}{16}$, $y_{\text{т.пер.}}(1) = 0$, $y_{\text{т.пер}}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$. Асимптот немає.

6) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = \pm\sqrt{3}$. Функція непарна. $y_{\max}(3) = -4{,}5$; $y_{\min}(-3) = 4{,}5$. Точка перегину $(0, 0)$. Асимптоти $x = \pm\sqrt{3}$ та $x + y = 0$.

7) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = -1$. $y_{\min}(-3) = -3\dfrac{3}{8}$. Точка перегину $(0, 0)$. Асимптоти $x = -1$ та $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

8) $y = x^2 e^{-x}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. $y_{\max}(2) = \dfrac{4}{e^2}$, $y_{\min}(0) = 0$. Абсциса точки перегину графіка функції $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Асимптота $y = 0$.

9) $y = x - \ln(x+1)$.

Відповідь. Область визначення $(-1, +\infty)$. $y_{\min}(0) = 0$. Графік не має точок перегину. Асимптота $x = -1$.

10) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. Функція непарна. $y_{\max}(-1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$, $y_{\min}(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$. Точка перегину (0, 0). Асимптоти $y = x \pm \pi$.

11) $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 0$. Екстремумів не має. Точка перегину $\left(-\dfrac{1}{2}, e^{-2} + \dfrac{1}{2}\right)$. Асимптоти $x = 0$, $x + y = 1$.

2.85. Обчислити з точністю до 10^{-3}.

1) $\sqrt[3]{e}$. *Відповідь.* 1,395.

2) $\sqrt[7]{129}$. *Відповідь.* 2,002.

3) $\sin 36°$. *Відповідь.* 0,587.

2.86. Розкласти по степенях $x - 2$ многочлен $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$.

Відповідь. $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$.

2.87. Розкласти за степенями $x + 1$ многочлен $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$.

Відповідь. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$.

2.87. Користуючись формулою Тейлора, обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{3}$.

2) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{2}{3}$.