МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

І.Б. КОЧЕТКОВА, Л.Ф. СУШКО, О.Є. ЗАПОРОЖЧЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ФОРМУЛАХ ТА ТАБЛИЦЯХ

Частина 2

Затверджено на засіданні Вченої ради академії як навчальний посібник-довідник. Протокол № 1 від 27.01.2014

Дніпропетровськ НМетАУ 2014

УДК 517(07)
Кочеткова І.Б., Сушко Л.Ф., Запорожченко О.Є. Вища математика в формулах та таблицях. Ч.2: Навч. посібник-довідник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2014. – 48 с.

Наведені основні означення, теоретичні положення та формули з розділів «Невизначений інтеграл», «Визначений та невласні інтеграли», «Подвійний інтеграл. Криволінійні інтеграли» та «Звичайні диференціальні рівняння».

Призначений для студентів усіх напрямів.

Бібліогр.: 8 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: І.Ю. Гергель, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)
Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)

Розділ 1

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Первісна та невизначений інтеграл

Означення та основні властивості

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** від функції $f(x)$ на $[a;b]$, якщо у всіх точках цього відрізку виконується рівність $$F'(x)=f(x).$$ Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то функція $F(x)+C$ також є первісною для $f(x)$.
Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$: $$\int f(x)dx=F(x)+C.$$
1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ 2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)\,dx$ 3. $\int dF(x)=F(x)+C$ 4. $\int[\,f(x)\pm g(x)\,]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ 5. $\int a\,f(x)dx=a\int f(x)dx$ 6. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(kx)dx=\frac{1}{k}F(kx)+C$; $\int f(x+b)dx=F(x+b)+C$; $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$

Таблиця інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$	$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k} \ \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{kx+b}} = \frac{2}{k}\sqrt{kx+b} + C$
3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln\lvert kx+b \rvert + C$
4. $\int \frac{dx}{x^2+p} = \frac{1}{\sqrt{p}} arctg \frac{x}{\sqrt{p}} + C \ (p>0)$	$\int \frac{dx}{(kx)^2+p} = \frac{1}{k\sqrt{p}} arctg \frac{kx}{\sqrt{p}} + C$
5. $\int \frac{dx}{x^2-p} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln\left\lvert \frac{x-\sqrt{p}}{x+\sqrt{p}} \right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{(kx)^2-p} = \frac{1}{k\cdot 2\sqrt{p}} \ln\left\lvert \frac{kx-\sqrt{p}}{kx+\sqrt{p}} \right\rvert + C$
6. $\int \frac{dx}{p-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln\left\lvert \frac{x+\sqrt{p}}{x-\sqrt{p}} \right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{p-(kx)^2} = \frac{1}{k\cdot 2\sqrt{p}} \ln\left\lvert \frac{kx+\sqrt{p}}{kx-\sqrt{p}} \right\rvert + C$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm p} \right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{(kx)^2 \pm p}} = \frac{1}{k}\ln\left\lvert kx + \sqrt{(kx)^2 \pm p} \right\rvert + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{p-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{p}} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{p-(kx)^2}} = \frac{1}{k}\arcsin \frac{kx}{\sqrt{p}} + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \ \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$
10. $\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
11. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \sin(kx+b) dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b) + C$
12. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\int \cos(kx+b) dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b) + C$
13. $\int tg\, x \, dx = -\ln\lvert \cos x \rvert + C$	$\int tg(kx+b) dx = -\frac{1}{k}\ln\lvert \cos(kx+b) \rvert + C$
14. $\int ctg\, x \, dx = \ln\lvert \sin x \rvert + C$	$\int ctg(kx+b) dx = \frac{1}{k}\ln\lvert \sin(kx+b) \rvert + C$
15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg \frac{x}{2} \right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sin(kx+b)} = \frac{1}{k}\ln\left\lvert tg \frac{kx+b}{2} \right\rvert + C$

16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$	$\int \frac{dx}{\cos(kx+b)} = \frac{1}{k}\ln\left|tg\left(\frac{kx+b}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(kx+b)} = -\frac{1}{k}ctg(kx+b) + C$
18. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(kx+b)} = \frac{1}{k}tg(kx+b) + C$

1.2. Методи інтегрування

Інтегрування методом заміни змінної

$$\int f(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} x=\varphi(t) \Rightarrow t=\psi(x) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{matrix}\right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f_1(t)dt = $$
$$= F_1(t) + C = F_1(\psi(x)) + C$$

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \left\{\begin{matrix} \varphi(x)=t \\ \varphi'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = \int f(t)dt = F(t)+C = F(\varphi(x))+C$$

$x\,dx \rightarrow x^2 = t$	$\frac{dx}{\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = t$
$x^n\,dx \rightarrow x^{n+1} = t$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \arcsin x = t$, $\arccos x = t$
$\sin x\,dx \rightarrow \cos x = t$	$\frac{dx}{1+x^2} \rightarrow arctg\,x = t$, $arcctg\,x = t$
$\cos x\,dx \rightarrow \sin x = t$	$\frac{dx}{\cos^2 x} \rightarrow tg\,x = t$
$e^{kx}\,dx \rightarrow e^{kx} = t$	$\frac{dx}{\sin^2 x} \rightarrow ctg\,x = t$
$a^x\,dx \rightarrow a^x = t$	
$\frac{dx}{x} \rightarrow \log_a x = t$, $\ln x = t$	
$\frac{dx}{x^n} \rightarrow \frac{1}{x^{n-1}} = t$	

Інтегрування частинами

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

I. $$\int \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x^n \\ P_n(x) \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx}, a^x \end{bmatrix} dx}_{dv}$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 kx}\,dx \qquad u = x,\quad dv = {dx}/{\cos^2 kx}$$

$$\int \frac{x}{\sin^2 kx}\,dx \qquad u = x,\quad dv = {dx}/{\sin^2 kx}$$

II. $$\int x^s \underbrace{\log_a^n x}_{u}\,dx, \quad s \neq -1$$

$$\int x^n \underbrace{\arcsin kx}_{u}\,dx$$

$$\int x^n \underbrace{arctg\,kx}_{u}\,dx$$

III. Циклічні інтеграли

$$\int \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{kx} \\ a^x \end{bmatrix} dx}_{dv}$$

$$\int \sin\log_a x\,dx \qquad u = \sin\log_a x$$

$$\int \cos\log_a x\,dx \qquad u = \cos\log_a x$$

$$\int \underbrace{\sqrt{ax^2+b}}_{u}\,dx$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2+b}}$$

$$u = x \quad ; \quad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}$$

Корисні формули

$\int \frac{x\,dx}{x^2+b} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+b\right| + C$	$\int \frac{x\,dx}{kx^2+b} = \frac{1}{2k}\ln\left|kx^2+b\right| + C$
$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} + C$	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{kx^2+b}} = \frac{1}{k}\sqrt{kx^2+b} + C$
$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{b-x^2}} = -\sqrt{b-x^2} + C$	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{b-kx^2}} = -\frac{1}{k}\sqrt{b-kx^2} + C$

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln\left|f(x)\right| + C$$

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$\int \sqrt{p-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{p-x^2} + \frac{p}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{p}} + C$$

$$\int \sqrt{x^2+p}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+p} + \frac{p}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+p}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2-p}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-p} - \frac{p}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+p}\right| + C$$

1.3. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Дробово-раціональна функція(ДРФ)= $\dfrac{\textit{\textbf{поліном}}}{\textit{\textbf{поліном}}}$

степінь числівника < степінь знаменника — правильна ДРФ

степінь числівника ≥ степінь знаменника — неправильна ДРФ

неправильна ДРФ =поліном + правильна ДРФ

правильна ДРФ = сума найпростіших дробів

Найпростіші (елементарні) дроби

I тип $\dfrac{A}{x-a}$

II тип $\dfrac{A}{(x-a)^n}$

III тип $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ $\left(D=b^2-4ac<0\right)$

IV тип $\dfrac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$ $\left(D=b^2-4ac<0\right)$

Розкладання ДРФ на найпростіші дроби

множник знаменника	*відповідні найпростіші дроби*
$(x-a)^1$	$\dfrac{A}{x-a}$
$(x-a)^n$	$\dfrac{A_n}{(x-a)^n}+\dfrac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\ldots\dfrac{A_1}{x-a}$
$\left(ax^2+bx+c\right)^1$	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$\left(ax^2+bx+c\right)^n$	$\dfrac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}+\dfrac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}}+\ldots+\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}$

Інтегрування найпростіших дробів I та II типу

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\ln\left|\,x-a\,\right|+C$$

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n}=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$$

Інтегрування найпростіших дробів III та IV типу

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$=\left\{ ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=\right.$$

$$\left.=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\underbrace{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}_{q}\right] \;;\; x+\frac{b}{2a}=t,\, dx=dt\right\} = \frac{1}{a}\int\frac{A\,t+\beta}{t^2+q}\,dt =$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{A\,t+\beta}{t^2+q}\,dt = \frac{A}{a}\int\frac{t\,dt}{t^2+q}+\frac{\beta}{a}\int\frac{dt}{t^2+q} = \frac{A}{2a}\ln\left(t^2+q\right)+\frac{\beta}{a\sqrt{q}}\,arctg\,\frac{t}{\sqrt{q}}+C$$

(якщо $D<0$, то $q>0$)

$$\int\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}\,dx = \left\{x+\frac{b}{2a}=t\right\} = \frac{1}{a^n}\int\frac{A\,t+\beta}{\left(t^2+q\right)^n}\,dt =$$

$$=\frac{A}{a^n}\underbrace{\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+q\right)^n}}_{\text{заміна } t^2=z}+\frac{\beta}{a^n}\int\frac{dt}{\left(t^2+q\right)^n}$$

Рекурентна формула

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+q\right)^n} = \frac{t}{2q(n-1)\left(t^2+q\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2q\,(n-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+q\right)^{n-1}}$$

1.4. Інтегрування деяких тригонометричних функцій

$\int \sin ax \sin bx\,dx$, $\int \sin ax \cos bx\,dx$, $\int \cos ax \cos bx\,dx$

Застосовуються формули

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(ax - bx) - \cos(ax + bx)\right];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(ax + bx) + \cos(ax - bx)\right];$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(ax + bx) + \sin(ax - bx)\right].$$

Функції, непарні відносно $\sin x$ або $\cos x$

$\int \sin^{2n+1} x\,dx$, $\int \sin^{2n+1} x\, f(\cos x)\,dx$

Виконується перетворення $\sin^{2n+1} x = \sin x \cdot \sin^{2n} x = \sin x\left(1 - \cos^2 x\right)^n$

та заміна змінної $\cos x = t$, $\sin x\,dx = -dt$.

$\int \cos^{2n+1} x\,dx$, $\int \cos^{2n+1} x\, f(\sin x)\,dx$

Виконується перетворення $\cos^{2n+1} x = \cos x \cdot \cos^{2n} x = \cos x\left(1 - \sin^2 x\right)^n$

та заміна змінної $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$

$\int \sin^{2n} x\,dx$, $\int \cos^{2m} x\,dx$, $\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\,dx$

Застосовуються формули

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad ; \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Функції, парні відносно $\sin x$ та $\cos x$:

$\int f(tg\, x)\, dx$, $\int f(ctg\, x)\, dx$,

дробові функції від $\sin^{2n} x$, $\cos^{2m} x$, $\sin x \cos x$.

Заміна $tg\, x = t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ або $ctg\, x = t$, $dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Універсальна тригонометрична підстановка

$$tg\frac{x}{2} = t,\; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \;;$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Типові задачі: $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$

1.5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Функції, які містять корені лінійної або дробово-лінійної функції

$$\int f\left(x, \sqrt[m]{(ax+b)^k}, \sqrt[n]{(ax+b)^l}, \ldots\right) dx \text{ або } \int f\left(x, (ax+b)^{\frac{k}{m}}, (ax+b)^{\frac{l}{n}}, \ldots\right) dx$$

$s = Н.О.К.(m, n, \ldots)$

заміна $ax+b=t^s$,

$$x=\frac{t^s-b}{a},$$

$$dx=\frac{s\,t^{s-1}dt}{a}$$

$$\int f\left(x, \sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^k}, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^l}, \ldots\right) dx \text{ або } \int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{k}{m}}, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{l}{n}}, \ldots\right) dx$$

$s = Н.О.К.(m, n, \ldots)$

заміна $\frac{ax+b}{cx+e}=t^s$,

$$x=\frac{e\,t^s-b}{a-c\,t^s},$$

$$dx=\frac{es\,t^{s-1}\left(a-c\,t^s\right)+\left(et^s-b\right)cs\,t^{s-1}}{\left(a-c\,t^s\right)^2}dt$$

Функції, які містять корінь квадратний від квадратного двочлена

$$\int f\left(x, \sqrt{p - x^2}\right) dx$$

заміна $x = \sqrt{p}\sin t$ або $x = \sqrt{p}\cos t$

$dx = \sqrt{p}\cos t\, dt$ $\qquad$ $dx = -\sqrt{p}\sin t\, dt$

$\sqrt{p - x^2} = \sqrt{p}\cos t$ $\qquad$ $\sqrt{p - x^2} = \sqrt{p}\sin t$

$$\int f\left(x, \sqrt{x^2 + p}\right) dx$$

заміна $x = \sqrt{p}\, tg\, t$ або $x = \sqrt{p}\cos t$

$dx = \dfrac{\sqrt{p}\, dt}{\cos^2 t}$ $\qquad$ $dx = -\dfrac{\sqrt{p}\, dt}{\sin^2 t}$

$\sqrt{x^2 + p} = \dfrac{\sqrt{p}}{\cos t}$ $\qquad$ $\sqrt{x^2 + p} = \dfrac{\sqrt{p}}{\sin t}$

$$\int f\left(x, \sqrt{x^2 - p}\right) dx$$

заміна $x = \dfrac{\sqrt{p}}{\cos t}$ або $x = \dfrac{\sqrt{p}}{\sin t}$

$dx = \dfrac{\sqrt{p}\sin t\, dt}{\cos^2 t}$ $\qquad$ $dx = -\dfrac{\sqrt{p}\cos t\, dt}{\sin^2 t}$

$\sqrt{x^2 + p} = \dfrac{\sqrt{p}\sin t}{\cos t}$ $\qquad$ $\sqrt{x^2 + p} = \dfrac{\sqrt{p}\cos t}{\sin t}$

Функції, які містять корінь квадратний від квадратного тричлена

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \left\{ x+\frac{b}{2a}=t,\ dx=dt \right\} = \int \frac{A\,t+\beta}{\sqrt{at^2+\gamma}}\,dt =$$ $$= A\int \frac{t\,dt}{\sqrt{at^2+\gamma}} + \beta\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+\gamma}}$$
$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \left\{ x+\frac{b}{2a}=t,\ dx=dt \right\} = \int R_1\left(t, \sqrt{at^2+\gamma}\right)dt$$

Підстановки Ейлера

Перша підстановка : $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ a>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t$; $ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}x\,t+t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$
Друга підстановка : $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ c>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\,t+\sqrt{c}$; $ax^2+bx+c = x^2t^2+2\sqrt{c}x\,t+c \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}$
Третя підстановка : α та β – дійсні корені тричлена ax^2+bx+c $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$; $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t$; $a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2 \Rightarrow x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$

Інтегрування диференціальних біномів $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$

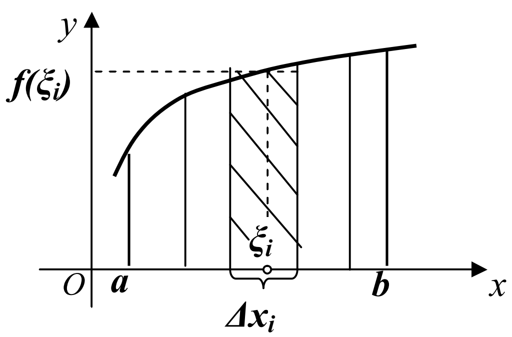
p – ціле, s – найменше спільне кратне знаменників дробів m та n; заміна $x=t^s$
$\frac{m+1}{n}$ – ціле, s – знаменник дробу p; заміна $a+bx^n=t^s$
$\frac{m+1}{n}+p$ – ціле, s – знаменник дробу p; заміна $ax^{-n}+b=t^s$

Розділ 2

ВИЗНАЧЕНИЙ ТА НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

2.1. Визначений інтеграл

Означення



$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i$$

Основні властивості

1. Якщо $C = const$, то $\int\limits_a^b C f(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$.

2. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

6. Якщо для $x \in [a;b]$ виконується умова $f(x) \le \varphi(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

7. Якщо m та M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

8. Якщо $f(x)$ –непарна функція, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$.

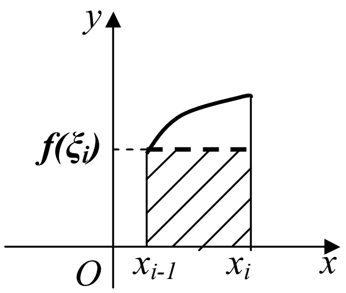
9. Якщо $f(x)$ –парна функція, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

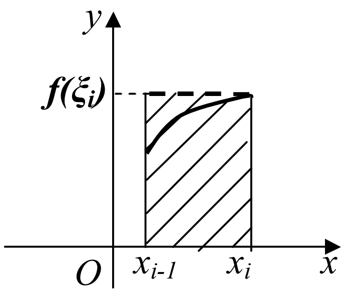
Методи обчислення визначеного інтеграла

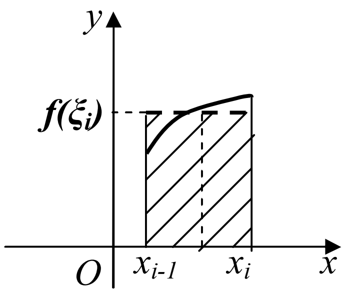
Формула Ньютона – Лейбніца Якщо $F(x)$ – будь-яка первісна від функції $f(x)$, то $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a)$$
Інтегрування частинами у визначеному інтегралі $$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big\vert_a^b - \int_a^b v\,du .$$
Заміна змінної у визначеному інтегралі Якщо 1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, 2) функції $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$, 3) $\varphi(\alpha) = a$ та $\varphi(\beta) = b$, 4) $f[\varphi(t)]$ визначена та неперервна на $[\alpha;\beta]$, то $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt .$$ ***Зауваження.*** При обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної ми не повертаємося до старої змінної, а просто обчислюємо різницю значень первісної (функції аргументу t) у нових границях інтегрування β та α.

Деякі методи наближеного обчислення визначених інтегралів

Формула прямокутників





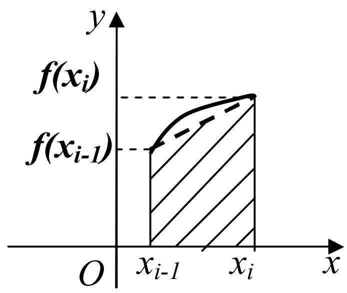


$$\xi_i = x_{i-1} = a + h\cdot(i-1) \qquad \xi_i = x_i = a + h\cdot i \qquad \xi_i = x_{i-1} + \frac{h}{2} = a + h\cdot\left(i - \frac{1}{2}\right)$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad f_i = f(\xi_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$$

Формула трапецій



$$h = \frac{b-a}{n},\; x_0 = a,\; x_i = x_{i-1} + h = a + h\cdot i,\; f_i = f(x_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f_0 + f_n + 2(f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1})\right]$$

Формула Сімпсона (формула парабол)

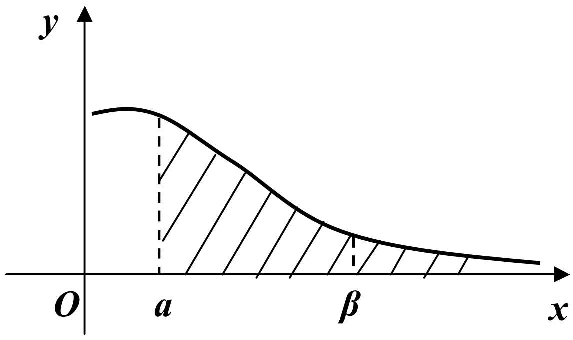
$$h = \frac{b-a}{2n},\; x_0 = a,\; x_i = x_{i-1} + h = a + h\cdot i,\; f_i = f(x_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2n} + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1})\right]$$

2.2. Невласний інтеграл першого роду

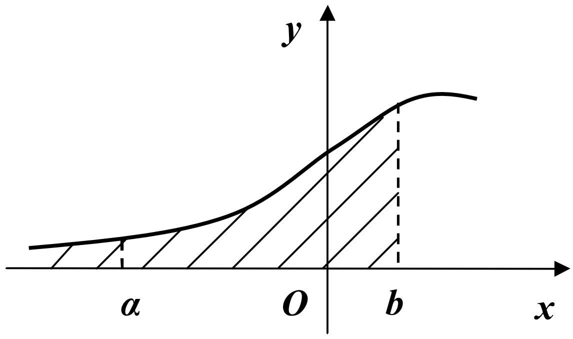
$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{\beta} f(x)dx$$

Якщо границя не існує або є нескінченою, то невласний інтеграл розбігається.



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

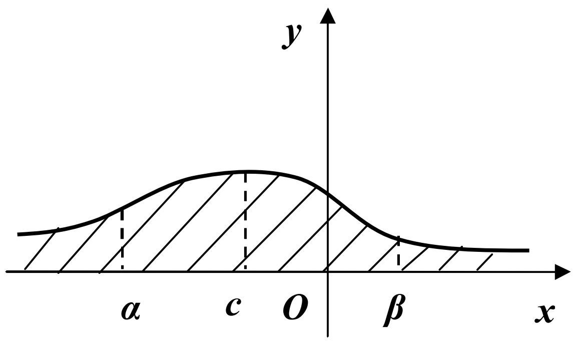
Якщо границя не існує або є нескінченою, то невласний інтеграл розбігається.



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{c} f(x)dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{c}^{\beta} f(x)dx$$

Якщо принаймні одна з границь не існує або є нескінченою, то невласний інтеграл розбігається.



Головне значення за Коші

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$$

Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду

Якщо інтеграл $\int_a^{\infty} \lvert f(x) \rvert dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ також збігається та називається ***абсолютно збіжним***.
Якщо для всіх $x \geq a$ виконується умова $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ та якщо інтеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ також збігається.
Якщо для всіх $x \geq a$ виконується умова $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ та якщо інтеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ розбігається, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ також розбігається.
Якщо для всіх $x \geq a$ $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ та $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = C \neq 0$, то інтеграли $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ та $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.
Якщо функція $\varphi(x)$ монотонно прямує до нуля та функція $f(x)$ має обмежену первісну, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ є збіжним.

Збіжність деяких невласних інтегралів першого роду

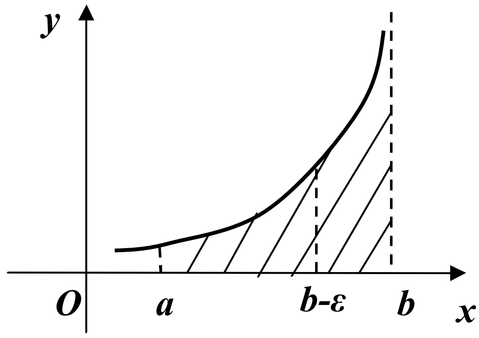
$\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^p}$	$p > 1$ – збігається; $p \leq 1$ – розбігається
$\int_1^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^p}dx$, $\int_1^{\infty} \dfrac{\sin x}{x^p}dx$	$p > 0$ – збігаються

2.3. Невласний інтеграл другого роду

Якщо функція $f(x)$ є необмеженою в околі точки b, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

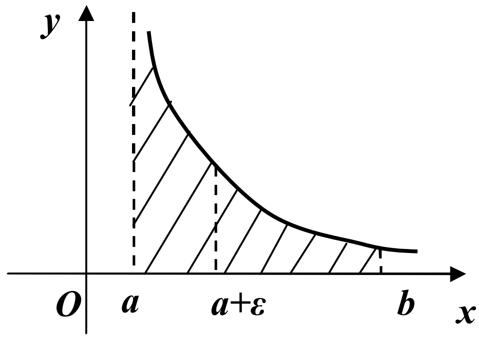
Якщо границя не існує або є нескінченою, то невласний інтеграл розбігається.



Якщо функція $f(x)$ є необмеженою в околі точки a, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Якщо границя не існує або є нескінченою, то невласний інтеграл розбігається.

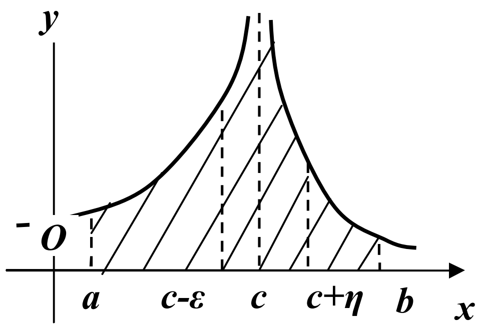


Якщо функція $f(x)$ є необмеженою в околі точки $c \in (a;b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^{b} f(x)dx$$

Якщо принаймні одна з границь не існує або є нескінченою, то невласний інтеграл розбігається.



Головне значення за Коші

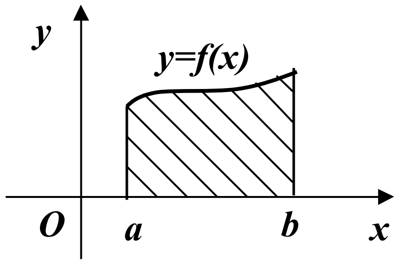
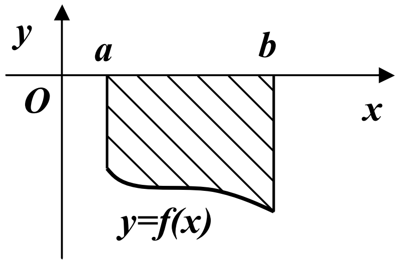
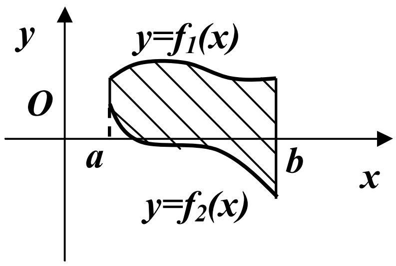
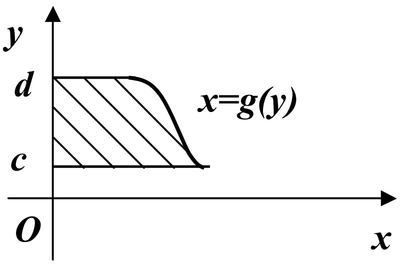
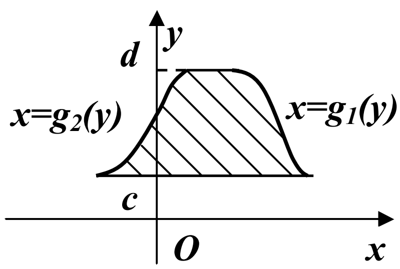
$$v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right)$$

Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду

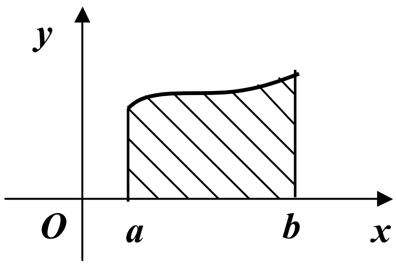
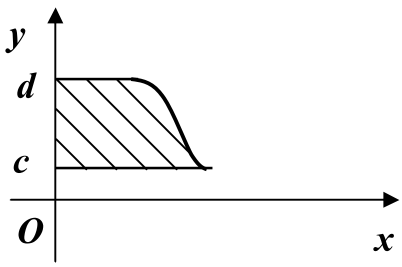
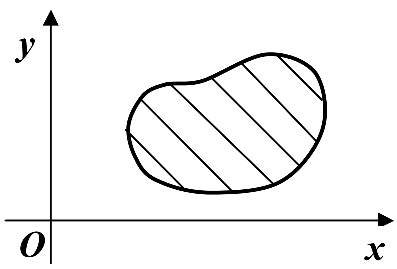
Якщо невласний інтеграл $\int\limits_a^b \lvert f(x) \rvert dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ також збігається та називається ***абсолютно збіжним***.
Якщо виконується умова $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ та якщо невласний інтеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ також збігається.
Якщо виконується умова $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ та якщо невласний інтеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ розбігається, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ також розбігається.
Якщо додатні функції $f(x)$, $\varphi(x)$ необмежені в околі точки b та $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = C \ne 0$, то інтеграли $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ та $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.
$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ — $p \ge 1$ – розбігаються; $p < 1$ – збігаються

2.4. Застосування визначеного інтеграла

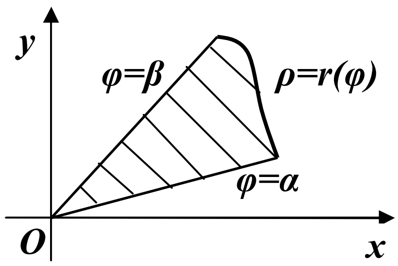
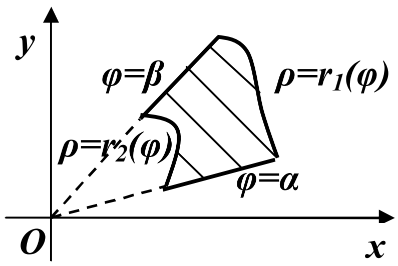
Площа плоскої фігури (границі в декартових координатах)

Фігуру обмежено лініями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ ($f(x)\ge 0$)		$S=\int_a^b f(x)dx$
Фігуру обмежено лініями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ ($f(x)\le 0$)		$S=-\int_a^b f(x)dx$
Фігуру обмежено лініями $x=a$, $x=b$, $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\ge f_2(x)$)		$S=S_1-S_2=$ $=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$
Фігуру обмежено лініями $y=c$, $y=d$, $x=0$, $x=g(y)$ ($g(y)\ge 0$)		$S=\int_c^d g(y)dy$
Фігуру обмежено лініями $y=c$, $y=d$, $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$ ($g_1(y)\ge g_2(y)$)		$S=S_1-S_2=$ $=\int_c^d [g_1(y)-g_2(y)]dy$

Площа плоскої фігури
(границі задані параметрично)

Фігуру обмежено лініями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$, $f(t) \geq 0$, $a = g(t_1)$, $b = g(t_2)$		$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t) g'(t) dt$
Фігуру обмежено лініями $y = c$, $y = d$, $x = 0$, $\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$, $g(t) \geq 0$, $c = f(t_1)$, $d = f(t_2)$		$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} g(t) f'(t) dt$
Фігуру обмежено замкненою лінією $\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$, $f(t_1) = f(t_2)$, $g(t_1) = g(t_2)$		$S = \pm\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t) g'(t) dt$, знак “+” відповідає обходу за годинниковою стрілкою, знак “-”– обходу проти годинникової стрілки $S = \pm\int\limits_{t_1}^{t_2} g(t) f'(t) dt$, знак “+” відповідає обходу проти годинникової стрілки, знак “-”– обходу за годинниковою стрілкою

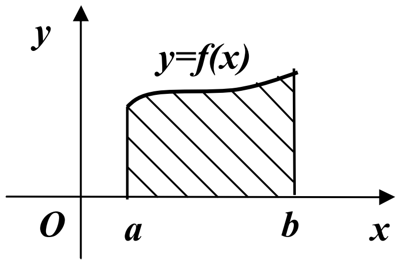
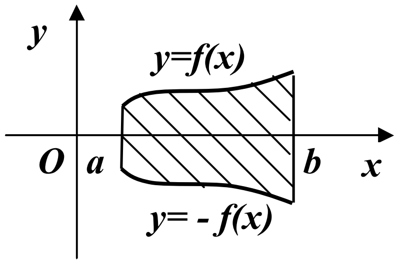
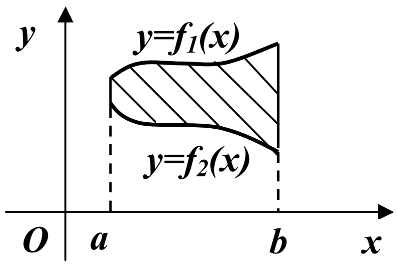
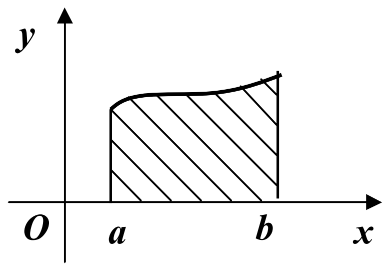
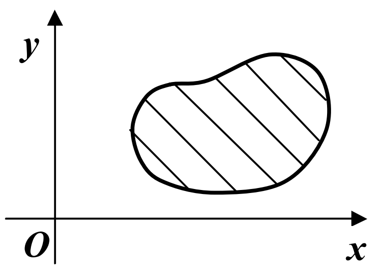
Площа криволінійного сектора (границі в полярних координатах)

Сектор обмежено лініями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, $\rho=r(\varphi)$		$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$
Сектор обмежено лініями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, $\rho=r_1(\varphi)$, $\rho=r_2(\varphi)$ $r_1(\varphi)\geq r_2(\varphi)$		$S=S_1-S_2=$ $=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[r_1^2(\varphi)-r_2^2(\varphi)\right]d\varphi$

Довжина дуги лінії

Рівняння, що задає лінію	**Формула для обчислення довжини дуги**
$y=f(x),\ \ a\leq x\leq b$	$l=\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$
$x=g(y),\ \ c\leq y\leq d$	$l=\int\limits_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$
$\begin{cases} x=g(t)\\ y=f(t)\end{cases},\ \ t_1\leq t\leq t_2$	$l=\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{[g'(t)]^2+[f'(t)]^2}\,dt$
$\rho=r(\varphi),\ \ \alpha\leq\varphi\leq\beta$	$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$

Об’єм тіла обертання.
Площа поверхні обертання

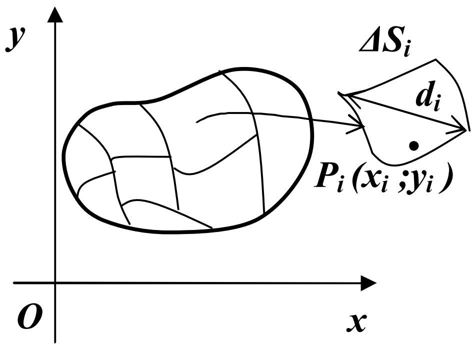
Фігуру, яка обертається, обмежено лініями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$		$V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ $P_{Ox}=2\pi\int_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$
$x=a$, $x=b$, , , $y=f(x)$, $y=-f(x)$		$V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ $P_{Ox}=2\pi\int_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$
$x=a$, $x=b$, $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ($\lvert f_1(x)\rvert \geq \lvert f_2(x)\rvert$)		$V_{Ox}=V_{зовн}-V_{внутр}=$ $=\pi\int_a^b\left[f_1^2(x)-f_2^2(x)\right]dx$ $P_{Ox}=P_{зовн}+P_{внутр}$
$x=a$, $x=b$, $y=0$, $\begin{cases} y=f(t) \\ x=g(t) \end{cases}$, $a=g(t_1)$, $b=g(t_2)$		$V_{Ox}=\pi\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)g'(t)dt$ $P_{Ox}=2\pi\int_{t_{\min}}^{t_{\max}}\lvert f(t)\rvert\sqrt{[f']^2+[g']^2}\,dt$
Замкнена лінія $\begin{cases} y=f(t) \\ x=g(t) \end{cases}$, $f(t_1)=f(t_2)$, $g(t_1)=g(t_2)$		$V_{Ox}=\pm\pi\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)g'(t)dt$ знак “+” відповідає обходу за годинниковою стрілкою, знак “-”– обходу проти годинникової стрілки $P_{Ox}=2\pi\int_{t_{\min}}^{t_{\max}}\lvert f(t)\rvert\sqrt{[f']^2+[g']^2}\,dt$

Розділ 3

ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

3.1. Подвійний інтеграл та його застосування

Означення та основні властивості



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_i f(x_i;y_i)\,\Delta S_i$$

1. $\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\,dx\,dy = \iint_D f_1(x,y)\,dx\,dy \pm \iint_D f_2(x,y)\,dx\,dy$.

2. $\iint_D C f(x,y)\,dx\,dy = C \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

3. Якщо область інтегрування D складається з підобластей D_1 та D_2, то

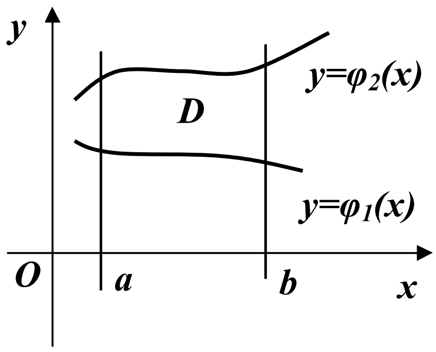
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

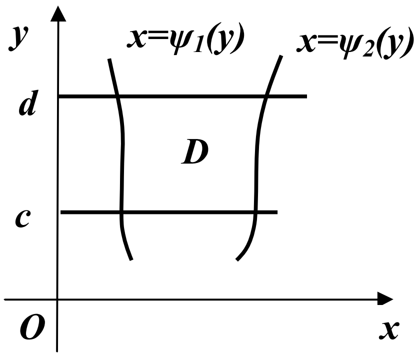
4. Якщо m та M – найменше та найбільше значення функції $f(x;y)$ в області D (тобто $m \le f(x;y) \le M$), то

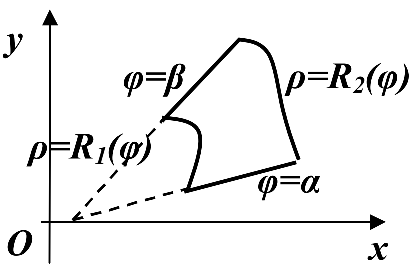
$$mS \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le MS,$$

де S – площа області D.

Обчислення подвійних інтегралів

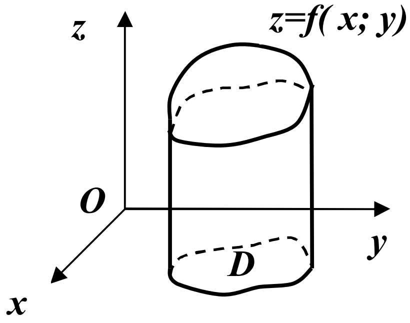
<table>
<tr>
<td>

Область обмежено лініями
$x = a$, $x = b$,
$y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$</td>
<td>$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$</td>
</tr>
<tr>
<td>

Область обмежено лініями
$y = c$, $y = d$,
$x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$</td>
<td>$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$</td>
</tr>
<tr>
<td>

Область обмежено лініями
$\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$,
$\rho = R_1(\varphi)$, $\rho = R_2(\varphi)$</td>
<td>$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{R_1(\varphi)}^{R_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$</td>
</tr>
</table>

Застосування подвійних інтегралів

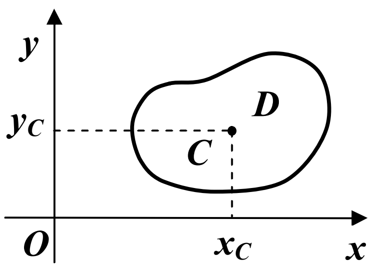


Об'єм циліндричного тіла

$$V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Площа поверхні

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$



Площа фігури $S=\iint_D dx\,dy$

Маса пластинки поверхневої густини $\gamma(x;y)$

$$M=\iint_D \gamma(x,y)\,dx\,dy$$

Статичні моменти та координати центра ваги плоскої фігури

$$S_{Ox}=\iint_D y\,dx\,dy \qquad S_{Oy}=\iint_D x\,dx\,dy$$

$$x_C=\frac{S_{Oy}}{S} \qquad y_C=\frac{S_{Ox}}{S}$$

Статичні моменти та координати центра ваги пластинки

$$M_{Ox}=\iint_D y\gamma(x,y)\,dx\,dy \qquad M_{Oy}=\iint_D x\gamma(x,y)\,dx\,dy$$

$$x_C=\frac{M_{Oy}}{M} \qquad y_C=\frac{M_{Ox}}{M}$$

Моменти інерції плоскої фігури

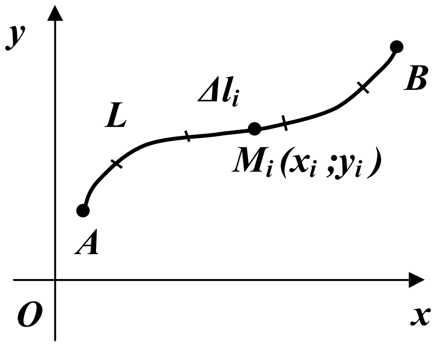
$$I_{Ox}=\iint_D y^2\,dx\,dy \quad I_{Oy}=\iint_D x^2\,dx\,dy \quad I_O=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad I_{xy}=\iint_D xy\,dx\,dy$$

Моменти інерції пластинки

$$I_{Ox}=\iint_D \gamma\,y^2\,dx\,dy \quad I_{Oy}=\iint_D \gamma\,x^2\,dx\,dy \quad I_O=\iint_D \gamma\,(x^2+y^2)\,dx\,dy \quad I_{xy}=\iint_D \gamma\,xy\,dx\,dy$$

3.2. Криволінійний інтеграл 1 роду (за довжиною дуги)

Означення та основні властивості



$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_i f(x_i;y_i)\,\Delta l_i$$

1. Криволінійний інтеграл 1 роду не залежить від напряму шляху інтегрування

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl\,.$$

2. $\int\limits_L [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\,dl = \int\limits_L f_1(x,y)\,dl \pm \int\limits_L f_2(x,y)\,dl\,.$

3. $\int\limits_L C f(x,y)\,dl = C\int\limits_L f(x,y)\,dl\,.$

4. Якщо контур L інтегрування складається з частин L_1 та L_2, то

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)\,dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)\,dl$$

Обчислення криволінійних інтегралів 1 роду

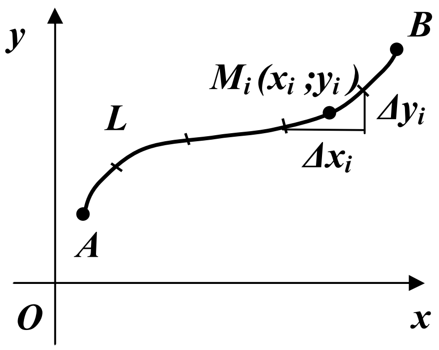
Рівняння лінії $L = AB$	Формула для обчислення криволінійного інтеграла 1 роду
$y=\varphi(x)$, $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$	$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx$
$x=\psi(y)$, $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$	$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(\psi(y),y)\sqrt{1+[\psi'(x)]^2}\,dy$
$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, t_A відповідає точці A, t_B відповідає точці B	$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{t_{\min}}^{t_{\max}} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi']^2+[\psi']^2}\,dt$
$\rho=r(\varphi)$, $A(\rho_A;\varphi_A)$, $B(\rho_B;\varphi_B)$	$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+[r']^2}\,d\varphi$

Застосування криволінійних інтегралів 1 роду

Довжина дуги лінії	$l = \int\limits_L dl$
Маса матеріальної кривої лінійної густини $\gamma(x;y)$	$M = \int\limits_L \gamma(x;y)\,dl$
Статичні моменті та координати центра ваги дуги лінії $S_{Ox} = \int\limits_L y\,dl$, $S_{Oy} = \int\limits_L x\,dl$; $x_C = \dfrac{S_{Oy}}{l}$, $y_C = \dfrac{S_{Ox}}{l}$	
Статичні моменті та координати центра ваги матеріальної кривої $M_{Ox} = \int\limits_L y\gamma(x;y)\,dl$, $M_{Oy} = \int\limits_L x\gamma(x;y)\,dl$; $x_C = \dfrac{M_{Oy}}{M}$, $y_C = \dfrac{M_{Ox}}{M}$	

3.2. Криволінійний інтеграл 2 роду (за координатами)

Означення та основні властивості



Інтеграл за координатою x

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_i P(x_i;y_i)\,\Delta x_i$$

Інтеграл за координатою y

$$\int\limits_L Q(x,y)\,dy = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_i Q(x_i;y_i)\,\Delta y_i$$

Повний криволінійний інтеграл

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_i \big(P(x_i;y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i;y_i)\,\Delta y_i\big)$$

1. Криволінійний інтеграл 2 роду змінює знак при зміні напряму шляху інтегрування

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

2. $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_L P(x,y)\,dx + \int\limits_L Q(x,y)\,dy$.

3.. $\int\limits_L [P_1(x,y) \pm P_2(x,y)]\,dx = \int\limits_L P_1(x,y)\,dx \pm \int\limits_L P_2(x,y)\,dx$;

$\int\limits_L [Q_1(x,y) \pm Q_2(x,y)]\,dy = \int\limits_L Q_1(x,y)\,dy \pm \int\limits_L Q_2(x,y)\,dy$.

4. $\int\limits_L C P(x,y)\,dx = C\int\limits_L P(x,y)\,dx$;

$\int\limits_L CQ(x,y)\,dy = C\int\limits_L Q(x,y)\,dy$

5. Якщо контур L інтегрування складається з частин L_1 та L_2, то

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{L_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int\limits_{L_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Обчислення криволінійних інтегралів 2 роду

Рівняння лінії $L = AB$	**Формула для обчислення криволінійного інтеграла 2 роду**
$y=\varphi(x)$, $A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B)$	$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$ $=\int\limits_{x_A}^{x_B}\left[P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right]dx$
$x=\psi(y)$, $A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B)$	$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$ $=\int\limits_{y_A}^{y_B}\left[P(\psi(y),y)\psi'(y)+Q(\psi(y),y)\right]dy$
$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, t_A відповідає точці A, t_B відповідає точці B	$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$ $=\int\limits_{t_A}^{t_B}\left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt$
$\rho=r(\varphi)$, $A(\varphi_A;\rho_A),\ B(\varphi_B;\rho_B)$	$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$ $=\int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B}\left[P(r\cos\varphi,r\sin\varphi)(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)+\right.$ $\left.+Q(r\cos\varphi,r\sin\varphi)(r'\sin\varphi+r\cos\varphi)\right]d\varphi$

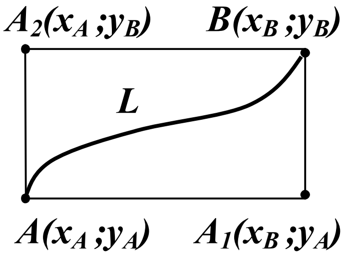
Умова незалежності криволінійного інтеграла 2 роду від контуру інтегрування.

Якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ та їх частинні похідні першого порядку неперервні в однозв’язній області D , тоді необхідною та достатньою умовою ***незалежності від шляху інтегрування*** криволінійного інтеграла $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ за контуром $L = AB$, який повністю лежить в цій області , є виконання в D умови

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x},$$

а інтеграл за замкненим контуром Γ , що лежить в D , за виконання цієї умови дорівнює нулю:

$$\oint_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 .$$



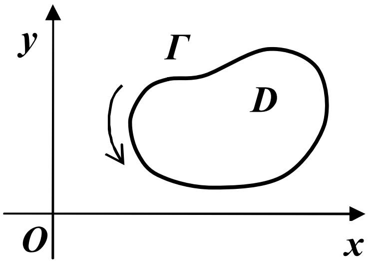
Для обчислення криволінійного інтеграла, що не залежить від контуру інтегрування, як найбільш вигідний шлях інтегрування доцільно взяти ламану , ланки якої паралельні координатним осям:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{A(x_A,y_A)}^{B(x_A,y_A)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} P(x,y_A)dx + \int_{y_A}^{y_B} Q(x_B,y)dy =$$

$$= \int_{y_A}^{y_B} Q(x_A,y)dy + \int_{x_A}^{x_B} P(x,y_B)dx$$

Формула Гріна. Обчислення площі фігури

	Якщо $\boldsymbol{\Gamma}$ – границя області $\boldsymbol{D}$, а функції $\boldsymbol{P(x,y)}$, $\boldsymbol{Q(x,y)}$ та їх частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ неперервні в замкненій області $\boldsymbol{D+\Gamma}$, то є справедливою ***формула Гріна*** $$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$ причому напрям обходу контуру обирається так, що область $\boldsymbol{D}$ залишається зліва.
	Площа фігури $\quad S = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx$

Обчислення криволінійних інтегралів за просторовими кривими

Якщо просторова лінія $\boldsymbol{L = AB}$ задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \zeta(t) \end{cases}$$

t_A відповідає точці A, t_B відповідає точці B, то:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} f(\varphi(t),\psi(t),\zeta(t))\sqrt{[\varphi']^2 + [\psi']^2 + [\zeta']^2}\,dt;$$

$$\int_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y)dz =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \left[P(\varphi(t),\psi(t),\zeta(t))\varphi' + Q(\varphi(t),\psi(t),\zeta(t))\psi' + R(\varphi(t),\psi(t),\zeta(t))\zeta'\right]dt.$$

Розділ 4

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

4.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Основні поняття

Звичайним диференціальним рівнянням 1 порядку називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, її функцію та похідну першого порядку цієї функції (або диференціали незалежної змінної та функції):

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$y' = f(x, y) \text{ або}$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Розв'язком диференціального рівняння називається диференційовна функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в диференціальне рівняння перетворює його в тотожність:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$$

$$(\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))).$$

Якщо розв'язок є неявною функцією, його називають ***інтегралом диференціального рівняння***.

Загальним розв'язком називається така функція $y = \varphi(x, C)$ (C – довільна стала), що:

1) є розв'язком для будь-якого значення C;

2) для будь-якої припустимої ***начальної умови*** $y(x_0) = y_0$ існує таке значення сталої $C = C_0$, що $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Якщо загальний розв'язок є неявною функцією, його називають ***загальним інтегралом диференціального рівняння***.

Функцію $y = \varphi(x, C_0)$ називають ***частинним розв'язком*** або розв'язком ***задачі Коші*** $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Найпростіше диференціальне рівняння

$$y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx; \quad y = F(x) + C$$

Диференціальні рівняння з подільними змінними

$$\left.\begin{array}{l} y' = f_1(x)f_2(y) \\ p_1(x)p_2(y) + q_1(x)q_2(y)y' = 0 \\ p_1(x)p_2(y)dx + q_1(x)q_2(y)dy = 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi_2(y)dy = \varphi_1(x)dx \; ; \\ \int \varphi_2(y)dy = \int \varphi_1(x)dx \; ; \\ \Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C \; . \end{array}$$

Функція $f(x, y)$ називається ***однорідною степеня n***, якщо для будь-якого k має місце тотожність $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$.

Зокрема, якщо $f(kx, ky) = f(x, y)$, то $f(x, y)$ є ***однорідною функцією нульового степеня***.

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – однорідні однакового степеня;

$y' = f(x, y)$, $f(x, y)$ – однорідна нульового степеня .

Зводяться до $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Заміна $\frac{y}{x} = u$; $y = ux$; $y' = u'x + u$;

$$u'x + u = f(u) \; ; \quad u'x = f(u) - u \; ; \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Лінійні рівняння	**Рівняння Бернуллі**
$y' + p(x)y = f(x)$	$y' + p(x)y = f(x)y^k$
$y = uv$; $y' = u'v + uv'$	$y = uv$; $y' = u'v + uv'$
$u'v + \underline{uv' + p(x)uv} = f(x)$	$u'v + \underline{uv' + p(x)uv} = f(x)(uv)^k$
$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$	$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)u^k v^k$
$\begin{cases} 1.\; v' + p(x)v = 0 \\ 2.\; u'v = f(x) \end{cases}$	$\begin{cases} 1.\; v' + p(x)v = 0 \\ 2.\; u'v = f(x)u^k v^k \end{cases}$

Рівняння в повних диференціалах

Рівняння $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ є ***рівнянням в повних диференціалах***, якщо виконується умова $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Загальний інтеграл рівняння розшукується з рівності

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C,$$

де (x_0, y_0)– деяка фіксована точка з області неперервності функцій $P(x,y)$, $Q(x,y)$ та їх частинних похідних.

Також загальний інтеграл рівняння $U = C$ можна побудувати виходячи з системи рівнянь $\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$:

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,dx \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = R(x,y) + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(R(x,y) + \varphi(y)\big) = Q(x,y) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Інтегруючий множник

Рівняння $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ зводиться до рівняння в повних диференціалах множенням на функцію μ (інтегруючий множник):

а) якщо $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x)$, то $\mu = e^{\int \varphi(x)\,dx}$;

а) якщо $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} = \varphi(y)$, то $\mu = e^{\int \varphi(y)\,dy}$.

Деякі рівняння, які зводяться до найпростіших

$y' = f(ax+by+c)$. Заміна $z = ax+by+c$; $z' = a+by'$; $y' = \dfrac{z'-a}{b}$. $\dfrac{z'-a}{b} = f(z)$– рівняння з подільними змінними.
$y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c}{a_2x+b_2y+c}\right)$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Заміна $\begin{cases} x = t+\alpha \\ y = z+\beta \end{cases}$, де α та β – розв'язок системи $\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c=0 \\ a_2\alpha+b_2\beta+c=0 \end{cases}$; $y' = z'_t$; $z' = f\left(\dfrac{a_1t+b_1z}{a_2t+b_2z}\right)$– однорідне рівняння.

4.2. Диференціальні рівняння другого порядку

Загальній вигляд рівняння	$F(x,y,y',y'')=0$ або $y''=f(x,y,y')$
Загальний розв'язок	$y=\varphi(x,C_1,C_2)$
Загальний інтеграл	$\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$
Початкові умови	$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0$

Рівняння, що припускають зниження порядку

Найпростіші: $y''(x)=f(x)$; $y'(x)=\int f(x)dx$; $y'(x)=f_1(x)+C_1$; $y(x)=\int (f_1(x)+C_1)dx$; $y(x)=f_2(x)+C_1x+C_2$.
Рівняння, які явно не містять шукану функцію y: $F(x,y',y'')=0$; $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$; $F(x,p,p')=0 \quad \Rightarrow \quad p=f_1(x,C_1)$; $y'=f_1(x,C_1)$; $y=\int f_1(x,C_1)dx$; $y=f_2(x,C_1)+C_2$.
Рівняння, які явно не містять аргумент x: $F(y,y',y'')=0$; $y'=p(y)$, $y''=\frac{d}{dx}p(y)=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'(y)\cdot p$; $F(y,p,p'p)=0 \quad \Rightarrow \quad p=f_1(y,C_1)$; $y'=f_1(y,C_1)$; $\frac{dy}{f_1(y,C_1)}=dx$; $\int\frac{dy}{f_1(y,C_1)}=\int dx$; $f_2(y,C_1)=x+C_2$.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку (ЛНДР-ІІ) називається рівняння вигляду $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. Якщо рівняння має вигляд $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то воно називається ***лінійним однорідним рівнянням (ЛОДР-ІІ)***, або ***рівнянням без правої частини***.
Функції $y_1(x)$та $y_2(x)$ називаються ***лінійно незалежними*** на $[a,b]$, якщо тотожність $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\equiv 0$ виконується тільки якщо $C_1 = C_2 = 0$ (тобто у випадку $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\not\equiv const$). Визначник $W[y_1, y_2]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ називається ***визначником Вронського*** (або ***вронскіаном***). Якщо функції лінійно залежні на $[a,b]$, то $W[y_1, y_2]\equiv 0$.
Загальний розв'язок лінійного ***однорідного*** рівняння 2 порядку має структуру $$\bar{y} = C_1\, y_1(x)+ C_2\, y_2(x),$$ де $y_1(x)$, $y_2(x)$– лінійно незалежні частинні розв'язки. Загальний розв'язок лінійного ***неоднорідного*** рівняння має структуру $$y = \bar{y} + y^*,$$ де $\bar{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а y^* – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння.
Метод варіації довільних сталих $y^* = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2$, де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ є розв'язком системи $$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx}\cdot y_1 + \dfrac{dC_2}{dx}\cdot y_2 = 0 \\ \dfrac{dC_1}{dx}\cdot y_1' + \dfrac{dC_2}{dx}\cdot y_2' = f(x) \end{cases}.$$

Лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$y'' + p\,y' + q\,y = 0$, де $p, q = const$

$\bar{y} = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$

$y_{1,2} = e^{kx}$, k – корені ***характеристичного рівняння*** $k^2 + pk + q = 0$.

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad \to \quad y'' \sim k^2,\ y' \sim k,\ y \sim 1 \quad \to \quad k^2 + pk + q = 0$$

I. Корені характеристичного рівняння дійсні та різні $k_1 \neq k_2$ ($D > 0$)

$$y_1 = e^{k_1 x};\quad y_2 = e^{k_2 x}$$
$$\bar{y} = C_1\,e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

II. Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні $k_1 = k_2$ ($D = 0$)

$$y_1 = e^{k_1 x};\quad y_2 = x e^{k_1 x}$$
$$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$$

III. Корені характеристичного рівняння комплексні $k_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$ ($D < 0$)

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x;\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$
$$\bar{y} = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Частинні випадки

1) $\underline{y'' + b\,y' = 0}$	2) $\underline{y'' - \alpha^2 y = 0}$	3) $\underline{y'' + \beta^2 y = 0}$
$k^2 + bk = 0$	$k^2 - \alpha^2 = 0$	$k^2 + \beta^2 = 0$
$k(k + b) = 0$	$k^2 = \alpha^2$	$k^2 = -\beta^2$
$k_1 = 0$; $k_2 = -b$	$k_{1,2} = \pm\alpha$	$k_{1,2} = \pm\beta\, i$
$y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-bx}$	$y_1 = e^{\alpha x}$; $y_2 = e^{-\alpha x}$	$y_1 = \cos\beta x$; $y_2 = \sin\beta x$
$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-bx}$	$\bar{y} = C_1\, e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$	$\bar{y} = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$

Лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$$
$$y = \bar{y} + y^*$$

	$\underline{f(x) = Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots + N}$	$\underline{f(x) = K}$
$k_{1,2} \neq 0$	$y^* = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F$	$y^* = A$
$k_1 = 0$ або $k_2 = 0$	$y^* = x\left(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F\right)$	$y^* = Ax$

	$\underline{f(x) = \left(Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots + N\right)e^{\alpha x}}$	$\underline{f(x) = K\,e^{\alpha x}}$
$k_{1,2} \neq \alpha$	$y^* = \left(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F\right)e^{\alpha x}$	$y^* = A\,e^{\alpha x}$
$k_1 = \alpha$ або $k_2 = \alpha$	$y^* = x\left(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F\right)e^{\alpha x}$	$y^* = x\,A\,e^{\alpha x}$
$k_1 = k_2 = \alpha$	$y^* = x^2\left(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F\right)e^{\alpha x}$	$y^* = x^2 A\,e^{\alpha x}$

	$\underline{f(x) = K\cos\beta x + L\sin\beta x}$
	$\left(f(x) = K\cos\beta x\ ,\ f(x) = L\sin\beta x\right)$
$k_{1,2} \neq \beta i$	$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x$
$k_1 = \beta i$	$y^* = x\,A\cos\beta x + x\,B\sin\beta x$

	$\underline{f(x) = K\,e^{\alpha x}\cos\beta x + Le^{\alpha x}\sin\beta x}$
	$\left(f(x) = K\,e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\, f(x) = Le^{\alpha x}\sin\beta x\right)$
$k_{1,2} \neq \alpha + \beta i$	$y^* = A\,e^{\alpha x}\cos\beta x + B\,e^{\alpha x}\sin\beta x$
$k_1 = \alpha + \beta i$	$y^* = x\,A\,e^{\alpha x}\cos\beta x + x\,B\,e^{\alpha x}\sin\beta x$

Загальний випадок спеціальної правої частини

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_l(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (\lambda=\alpha+i\beta)$$

За відсутності $e^{\alpha x}$ вважаємо $\alpha=0$
За відсутності $\sin\beta x, \cos\beta x$ вважаємо $\beta=0$

$m=\max(n,l)$

$\lambda\neq k_{1,2}$ $\qquad y^*=R_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+S_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

$\lambda=k_1$ або $\lambda=k_2$ $\qquad y^*=x\,R_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+x\,S_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

$\lambda=k_1=k_2$ $\qquad y^*=x^2\,R_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+x^2\,S_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

4.3. Диференціальні рівняння вищих порядків

Рівняння, що припускають зниження порядку

Найпростіші: $y^{(n)}(x)=f(x)$;

$$y^{(n-1)}(x)=\int f(x)dx; \qquad y^{(n-1)}(x)=f_1(x)+C_1 \;\ldots$$

Рівняння, які явно не містять шукану функцію y:

$$F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots y^{(n)}\right)=0;$$

$$y^{(k)}=p(x);$$

$$F\left(x,p,p',\ldots y^{(n-k)}\right)=0.$$

Рівняння, які явно не містять аргумент x:

$$F\left(y,y',y'',\ldots y^{(n)}\right)=0;$$

$$y'=p(y).$$

Лінійні однорідні рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=0;$$
$$\bar{y}=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)+\ldots+C_n\,y_n(x),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$,… $y_n(x)$– лінійно незалежні розв'язки рівняння, тобто

$$W[y_1,y_2,\ldots y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Функції $y_1(x)$, $y_2(x)$,… $y_n(x)$ складають ***фундаментальну систему розв'язків*** рівняння

Лінійні однорідні рівняння з постійними коефіцієнтами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0$$

Частинні розв'язки розшукуються у вигляді $y_i=e^{kx}$, де k – корені ***характеристичного рівняння*** $k^n+a_1k^{n-1}+a_2y^{n-2}+\ldots+a_n=0$.

I. Дійсне число k є коренем кратності **1**– відповідний розв'язок $y=e^{kx}$.

II. Дійсне число k є коренем кратності m– відповідні розв'язки $y_1=e^{kx}$, $y_2=xe^{kx}$, … $y_m=x^{m-1}e^{kx}$.

III. Комплексно-спряжені числа $\alpha\pm i\beta$ є коренями кратності **1**– відповідні розв'язки $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

IV. Комплексно-спряжені числа $\alpha\pm i\beta$ є коренями кратності m– відповідні розв'язки $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x$,… $y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Лінійні неоднорідні рівняння з постійними коефіцієнтами
та спеціальною правою частиною

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

$f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x} \cos\beta x + Q_l(x)\, e^{\alpha x} \sin\beta x$

$m = \max(n, l)$

$s = 0$, якщо $\lambda = \alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння.

$s = j$, якщо $\lambda = \alpha + i\beta$ є коренем кратності j.

$y^* = x^s R_m(x)\, e^{\alpha x} \cos\beta x + x^s S_m(x)\, e^{\alpha x} \sin\beta x$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. Ч. 1 : – М.: Физматлит, 2005.–648 с.
3. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. Ч. 2 : – М.: Физматлит, 2002.–464 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1: – М.: Наука, 1972.– 456 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2: – М.: Наука, 1972.– 576 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2: – М.: Физматлит, 2001.– 810 с.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: – М.: Оникс, 2003. – 304 с.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: – М.: Оникс, 2009. –448 с.

З М І С Т

Навчальне видання

Кочеткова Інна Борисівна
Сушко Лариса Федорівна
Запорожченко Олена Євгенівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ФОРМУЛАХ ТА ТАБЛИЦЯХ

Частина 2

Навчальний посібник-довідник

Тем. план 2014, поз. 93

Підписано до друку 26.05.2014. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 2,82. Умов. друк. арк. 2,79. Тираж 100 пр. Замовлення №
Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ