Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ПРАКТИКУМ

Київ — 2014

Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Практикум. (I курс II семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 190 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(протокол № 6 від 18.02.2010)

Навчальне видання

Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних.
Диференціальні рівняння.
Практикум

для студентів I курсу технічних спеціальностей

Укладачі: *Алєксєєва Ірина Віталіївна*, канд. фіз-мат. наук, доц.
Гайдей Віктор Олександрович, канд. фіз-мат. наук
Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.
Федорова Лідія Борисівна, канд. фіз-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *О. І. Клесов*, д-р фіз.-мат. наук, професор

Рецензенти: *С. В. Єфіменко*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
В. Г. Шпортюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Вступ

Практикум з вищої математики «Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння» є складовою навчального комплекту з вищої математики, який становлять: конспект лекцій, практикум, збірник задач, індивідуальних домашніх завдань і тестів.

Матеріал практикуму складено на основі багаторічного досвіду викладання математики авторами в НТУУ «КПІ», він відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей НТУУ «КПІ» денної та заочної форм навчання і містить наступні розділи дисципліни «Вища математика»:

— диференціальне числення функцій кількох змінних;
— визначені інтеграли;
— невластиві інтеграли;
— подвійні інтеграли;
— потрійні інтеграли;
— криволінійні інтеграли 1-го і 2-го роду;
— поверхневі інтеграли 1-го і 2-го роду;
— елементи теорії поля;
— диференціальні рівняння 1-го порядку, які інтегруються у квадратурах і рівняння вищих порядків, які зводяться до них;
— лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Практикум містить розгорнутий довідковий матеріал, широкий спектр розв'язаних навчальних задач, які достатньо розкривають відповідні теоретичні питання і сприяють розвитку практичних навичок і є зразком належного оформлення задач для самостійної роботи, певну кількість задач для самостійної роботи в аудиторії та домашнього завдання.

Метою практикуму є:

- допомогти опанувати студентам основ математичного апарату в галузі диференціального числення функцій кількох змінних, усіх типів визначених інтегралів, теорії поля, диференціальних рівнянь;
- розвинути логічне та аналітичне мислення;
- виробити навички вибору ефективного методу розв'язання задач.

Самостійне розв'язання задач, яке формує основу математичного мислення, передбачає активну роботу з теоретичним матеріалом практикуму, використанням конспекту лекцій чи підручників.

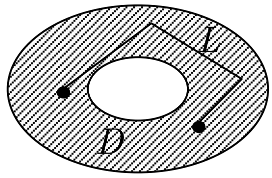
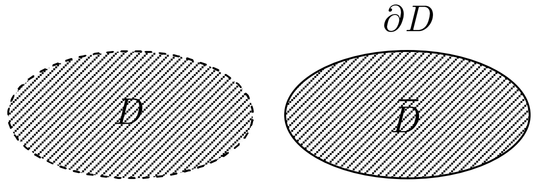
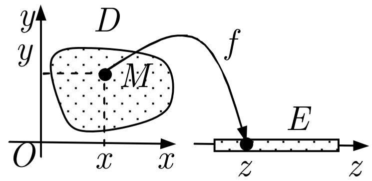
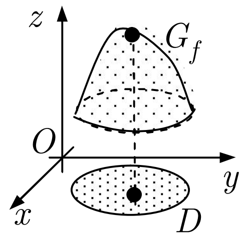
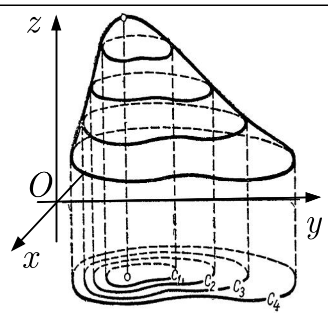
У практичній частині використано такі позначення:

[A.B.C] — посилання на клітинку **C**, у якій вміщено теоретичний факт або формулу, таблиці **A.B.** з теми **A**.

①,②,③,… — посилання у навчальній задачі на коментар, який вміщено після розв'язання.

Розділ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

9.1. Функція двох змінних

❶ ε ***-окіл точки*** M_0	$U_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid d(M, M_0) < \varepsilon\}$
❷ ***Зв'язна множина.*** Множину D називають *зв'язною*, якщо будь-які її точки можна сполучити ламаною $L \subset D$.	
❸ ***Область.*** Відкриту, зв'язну множину називають *областю*. Об'єднання області D з її межею ∂D називають *замкненою областю* $\bar{D} = D \cup \partial D$.	
❹ ***Функція двох змінних.*** Якщо вказано правило f, за яким кожній точці $M(x;y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ відповідає єдине значення $z \in E \subset \mathbb{R}^1$, то кажуть, що в області D означено *функцію двох змінних* $$z = f(x,y), (x;y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$ *Графіком* функції $z = f(x,y), (x;y) \in D,$ називають $G_f = \{M(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$	 D — *область означення*; E — *множина значень* 
❺ ***Функція*** n ***змінних***	$u = f(x_1, x_2, ..., x_n), (x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathbb{R}_n$
❻ ***Лінія рівня*** функції $z = f(x,y)$ $$L_C = \{M(x;y) \mid f(x,y) = C\},$$ $$C = \text{const}$$	
❼ ***Поверхня рівня*** функції $$u = f(x,y,z)$$	$\Omega_C = \{M(x;y;z) \mid f(x,y,z) = C\},$ $C = \text{const}$

9.2. Границя функції. Неперервність

❶ ***Границя функції.*** $$\lim_{M \to M_0} f(M) = A$$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall M \in U_\delta(M_0) \setminus \{M_0\} \Rightarrow$ $\Rightarrow f(M) \in U_\varepsilon(A)$ Границя функції не залежить від напряму руху точки M до точки M_0.
❷ ***Неперервність функції.*** Функцію $u = f(M)$ називають *неперервною в точці* M_0, якщо	вона визначена в околі точки M_0 і $$\exists \lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$
Функцію, неперервну в кожній точці множини D, називають ***неперервною на множині*** D.	
❸ ***Частинні*** прирости: функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$	$\Delta_x z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, $\Delta_y z(M_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, де $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$
❹ ***Повний*** приріст функції: $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$	$\Delta z(M_0) =$ $= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$
❺ ***Умова неперервності*** функції $u = f(M)$ у точці M_0	$$\lim_{M \to M_0} \Delta u(M_0) = 0$$
❻ ***Теореми Веєрштраса.*** Якщо функція $u = f(M)$ неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D}$, то:	1) $u = f(M)$ обмежена в області $\overline{D}$; 2) $u = f(M)$ набуває в області $\overline{D}$ своїх найбільшого та найменшого значень.

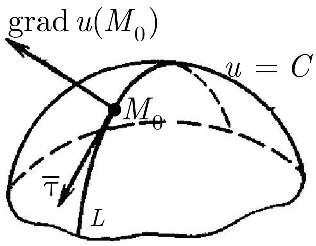
9.3. Похідні функцій кількох змінних

❶ ***Частинна*** похідна функції: $z = f(x,y)$ за змінною x у точці M_0	$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\rvert_{M_0} = z'_x(M_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x}$
$z = f(x,y)$ за змінною y у точці M_0	$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\rvert_{M_0} = z'_y(M_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y}$
❷ Похідна ***складеної*** функції $z = f(x,y), x = x(t), y = y(t),$ $\tilde{z}(t) = f(x(t), y(t))$	$\dfrac{d\tilde{z}}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$
$z = f(x,y),$ $x = x(u,v), y = y(u,v),$ $\tilde{z}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$	$\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},$ $\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$
❸ ***Повна*** похідна функції $z = f(x,y), y = y(x),$ $\tilde{z}(x) = f(x, y(x))$	$\dfrac{d\tilde{z}}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$
❹ Похідна ***неявної*** функції $F(x,y) = 0, \quad y = y(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$
$F(x,y,z) = 0, \qquad z = z(x,y)$	$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$
❺ Частинні похідні ***2-го порядку*** функції $z = f(x,y)$	
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right);$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right);$	*мішані* похідні: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right);$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$
❻ ***Теорема Шварца.*** Нехай функція $z = f(x,y)$ та її похідні $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ означені в області D.	Якщо z''_{xy} та z''_{yx} неперервні в точці $M_0 \in D$, то $z''_{xy}(M_0) = z''_{yx}(M_0).$

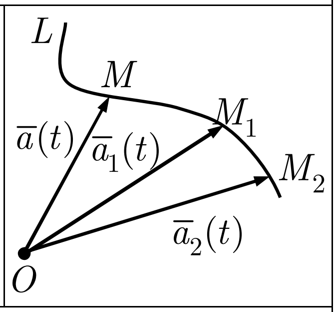
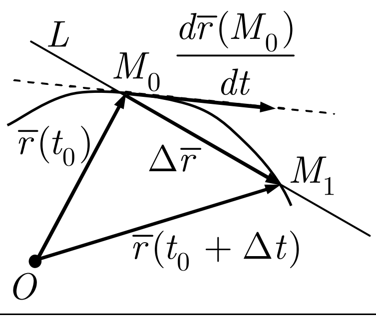
9.4. Диференціали функцій кількох змінних

❶ ***Диференційовність функції в точці.*** Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційовною в точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо в деякому околі цієї точки повний приріст функції має вигляд	$\Delta z(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$ $\rho \to 0$ де $A, B = \text{const};$ $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$
Функція $u = f(M)$ диференційовна у точці $M_0 \in \mathbb{R}^n$, якщо	$\Delta u(M_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(\rho)$
❷ ***Необхідна умова диференційовності.*** Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M_0, то $A = z'_x(M_0), B = z'_y(M_0).$	❸ ***Достатня умова диференційовності.*** Якщо функція $z = f(x, y)$ має в околі точки M_0 неперервні похідні $z'_x(M), z'_y(M),$ то вона диференційовна в точці M_0.
❹ ***Повний диференціал функції в точці.*** Головну лінійну частину приросту диференційовної в точці M_0 функції $u = f(M)$ називають	*повним диференціалом* функції в точці M_0 і позначають $du(M_0)$: $\Delta u(M_0) = du(M_0) + o(\rho), \rho \to 0$
❺ ***Повний*** диференціал функції $z = f(x, y)$	$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$
$u = f(x, y, z)$	$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$
❻ ***Частинні*** диференціали функції $z = f(x, y)$	$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$
❼ Диференціал ***2-го порядку*** функції $z = f(x, y)$ незалежних змінних x, y	$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2$
❽ Диференціал m ***-го порядку*** функції $z = f(x, y)$ незалежних змінних x, y	$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m z$

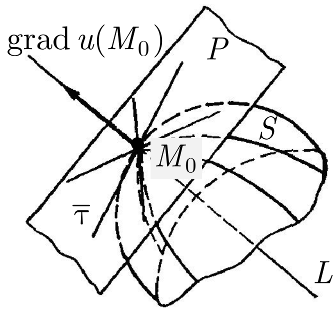
9.5. Похідна за напрямом. Градієнт

❶ ***Похідна за напрямом.*** *Похідною* функції $u = f(M)$ *за напрямом* $\overline{l}$ у точці M_0 називають	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(\overline{r_0}+t\overline{l}^{\,0})-f(\overline{r_0})}{t}$, де $\overline{l}^{\,0}$ — орт вектора $\overline{l}, \overline{r_0} = \overline{OM_0}$.
❷ ***Похідна*** функції $u = u(x,y)$ за напрямом $\overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\sin\alpha$
$u = u(x,y,z), \overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix}$	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha +$ $+\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$
❸ ***Градієнт.*** *Градієнтом* диференційовної функції $u = f(M)$ у точці M_0 називають вектор	$\operatorname{grad} u(M_0) =$ $= \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\overline{j} + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\overline{k}$
❹ ***Правила обчислення градієнта.*** ① $\operatorname{grad} C = \overline{0}, C = \text{const}$; ② $\operatorname{grad}(Cu) = C\operatorname{grad} u, C = \text{const}$; ③ $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;	④ $\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v$; ⑤ $\operatorname{grad}\dfrac{u}{v} = \dfrac{v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v}{v^2}$; ⑥ $\operatorname{grad} f(u) = f'(u)\operatorname{grad} u$
❺ ***Зв'язок*** між похідною за напрямом і градієнтом функції	$\dfrac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \overline{l}^{\,0}) = \operatorname{pr}_{\overline{l}^0}\operatorname{grad} u$
❻ ***Властивості градієнта.*** ① Градієнт напрямлений у бік зростання функції. ② Довжина градієнта функції в точці дорівнює найбільшій похідній функції в цій точці, тобто $\max\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left\|\operatorname{grad} u(M_0)\right\|$	❼ ***Властивості похідної за напрямом.*** Величина $\left\|\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l}\right\|$ визначає швидкість зміни функції в точці M_0 за напрямом $\overline{l}$, а знак $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ — характер її зміни (зростання або спадання).
③ Градієнт функції u у точці M_0 напрямлений уздовж нормалі до поверхні рівня $u(x,y,z) = C$, що проходить через точку M_0.	

9.6. Вектор-функція дійсного аргументу

❶ ***Вектор-функція дійсного аргументу.*** Якщо кожному значення дійсної змінної $t \in D \subset \mathbb{R}$ поставлено у відповідність вектор $\overline{a}(t) \in \mathbb{R}^3$, то кажуть, що на множині D задано *вектор-функцію* $\overline{a} = \overline{a}(t)$ дійсної змінної t.	$\overline{a} = a_x(t)\overline{i} + a_y(t)\overline{j} + a_z(t)\overline{k} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}, t \in D$
❷ ***Годограф.*** *Годографом* вектор-функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$ називають лінію, яку описує у просторі кінець вектора $\overline{r}$. Будь-яку лінію у просторі можна розглядати як годограф деякої вектор-функції.	$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ 
❸ ***Границя вектор-функції*** $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{a}(t) = \overline{A}$	$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0\, \forall t :$ $0 < \left\| t - t_0 \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \overline{a}(t) - \overline{A} \right\| < \varepsilon$
❹ ***Неперервність вектор функції.*** Вектор-функція $\overline{a} = \overline{a}(t)$ *неперервна в точці* t_0, якщо	$\lim\limits_{t \to t_0} \overline{a}(t) = \overline{a}(t_0)$
❺ ***Похідна вектор-функції***	$\dfrac{d\overline{a}(t_0)}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overline{a}(t + \Delta t) - \overline{a}(t_0)}{\Delta t} = \dfrac{da_x(t_0)}{dt}\overline{i} + \dfrac{da_y(t_0)}{dt}\overline{j} + \dfrac{da_z(t_0)}{dt}\overline{k}$
❻ ***Дотичний вектор.*** Якщо $\overline{r} = \overline{r}(t)$, то $\dfrac{d\overline{r}}{dt}$ є вектором, напрямленим за дотичною до годографа вектор-функції $\overline{r}(t)$ у бік зростання аргументу t.	

9.7. Дотична і нормаль

<table>
<tr><td>❶ Дотична площина і нормаль до поверхні. Дотичною площиною до поверхні S у точці M_0 називають площину $P,$ у якій розташовані дотичні до всеможливих кривих, які проведені на S через M_0.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нормаллю називають пряму $L,$ що проходить через M_0 перпендикулярно до $P.$</td></tr>
<tr><td>❷ Вектор нормалі до поверхні $F(x,y,z)=0$</td><td>$\overline{n} = \pm\,\mathrm{grad}\,F$</td></tr>
<tr><td>$z = f(x,y)$</td><td>$\overline{n} = \pm\left(z'_x\overline{i} + z'_y\overline{j} - \overline{k}\right)$</td></tr>
<tr><td>❸ Рівняння дотичної площини до поверхні $F(x,y,z)=0$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$</td><td>$F'_x(M_0)(x-x_0)+$
$+F'_y(M_0)(y-y_0)+$
$+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$</td></tr>
<tr><td>❹ Рівняння нормалі до поверхні $F(x,y,z)=0$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$</td><td>$\dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \dfrac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \dfrac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$</td></tr>
<tr><td>❺ Рівняння дотичної площини до поверхні $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$</td><td>$z'_x(M_0)(x-x_0)+z'_y(M_0)(y-y_0)-$
$-(z-z_0)=0,$
$z_0 = f(x_0,y_0)$</td></tr>
<tr><td>❻ Рівняння нормалі до поверхні $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$</td><td>$\dfrac{x-x_0}{z'_x(M_0)} = \dfrac{y-y_0}{z'_y(M_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$</td></tr>
<tr><td>❼ Рівняння дотичної до кривої
$L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$</td><td>$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y-y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z-z_0}{z'(t_0)},$
$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$</td></tr>
<tr><td>❽ Рівняння нормальної площини до кривої L у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$</td><td>$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+$
$+z'(t_0)(z-z_0)=0$</td></tr>
</table>

9.8. Локальні екстремуми функції двох змінних

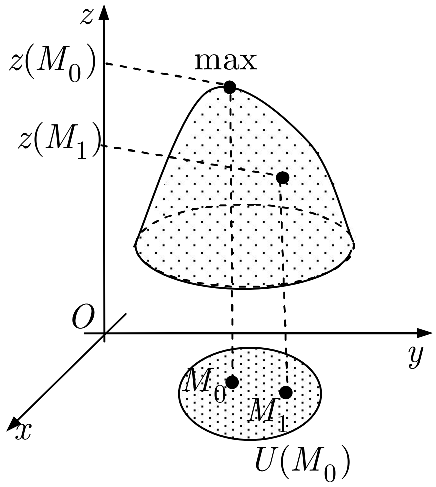
❶ ***Тейлорова формула.*** Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна $(m+1)$ разів у деякому околі $U(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$, то для будь-якої точки $M \in U(M_0)$ правдива *Тейлорова формула* з центром у точці M_0.

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^m f(M_0)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(M_\theta)}{(m+1)!}, M_\theta \in U(M_0)$$

❷ ***Локальний максимум (мінімум).*** Функція $z = f(x, y)$ має *локальний максимум* (*мінімум*) у точці M_0, якщо існує такий окіл $U(M_0)$, для всіх точок якого, відмінних від точки M_0, виконано нерівність

$$f(M_0) > f(M) \quad (f(M_0) < f(M)).$$

Точки локального максимуму та мінімуму називають точками *локального екстремуму*.



❸ ***Необхідна умова існування локального екстремуму.*** Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M_0 і має екстремум у цій точці, то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow dz(M_0) = 0$$

Точку M_0, в якій $dz(M_0) = 0$, називають *стаціонарною*.

❹ Матриця ***Гессе*** функції $z = f(x, y)$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{pmatrix}$$

❺ ***Гессіан*** функції $z = f(x, y)$

$$\det H(x, y) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}$$

Позначення

$$A\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}, B\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y}, C\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2},$$

$$\Delta = \det H(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

❻ ***Достатні умови локального екстремуму***. Нехай функція $z = f(x, y)$ двічі диференційовна в точці M_0 у деякому її околі і точка M_0 — стаціонарна точка функції f.	1) якщо $\Delta > 0$, то в точці M_0 функція f має екстремум: а) коли $A > 0$, мінімум; б) коли $A < 0$, максимум; 2) якщо $\Delta < 0$, то в точці M_0 функція f не має екстремуму; 3) якщо $\Delta = 0$, то функція потребує додаткового дослідження.
❼ Алгоритм дослідження функції ***на локальний екстремум.*** ① Визначають область означення функції. ② Розв'язуючи систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ знаходять стаціонарні точки функції f: $M_1(x_1; y_1), ..., M_n(x_n; y_n)$.	③ Для кожної точки M_i перевіряють достатні умови існування екстремуму і висновують.

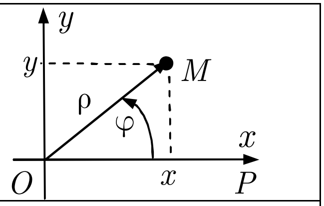
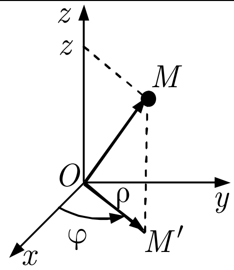
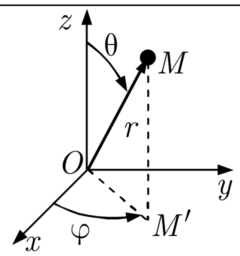
9.9. Глобальний і умовний екстремум функції двох змінних

❶ ***Глобальні екстремуми.*** Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в обмеженій замкненій області $\overline{D} = D \cup \partial D$, то вона досягає свого найбільшого (найменшого) значення або в стаціонарній точці всередині області D або на межі області ∂D.	❷ ***Умовні екстремуми.*** Функція $z = f(x, y)$ має *умовний максимум* (*умовний мінімум*) в точці M_0, якщо існує такий окіл $U(M_0)$, для всіх точок якого, відмінних від точки M_0, які справджують *умову зв'язку* $\varphi(M) = 0$, виконано нерівність $f(M_0) > f(M)$ $(f(M_0) < f(M))$.
❸ ***Функція Лаґранжа*** для знаходження умовного екстремуму функції $f(x, y)$ з умовою зв'язку $\varphi(x, y) = 0$	$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

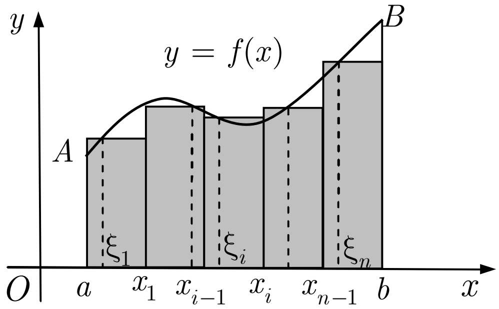
❹ ***Необхідні умови*** умовного екстремуму	$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$
❺ ***Достатні умови умовного екстремуму.*** Нехай функції $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ двічі неперервно диференційовні в околі стаціонарної точки $(x_0;y_0;\lambda_0)$ функції Лаґранжа $$L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$$ тоді, якщо	$\begin{cases} d^2L(x_0,y_0;\lambda_0) < 0, \\ \varphi(x_0,y_0) = 0; \end{cases}$ $\left(\begin{cases} d^2L(x_0,y_0;\lambda_0) > 0, \\ \varphi(x_0,y_0) = 0; \end{cases}\right)$ то в точці $M_0(x_0;y_0)$ функція $z = f(x,y)$ має локальний умовний максимум (умовний мінімум).
❻ Алгоритм дослідження функції $z = f(x,y)$ ***на глобальний екстремум у замкненій області*** $$\overline{D} = D \cup L_1 \cup ... \cup L_n,$$ $$L_i : \varphi_i(x,y) = 0, i = \overline{1,n}.$$ ① Розв'язуючи систему $$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases}$$ знаходять стаціонарні точки функції f, які належать області D.	② На кожній ділянці межі $\varphi_i(x,y) = 0$ знаходять стаціонарні точки функції однієї змінної $$z_i = f(x,y)\Big\|_{\varphi_i(x,y)=0}$$ і долучають до розгляду межові точки цієї ділянки. ③ Обчислюють значення функції у знайдених точках і вибирають серед них найбільше та найменше значення функції в області $\overline{D}$.
❼ Алгоритм дослідження функції $z = f(x,y)$ ***на умовний екстремум*** з умовою зв'язку $\varphi(x,y) = 0$. ① Складають функцію Лаґранжа. $$L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y).$$	② Знаходять стаціонарні точки функції Лаґранжа із системи $$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$ ③ У кожній знайденій точці перевіряють достатні умови існування умовного екстремуму і висновують.

Розділ 10. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

10.1. Недекартові системи координат

❶ ***Полярні координати*** $\rho \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi]$ $\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$	$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$	
❷ ***Узагальнені полярні координати*** $\rho \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi]$	$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$	$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \rho^2}$
❸ ***Циліндричні координати*** $\rho \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi]$ $\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$	$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$	
❹ ***Узагальнені циліндричні координати*** $\rho \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi]$	$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$	$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \rho^2}$
❺ ***Сферичні координати*** $r \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi], \theta \in [0; \pi]$ $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$	$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$	
❻ ***Узагальнені сферичні координати*** $r \geq 0, \varphi \in (-\pi; \pi], \theta \in [0; \pi]$ $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = r^2}$	$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$	

10.2. Визначений інтеграл

❶ ***Розбиття відрізка*** $[a;b]$ $\left(\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1,n}\right)$	$\{x_0, x_1, ..., x_n\}$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$
❷ ***Інтегральна сума*** для функції $f(x), x \in [a;b]$	$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,\ \xi_i \in [x_{i-1};x_i]$
❸ ***Визначений інтеграл.*** Якщо існує границя інтегральної суми, коли $\max \Delta x_i \to 0,$ яка не залежить ані від способу розбиття відрізку $[a;b]$ на частини, ані від вибору точок усередині кожної частини, то її називають *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ *за відрізком* $[a;b]$ і позначають	 $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$
❹ ***Геометричний зміст визначеного інтеграла.*** Площа криволінійної трапеції $aABb$, якщо $f(x) \geq 0$	$\int\limits_a^b f(x)dx = S$
❺ ***Функція інтегровна на відрізку.*** Функцію $f(x)$ називають *інтегровною* на відрізку $[a;b]$, якщо для неї існує $\int\limits_a^b f(x)dx.$	❻ ***Необхідна умова інтегровності.*** Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.
❼ ***Достатні умови інтегровності.*** Функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, якщо виконано одну з умов:	1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$; 2) функція $f(x)$ обмежена і неперервна на $[a;b]$, за винятком скінченної кількості точок; 3) означена і монотонна на відрізку $[a;b]$.

10.3. Властивості визначеного інтеграла.

❶ $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$ (*незалежність від змінної інтегрування*);	
❷ $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx$ (*лінійність*);	
❸ $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (*адитивність*);	
❹ $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ (*орієнтованість*), $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;	
❺ $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, де $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x), M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$;	
❻ якщо $f(x) \ge 0, x \in [a;b], a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$ (*збереження знаку*);	
❼ якщо $f(x) \le g(x), x \in [a;b], a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$ (*монотонність*);	
❽ якщо функція f інтегровна на $[a;b]$ $(a < b)$, то $\left\|\int\limits_a^b f(x)dx\right\| \le \int\limits_a^b \left\|f(x)\right\| dx.$	
❾ ***Теорема про середнє значення функції.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то знайдеться така точка $c \in (a;b)$, що	$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$
❿ ***Теорема Бароу.*** Якщо функція $f(t)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то функція $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ є первісною для функції $f(x)$ і правдива *формула Бароу:*	$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x), a \le x \le b$

10.4. Обчислення визначеного інтеграла

❶ ***Теорема Ньютона — Лейбніца.*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $[a;b]$, то правдива *формула Ньютона — Лейбніца*:	$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a),$ $F'(x) = f(x)$
❷ ***Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.*** Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a;b]$, то правдива *формула інтегрування частинами* у визначеному інтегралі:	$\int\limits_a^b udv = uv\Big\|_a^b - \int\limits_a^b vdu$
❸ ***Заміна змінних у визначеному інтегралі.*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і $x = \varphi(t)$ — неперервно диференційовна функція на $[\alpha;\beta]$, де $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, причому $f(\varphi(t))$ означена і неперервна на $[\alpha;\beta]$, то правдива *формула заміни змінної* у визначеному інтегралі	$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
❹ Інтеграл від ***парної функції*** f за симетричним відрізком	$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$
❺ Інтеграл від ***непарної функції*** f за симетричним відрізком	$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$
❻ Інтеграл від T***-періодичної функції*** f	$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$
❼ ***Формула Валіса*** $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \begin{cases} 1, & n = 2k-1, \\ \frac{\pi}{2}, & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$	

10.5. Застосування визначеного інтеграла

❶ ***Площа*** фігури, обмеженої лініями $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b,$ $f(x) \geq g(x), x \in [a;b]$	$S = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$
❷ ***Площа*** криволінійного сектора $\rho = \rho(\varphi), \varphi = \alpha, \varphi = \beta$ в ***полярних*** координатах	$S = \dfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$
❸ ***Площа*** криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою ***параметрично***: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1; t_2]$	$S = \left\vert \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt \right\vert$
❹ ***Об'єм*** тіла за відомими площами ***перерізів*** $S(x)$, перпендикулярних до осі Ox	$V = \int\limits_a^b S(x)dx$
❺ ***Об'єм*** тіла, одержаного ***обертанням*** криволінійної трапеції навколо ***осі*** Ox	$V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$
❻ ***Довжина*** дуги кривої $y = f(x), x \in [a;b]$	$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$
❼ ***Площа поверхні обертання***, утвореної обертанням кривої $y = f(x), x \in [a;b]$, навколо осі Ox	$Q = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

10.6. Невластиві інтеграли

Невластивий інтеграл 1-го роду	***Невластивий інтеграл 2-го роду***
❶ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx,$ f — неперервна на кожному $[a;A]$	❷ $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$ a — точка нескінченного розриву, $f \in C_{(a;b]}$
Якщо існує скінчена границя , то інтеграл *збігається*, якщо ж ні, то — інтеграл *розбігається.*	
❸ $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} - \begin{cases} \text{збігається}, & \alpha > 1, \\ \text{розбігається}, & \alpha \leq 1 \end{cases}$	❹ $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^\alpha} - \begin{cases} \text{збігається}, & \alpha < 1, \\ \text{розбігається}, & \alpha \geq 1 \end{cases}$

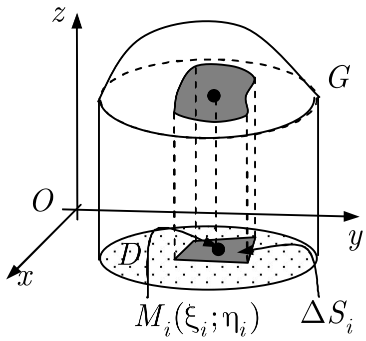
❺ ***Ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні і справджують умову $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то зі збіжності $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ випливає збіжність $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$ а з розбіжності $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$	❻ ***Ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $(a;b]$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні, мають нескінченний розрив у точці $x = a$ і справджують умову $0 \le f(x) \le \varphi(x),$ то зі збіжності $\int\limits_a^{b} \varphi(x)dx$ випливає збіжність $\int\limits_a^{b} f(x)dx,$ а з розбіжності $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{b} \varphi(x)dx.$
❼ ***Гранична ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ додатні і неперервні, існує скінченна $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0,$$ то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.	❽ ***Гранична ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $(a;b]$ функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ додатні і неперервні, мають нескінченний розрив у точці $x = a,$ існує скінченна $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0,$$ то $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{b} \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.
❾ Якщо $\int\limits_a^{+\infty} \left\lvert f(x)\right\rvert dx$ збігається, то збігається й $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$	❿ Якщо збігається $\int\limits_a^{b} \left\lvert f(x)\right\rvert dx,$ то збігається й $\int\limits_a^{b} f(x)dx.$
⓫ $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_A^{b} f(x)dx;$ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$$	⓬ $\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$ $$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{b} f(x)dx,$$ $$c \in (a;b), \quad \lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

10.7. Подвійні інтеграли

<table>
<tr><td colspan="2">❶ Подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ за областю D

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i,$$</td><td>



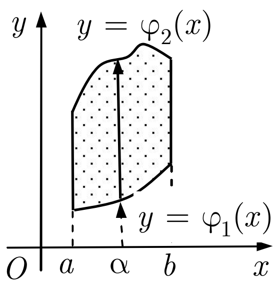
</td></tr>
<tr><td colspan="3">де ΔS_i — площі елементарних ділянок; d_i — їхні діаметри.</td></tr>
<tr><td colspan="2">❷ Геометричний зміст подвійного інтеграла. Об’єм циліндричного тіла G обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y) \ge 0$</td><td>

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">❸ Основні властивості подвійного інтеграла

① $\iint\limits_D 1 \cdot dxdy = S(D)$ (площа D) (нормованість);

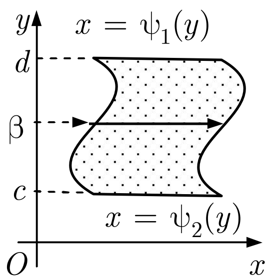
② $\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy$ (лінійність);

③ $\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ (адитивність);</td></tr>
<tr><td colspan="3">Обчислення подвійних інтегралів</td></tr>
<tr><td colspan="3">❹ Перехід до повторних інтегралів у декартових координатах</td></tr>
<tr><td>① Область правильна в напрямі осі Oy</td><td>



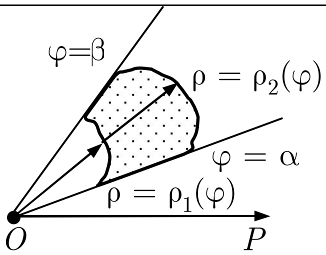
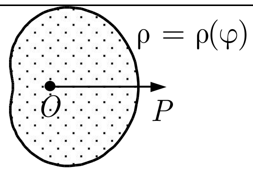
</td><td>Пряма $x = \alpha$ $(a < \alpha < b)$ перетинає межу області не більше ніж у двох точках.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$</td></tr>
<tr><td>② Область правильна в напрямі осі Ox</td><td>



</td><td>Пряма $y = \beta$ $(c < \beta < d)$ перетинає межу області не більше ніж у двох точках.

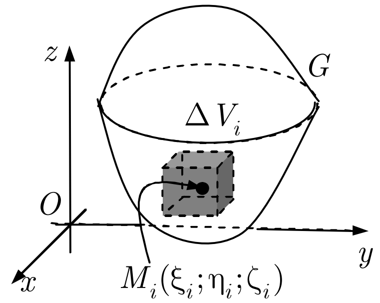
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$</td></tr>
</table>

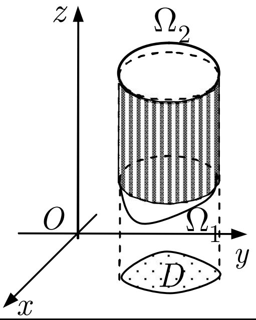
<table>
<tr><td colspan="3">❺ Заміна змінних у подвійному інтегралі</td></tr>
<tr><td colspan="2">① Перехід до нових координат
$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$
з якобіаном $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$</td><td>$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$
$= \iint\limits_{\tilde{D}} f(x(u,v), y(u,v)) \left| J(u,v) \right| dudv$</td></tr>
<tr><td colspan="2">② Перехід до полярних координат
$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ \left|J\right| = \rho \end{cases}$</td><td>$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$
$= \iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho$</td></tr>
<tr><td colspan="2">③ Перехід до узагальнених полярних координат
$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ \left|J\right| = ab\rho \end{cases}$</td><td>$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$
$= \iint\limits_{\tilde{D}} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)ab\rho d\varphi d\rho$</td></tr>
<tr><td colspan="3">❻ Перехід до повторних інтегралів у полярних координатах</td></tr>
<tr><td>① Криволінійний сектор («радіальна область»)</td><td>
</td><td>$\iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho,\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Будь-який промінь $\varphi = \gamma$ $(\alpha < \gamma < \beta)$ перетинає межу області не більше ніж у двох точках.</td></tr>
<tr><td>② Криволінійний сектор
охоплює початок координат</td><td>
</td><td>$\iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho,\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho$</td></tr>
</table>

10.8. Застосування подвійного інтеграла

❶ ***Площа плоскої області***	$S(D) = \iint\limits_D dxdy$
❷ ***Маса пластинки*** у формі області D з густиною $\mu = \mu(x, y)$	$m = \iint\limits_D \mu(x, y)dxdy$
❸ ***Статичні моменти*** пластинки щодо осей	$M_x = \iint\limits_D y\mu(x, y)dxdy,$ $M_y = \iint\limits_D x\mu(x, y)dxdy$
❹ ***Координати центра мас*** пластинки	$x_c = \dfrac{M_y}{m}, y_c = \dfrac{M_x}{m}$
❺ ***Моменти інерції*** пластинки щодо осей	$I_x = \iint\limits_D y^2\mu(x, y)dxdy,$ $I_y = \iint\limits_D x^2\mu(x, y)dxdy$
❻ ***Моменти інерції*** пластинки щодо початку координат	$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\mu(x, y)dxdy$

10.9. Потрійні інтеграли

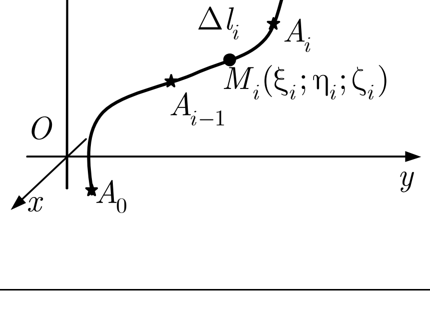
❶ ***Потрійний*** інтеграл від функції $u = f(x, y, z)$ ***за областю*** G $\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz =$ $= \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i,$	
де ΔV_i — об'єми елементарних областей; d_i — їхні діаметри.	
❷ ***Фізичний зміст потрійного інтеграла.*** Маса тіла G з густиною $\mu = \mu(x, y, z) \geq 0$	$\iiint\limits_G \mu(x, y, z)dxdydz = m(G)$
❸ ***Основні властивості потрійного інтеграла***	
① $\iiint\limits_G 1dxdydz = V(G)$ (*об'єм* G) (*нормованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*	

<table>
<tr><td colspan="3">Обчислення потрійних інтегралів</td></tr>
<tr><td>❹ Область циліндрична в напрямі осі Oz
$\Omega_2 : z = z_2(x, y)$,
$\Omega_1 : z = z_1(x, y)$</td><td>
</td><td>$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$$ $$= \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Будь-яка вертикальна пряма перетинає межу області не більше ніж у двох точках.</td></tr>
<tr><td colspan="2">❺ Область циліндрична в напрямі осі Oz; проекція D_{Oxy} правильна у напрямі осі Oy:
$$D_{Oxy} : \begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$$ $$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❻ Перехід до циліндричних координат
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \qquad \left|J\right| = \rho \\ z = z \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$$ $$= \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\varphi,\rho,z)\rho d\varphi d\rho dz,$$ $$\tilde{f}(\varphi,\rho,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❼ Перехід до узагальнених циліндричних координат
$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \qquad \left|J\right| = ab\rho \\ z = z \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$$ $$= \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\varphi,\rho,z)ab\rho d\varphi d\rho dz,$$ $$\tilde{f}(\varphi,\rho,z) = f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi, z)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❽ Перехід до сферичних координат
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad \left|J\right| = r^2\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$$ $$= \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\varphi,\theta,r)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr,$$ $$\tilde{f}(\varphi,\theta,r) =$$ $$= f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❾ Перехід до узагальнених сферичних координат
$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \left|J\right| = abcr^2\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$</td><td>$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$$ $$= \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\varphi,\theta,r)abcr^2\sin\theta d\varphi d\theta dr,$$ $$\tilde{f}(\varphi,\theta,r) =$$ $$= f(ar\cos\varphi\sin\theta, br\sin\varphi\sin\theta, cr\cos\theta)$$</td></tr>
</table>

10.10. Застосування потрійного інтеграла

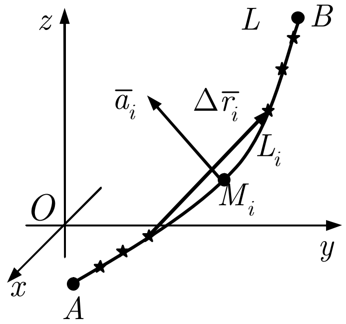
❶ ***Об'єм тіла*** G	$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz$
❷ ***Маса тіла*** з густиною $\mu = \mu(x,y,z)$	$m(G) = \iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz$
❸ ***Статичні моменти*** тіла щодо координатних площин	$M_{\left\{\begin{smallmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{smallmatrix}\right\}} = \iiint\limits_G \left\{\begin{matrix} z \\ y \\ x \end{matrix}\right\} \mu(x,y,z)dxdydz$
❹ ***Координати центра мас*** тіла	$x_c = \dfrac{M_{yz}}{m}; y_c = \dfrac{M_{xz}}{m}; z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$
❺ ***Моменти інерції*** тіла щодо координатних площин	$I_{\left\{\begin{smallmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{smallmatrix}\right\}} = \iiint\limits_G \left\{\begin{matrix} z^2 \\ y^2 \\ x^2 \end{matrix}\right\} \mu(x,y,z)dxdydz$
❻ ***Моменти інерції*** тіла щодо осей координат	$I_{\left\{\begin{smallmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{smallmatrix}\right\}} = \iiint\limits_G \left\{\begin{matrix} y^2+z^2 \\ x^2+z^2 \\ x^2+y^2 \end{matrix}\right\} \mu dxdydz$
❼ ***Момент інерції*** тіла щодо початку координат	$I_O = \iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\mu dxdydz$

10.11. Криволінійні інтеграли 1-го роду

❶ ***Гладкі криві.*** Криву $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2] \\ z = z(t), \end{cases}$ називають *гладкою*,	якщо функції $x(t), y(t), z(t)$ — неперервно диференційовні. Криву, що складається зі скінченної кількості гладких кривих і не має точок самоперетину, називають *кусково-гладкою*.
❷ ***Криволінійний інтеграл 1-го роду*** від функції $f(x,y,z)$ уздовж кривої L $$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i,$$ де Δl_i — довжина ланки $A_{i-1}A_i$.	

❸ ***Фізичний зміст криволінійного інтеграла 1-го роду.*** Маса, розподілена вздовж кривої L з густиною $\mu = \mu(x, y, z) \geq 0$	$\int\limits_L \mu(x, y, z)dl = m(L)$
❹ ***Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду*** 1) $\int\limits_L 1 \cdot dl = l(L)$ (*довжина* L); 2) лінійність; 3) адитивність.	
Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду (крива L — кусково-гладка)	
❺ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2] \\ z = z(t) \end{cases}$	$\int\limits_L f(x, y, z)dl =$ $= \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt$
$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt$	
❻ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} t \in [t_1; t_2]$	$\int\limits_L f(x, y)dl =$ $= \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt$
$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt$	
❼ $L: y = y(x), a \leq x \leq b$	$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2}dx$
$dl = \sqrt{1 + y_x'^2}dx$	
❽ $L: \rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$	$\int\limits_L f(x, y)dl =$ $= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}d\varphi$
$dl = \sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}d\varphi$	
Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду	
❾***Довжина дуги*** L	$l(L) = \int\limits_L dl$
❿ ***Маса розподілена вздовж кривої*** з густиною $\mu = \mu(x, y, z)$	$m(L) = \int\limits_L \mu(x, y, z)dl$

10.12. Криволінійні інтеграли 2-го роду

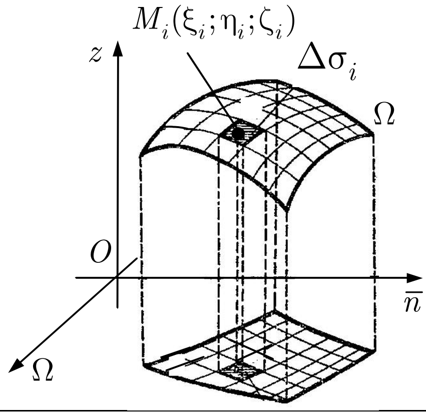
❶ ***Вектор-функція трьох змінних***	$\overline{a} = \overline{a}(M) =$ $= P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$
❷ ***Орієнтовані криві.*** Криву, для якої вибрано початкову та кінцеву точки і вказано напрям руху, називають *орієнтованою.*	
❸ ***Криволінійний інтеграл 2-го роду*** від вектор-функції $\overline{a} = \overline{a}(M)$ уздовж кривої L $$\lim_{\substack{\max\lvert\Delta\overline{r}_i\rvert\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r}_i) =$$ $$= \int_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$	
❹ ***Фізичний зміст криволінійного інтеграла 2-го роду.*** Робота, яку виконує змінна сила $\overline{F} = \overline{F}(x,y,z)$ під час переміщення уздовж кривої L	$\int_L (\overline{F}, d\overline{r}) = \mathrm{A}_L(\overline{F})$
❺ ***Основні властивості криволінійного інтеграла 2-го роду*** ① $\int_{AB} (\overline{a}, d\overline{r}) = -\int_{BA} (\overline{a}, d\overline{r})$ (*орієнтованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*.	
Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду	
❻ $L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t), \end{cases}$	$\int_L Pdx + Qdy + Rdz =$ $= \int_{t_1}^{t_2} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t) + \tilde{R}(t)z'(t)]dt,$
$\tilde{P}(t) = P(x(t),y(t),z(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t),y(t),z(t)), \tilde{R}(t) = R(x(t),y(t),z(t))$	
❼ $L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t_1 \le t \le t_2$	$\int_L Pdx + Qdy =$ $= \int_{t_1}^{t_2} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t)]dt,$
$\tilde{P}(t) = P(x(t),y(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t),y(t))$	
❽ $L : y = y(x), x \in [a;b]$	$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$ $= \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]dx$

❾ ***Теорема Остроградського — Ґріна.*** Якщо в замкненій області, обмеженій кусково-гладким контуром L, функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними, то	правдива *формула Остроградського — Ґріна* $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$
Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду	
❿ ***Робота змінної сили*** $\overline{F} = (P;Q;R)$ під час переміщення вздовж кривої L	$\mathrm{A}_L(\overline{F}) = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$
⓫***Циркуляція*** векторного поля $\overline{F} = (P;Q;R)$ уздовж замкненого контуру Γ	$\mathrm{C}_\Gamma(\overline{F}) = \oint\limits_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$
⓬***Площа*** плоскої області, обмеженої замкненим контуром Γ	$S = \frac{1}{2} \oint\limits_\Gamma xdy - ydx$

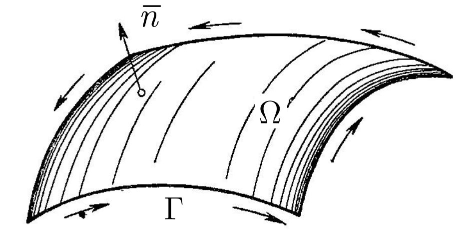
10.13. Криволінійний інтеграл 2-го роду від повного диференціала

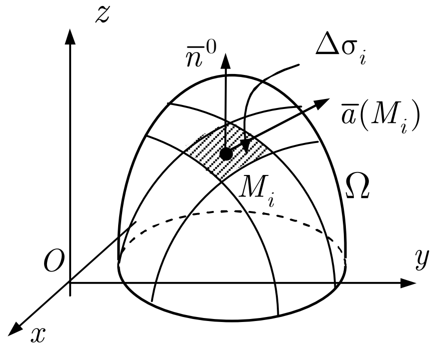
❶ ***Теорема про чотири твердження.*** Якщо $P(x,y), Q(x,y)$ — функції, неперервно диференційовні в однозв'язній області D, то рівносильні такі твердження: ① $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0 \ \forall L \subset D$;	② $\int\limits_L Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування; ③ вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ — є повним диференціалом; ④ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$
❷ Інтеграл від ***повного диференціала***	$\int\limits_{AB} du = u(B) - u(A)$
❸ ***Відновлення функції за її диференціалом***	
$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (умова [10.13.1.4])	$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + C$
$du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + $ $+R(x,y,z)dz$ (умова [10.7.1])	$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + $ $+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C$

10.14. Поверхневі інтеграли 1-го роду (за площею поверхні)

❶ ***Поверхневий інтеграл 1-го роду*** від функції $f(x,y,z)$ за поверхнею Ω $$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i,$$	
де $\Delta\sigma_i$ — площа ділянки; d_i — її діаметр.	
❷ ***Фізичний зміст поверхневого інтеграла 1-го роду.*** Маса, розподілена на поверхні Ω з густиною $\mu = \mu(x,y,z) \geq 0$	$$\iint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)d\sigma = m(\Omega)$$
❸ ***Основні властивості поверхневого інтеграла 1-го роду*** ① $\iint\limits_{\Omega} 1\cdot d\sigma = S(\Omega)$ (*площа* Ω) (*нормованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*.	
Обчислення поверхневого інтеграла 1-го роду.	
❹ Поверхня $\Omega : z = z(x,y)$ ***однозначно проектується в область*** D_{Oxy} $$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy$$	$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{Oxy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy$$
Застосування поверхневого інтеграла 2-го роду	
❺ ***Площа поверхні*** Ω	$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\sigma$$
❻ ***Маса розподілена на поверхні*** з густиною $\mu = \mu(x,y,z)$	$$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)d\sigma$$

10.15. Поверхневі інтеграли 2-го роду

<table>
<tr>
<td>❶ Орієнтовані поверхні. Поверхню Ω, у кожній точці якої вказано нормальний вектор $\overline{n}$ й напрям обходу контуру Γ, називають орієнтованою.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❷ Поверхневий інтеграл 2-го роду
від вектор-функції
$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$

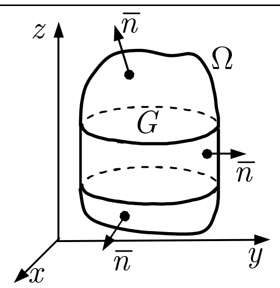
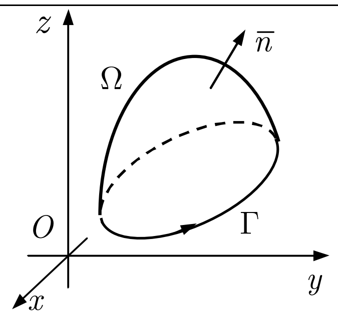
за вибраним боком поверхні Ω
$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \\ = \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma = \\ = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \overline{n}^0(M_i))\Delta\sigma_i$$</td>
<td>

де $\Delta\sigma_i$ — площа ділянки;
d_i — діаметр ділянки;
$\overline{n}^0$ — одиничний вектор нормалі.</td>
</tr>
<tr>
<td>❸ Фізичний зміст поверхневого інтеграла 2-го роду. Потік векторного поля через вибраний бік поверхні Ω</td>
<td>$$\iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma = \Pi_{\Omega}(\overline{a})$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">❹ Основні властивості поверхневого інтеграла 2-го роду</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">① $\iint\limits_{\Omega^+} (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma = -\iint\limits_{\Omega^-} (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma$ (орієнтованість);
② лінійність;
③ адитивність.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду</td>
</tr>
<tr>
<td>❺ Проектування поверхні
$\Omega: F(x,y,z) = 0$
на всі координатні площини
(знаки перед подвійними інтегралами відповідають знакам напрямних косинусів вибраної нормалі
$\overline{n} = \pm \operatorname{grad} F$), де $D_{Oyz}, D_{Oyz}, D_{Oxy}$ —
проекції поверхні Ω на відповідні координатні площини.</td>
<td>$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \\ = \pm \iint\limits_{D_{Oyz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm \\ \pm \iint\limits_{D_{Oxz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \\ \pm \iint\limits_{D_{Oxy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$</td>
</tr>
</table>

❻ Проектування поверхні $\Omega: z = z(x,y), (x;y) \in D$, ***на площину*** Oxy (знак перед інтегралом відповідає знаку $\cos\gamma$ вибраної нормалі $\overline{n}$ до поверхні).	$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$ $= \pm \iint\limits_{D_{Oxy}} [\tilde{P}(x,y)(-z'_x) + \tilde{Q}(x,y)(-z'_y) +$ $+\tilde{R}(x,y)]dxdy$ $\tilde{P}(x,y) = P(x,y,z(x,y))$, $\tilde{Q}(x,y) = Q(x,y,z(x,y))$, $\tilde{R}(x,y) = Q(x,y,z(x,y))$
	$\iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = \iint\limits_{D_{Oxy}} \left. \frac{(\overline{a}, \overline{n}^0)}{\lvert\cos\gamma\rvert} \right\rvert_{z=z(x,y)} dxdy$

10.16. Характеристики векторних полів

❶ ***Векторне поле***	$\overline{a}(M) =$ $= P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$, $M \in G \subset \mathbb{R}^3$
❷ ***Векторна (силова) лінія.*** *Векторною лінією* поля $\overline{a}$ називають криву, в кожній точці M якої дотична збігається з напрямом поля $\overline{a}$	$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$
❸ ***Дивергенція*** векторного поля	$\operatorname{div}\overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
❹ ***Правила обчислення дивергенції*** ① $\operatorname{div}\overline{C} = 0, \overline{C} = \overline{\text{const}}$; ② $\operatorname{div}(C\overline{a}) = C\operatorname{div}\overline{a}, C = \text{const}$;	③ $\operatorname{div}(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = \operatorname{div}\overline{a}_1 + \operatorname{div}\overline{a}_2$; ④ $\operatorname{div}(u\overline{a}) = u\operatorname{div}\overline{a} + (\overline{a}, \operatorname{grad} u)$
❺ ***Фізичний зміст дивергенції***.	① якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) > 0$, то в полі $\overline{a}$ у точці M є джерела; ② якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) < 0$, то в полі $\overline{a}$ у точці M є стоки; ③ якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) = 0$, то у точці M немає ані джерел, ані стоків.
❻ ***Ротор*** векторного поля	$\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

❼ ***Правила обчислення ротора.*** ① $\operatorname{rot}\overline{C} = \overline{0}, \overline{C} = \overline{\text{const}}$; ② $\operatorname{rot}(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = \operatorname{rot}\overline{a}_1 + \operatorname{rot}\overline{a}_2$;	③ $\operatorname{rot}(u\overline{a}) = u\operatorname{rot}\overline{a} + [\operatorname{grad} u, \overline{a}]$
❽ **Фізичний зміст ротора.** ① Ротор векторного поля характеризує обертальну здатність поля в даній точці: вона найбільша в точці M_0 у площині, перпендикулярній ротору.	② Найбільша густина циркуляції векторного поля $\overline{a}$ у точці M_0 дорівнює довжині ротора поля в цій точці: $\max j(M_0) = \left\|\operatorname{rot}\overline{a}(M_0)\right\|.$
❾ ***Потік*** векторного поля $\overline{a}$ через вибраний бік поверхні Ω	$\Pi_\Omega(\overline{a}) = \iint\limits_\Omega (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma$
❿ ***Циркуляція*** векторного поля $\overline{a}$ вздовж замкненого контуру Γ	$C_\Gamma(\overline{a}) = \oint\limits_\Gamma (\overline{a}, d\overline{r})$
⓫ ***Формула Остроградського — Ґауса.*** Потік векторного поля $\overline{a}$ через замкнену поверхню Ω, в напрямі її зовнішньої нормалі, дорівнює потрійному інтегралу за областю G, обмеженою цією поверхнею, від дивергенції векторного поля ($\overline{a}$ — неперервно диференційовне поле всередині області G)	$\oiint\limits_\Omega (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma = \iiint\limits_G \operatorname{div}\overline{a}dxdydz$ 
⓬ ***Формула Стокса.*** Циркуляція векторного поля $\overline{a}$ уздовж довільного замкненого контуру Γ дорівнює потоку вектора $\operatorname{rot}\overline{a}$ через поверхню Ω, напнуту на контур Γ ($\overline{a}$ — неперервно диференційовне поле на поверхні Ω; орієнтація кривої Γ узгоджена з орієнтацією поверхні Ω за правилом правої руки.	$\oint\limits_\Gamma (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_\Omega (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma$ 

10.17. Спеціальні векторні поля

❶ ***Потенціальне*** поле	$\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}$
❷ ***Потенціал*** U потенціального поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$, $\exists U : \overline{a}(M) = \operatorname{grad} U(M)$	$U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C$
❸ ***Соленоїдальне*** поле	$\operatorname{div}\overline{a} = 0$
❹ ***Гармонічне*** поле	$\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}, \operatorname{div}\overline{a} = 0$

10.18. Символічний запис дій над полями

❶ ***Оператор Гамілтона (набла)***	$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}$
	$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$
❷ ***Оператор Лапласа***	$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
	$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Диференціальні операції 1-го порядку	
❸ ***Градієнт***	$\operatorname{grad} u = \nabla u$
❹ ***Дивергенція***	$\operatorname{div}\overline{a} = (\nabla, \overline{a})$
❺ ***Ротор***	$\operatorname{rot}\overline{a} = [\nabla, \overline{a}]$
Диференціальні операції 2-го порядку	
❻ $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \left[\nabla, \nabla u\right] = \overline{0}$	❼ $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a} = (\nabla, [\nabla, \overline{a}]) = 0$
❽ $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = \Delta u$	❾ $\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a} = \nabla(\nabla, \overline{a})$
❿ $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{a} = [\nabla, [\nabla, \overline{a}]]$	

10.19. Застосування інтегралів за геометричними об'єктами

Об'єкт	**Тип інтеграла**	**Геометричне застосування**	**Фізичне застосування**
Область на площині	Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$	Площа області D $S(D)=\iint\limits_D dxdy$	Маса пластинки D $m(D)=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$
Просторова область	Потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$	Об'єм тіла G $V(G)=\iiint\limits_G dxdydz$	Маса тіла G $m(G)=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxd$
Крива	Криволінійний інтеграл I роду $\int\limits_L f(x,y,z)dl$	Довжина кривої L $l(L)=\int\limits_L dl$	Маса кривої L $m(L)=\int\limits_L \mu(x,y,z)dl$
Крива	Криволінійний інтеграл II роду $\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$	Робота змінної сили $\overline{F}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ під час переміщення вздовж дуги L $\mathrm{A}_L(\overline{F})=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$	
Поверхня	Поверхневий інтеграл I роду $\iint\limits_\Omega f(x,y,z)d\sigma$	Площа поверхні Ω $S(\Omega)=\iint\limits_\Omega d\sigma$	Маса поверхні Ω $m(\Omega)=\iint\limits_\Omega \mu(x,y,z)d\sigma$
Поверхня	Поверхневий інтеграл II роду $\iint\limits_\Omega Pdydz+Qdxdz+$ $+Rdxdy$	Потік поля $\overline{a}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ через поверхню Ω $\Pi_\Omega(\overline{a})=\iint\limits_\Omega Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$	

Розділ 11. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

11.1. Диференціальні рівняння 1-го порядку

❶ ***Диференціальне рівняння (ДР) 1-го порядку.*** $$y' = f(x,y), \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$ $$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$	❷ ***Задача Коші для ДР 1-го порядку.*** Задачу знаходження розв'язку рівняння $y' = f(x,y)$, який справджує *початкову умову* $$y(x_0) = y\,\|_{x=x_0} = y_0,$$ називають *задачею Коші*.
❸ ***Загальний, частинний і особливий розв'язки ДР.*** Сукупність функцій $y = y(x,C)$, де C — довільна стала, називають *загальним розв'язком* ДР $y' = f(x,y)$, якщо: 1) функція $y = y(x,C)$ є розв'язком цього ДР для будь-якого значення C; 2) для будь-якої початкової умови $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$ таке, що функція $y = y(x,C_0)$ справджує цю умову.	Загальний розв'язок у неявному вигляді $\Phi(x,y,C) = 0$ називають *загальним інтегралом* ДР. *Частинним розв'язком* ДР $y' = f(x,y)$ називають розв'язок, який дістають із загального розв'язку за певного значення довільної сталої C. Розв'язок ДР, який не можна одержати із загального розв'язку, за жодного значення довільної сталої, включаючи $\pm\infty$, називають *особливим*.
❹ ***Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.*** Якщо у ДР $y' = f(x,y)$ функція $f(x,y)$ і її похідна $f'_y(x,y)$ неперервні в деякій області D, яка містить точку $M_0(x_0;y_0)$,	то знайдеться інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ на якому існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який справджує початкову умову $y(x_0) = y_0$.

11.2. Деякі типи диференціальних рівнянь 1-го порядку

<table>
<tr><th>Тип ДР</th><th>Метод розв’язання</th></tr>
<tr><td>❶ Рівняння з відокремленими змінними.
$f_1(x)dx = f_2(y)dy$</td><td>$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C$</td></tr>
<tr><td>❷ ДР з відокремлюваними змінними.
$y' = f(x)g(y)$</td><td>$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ або $g(y) = 0$</td></tr>
<tr><td>$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$</td><td>$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$
або $P(x) = 0$ чи $N(y) = 0$</td></tr>
<tr><td>❸ $y' = f(ax + by + c)$</td><td>Заміна $z = ax + by + c$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❹ Однорідні ДР.
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$</td><td>Заміна $y = u(x)x$</td></tr>
<tr><td>$y' = \frac{du}{dx}x + u$</td></tr>
<tr><td>❺ ДР, звідні до однорідних
$y' = \left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$
$a, b, c, a_1, b_1, c_1 = \mathrm{const}$</td><td>1) Заміна $\begin{cases} x = t + \alpha, \\ y = s + \beta \end{cases}$
якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0;$
2) заміна $z = ax + by + c,$
якщо $\Delta = 0$</td></tr>
<tr><td>❻ Лінійне однорідне рівняння
$y' + p(x)y = 0$</td><td>$y = Ce^{-\int p(x)dx}$</td></tr>
<tr><td>❼ Лінійне неоднорідне рівняння
$y' + p(x)y = q(x)$</td><td rowspan="2">1. Метод Лаґранжа. Шукаємо розв’язок у вигляді
$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$
2. Метод Бернуллі. Шукаємо розв’язок у вигляді
$y = u(x)v(x)$</td></tr>
<tr><td>❽ Рівняння Бернуллі
$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$
$\alpha \notin \{0, 1\}$</td></tr>
</table>

❾ ***Рівняння в повних диференціалах*** $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$	$\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt=C$

11.3. Нелінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Тип ДР	***Метод розв'язання***
❶ $y^{(n)}=f(x)$	Безпосереднє n-кратне інтегрування
❷ $F(x,y^{(k)},...,y^{(n)})=0$	Заміна $y^{(k)}=p(x)$
	$y^{(k+1)}=p'(x),...,y^{(n)}=p^{(n-k)}$
❸ $F(y,y',...,y^{(k)},...,y^{(n)})=0$	Заміна $y'=p(y)$
	$y''=p'p, y'''=p''p^2+p'^2p,...$

11.4. Лінійні диференціальні рівняння

❶ ***Лінійний диференціальний оператор***	$L[y]=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+....+a_n(x)y$
❷ ***Лінійне однорідне*** диференціальне рівняння *(ЛОДР)*	$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+....+a_n(x)y=0;$ $L[y]=0$
❸ ***Лінійна залежність і незалежність функцій.*** Систему функцій $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x), x\in(a;b)$ називають *лінійно незалежною*, якщо з рівності $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+...+\alpha_ny_n(x)=0$ випливає, що $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0.$	Систему функцій $y_1,y_2,...,y_n$ називають *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,$ не рівні одночасно нулеві, що $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+...+\alpha_ny_n(x)=0$

❹ ***Вронскіан системи функцій*** $y_1, y_2, ..., y_n$	$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$
❺ ***Властивості вронскіана.*** **1.** Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно залежні на проміжку $[a; b]$, то вронскіан тотожно дорівнює нулеві на цьому проміжку.	**2.** Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно незалежні функції, що є розв'язками деякого ЛОДР n-го порядку, то вронскіан такої системи не дорівнює нулеві в жодній точці.
❻ ***Фундаментальна система розв'язків.*** Лінійне однорідне диференціальне рівняння порядку n має рівно n лінійно незалежних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$,	які утворюють *фундаментальну систему розв'язків* (ФСР) ЛОДР: $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$
❼ ***Теорема про структуру загального розв'язку ЛОДР.*** Якщо $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ — ФСР ЛОДР, то загальний розв'язок системи є лінійною комбінацією цих розв'язків.	$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$
❽ ***Лінійне неоднорідне ДР***	$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_n(x) y = f(x)$; $L[y] = f(x)$
❾ ***Теорема про структуру загального розв'язку ЛНДР***	$y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}$
❿ ***Принцип суперпозиції***	Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки відповідно ЛНДР $L[y] = f_1(x)$ та $L[y] = f_2(x)$, то $y_1(x) + y_2(x)$ є розв'язком ЛНДР $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

11.5. Лінійні однорідні ДР зі сталими коефіцієнтами

❶ ***ЛОДР зі сталими коефіцієнтами***	$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$
❷ ***Метод Ейлера***	Шукаємо розв'язок у вигляді $y = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$
❸ ***Характеристичне рівняння***	$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0$
❹ ***Лінійно незалежні розв'язки ДР залежно від розв'язків характеристичного рівняння***	
1. λ — дійсний корінь кратності 1	$y = e^{\lambda x}$
2. λ — дійсний корінь кратності r	$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}, ..., y_r = x^{r-1} e^{\lambda x}$
3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — пара комплексно-спряжених коренів	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
❺ ***Схема методу Ейлера.*** **1.** Записують характеристичне рівняння для ЛОДР. **2.** Розв'язують характеристичне рівняння.	**3.** Знаходять лінійно незалежні розв'язки ЛНДР для кожного кореня характеристичного рівняння (ФСР). **4.** Записують загальний розв'язок ЛОДР.
ЛОДР 2-го порядку	
❻ ***Диференціальне рівняння***	$y'' + py' + qy = 0$
❼ ***Характеристичні рівняння***	$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
❽ ***Лінійно незалежні розв'язки ДР залежно від розв'язків характеристичного рівняння (ФСР)***	
1. Дійсні різні корені λ_1, λ_2	$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$
2. Дійсний кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$
3. Пара комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
❾ ***Загальний розв'язок***	$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

11.6. Лінійні неоднорідні ДР зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x),$$

де $f(x)$ — ***неперервна функція загального вигляду***

❶ ***Метод Лаґранжа (варіації довільних сталих).***

① Розв'язують відповідне однорідне ДР.

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n.$$

② Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y_{\text{заг. неодн.}} = \\ = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n.$$

③ Знаходять $C_1'(x), ..., C_n'(x)$, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + ... + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + ... + C_n' y_n' = 0, \\ .... \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + ... + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

④ Інтегруванням знаходять функції $C_1(x), ..., C_n(x)$.

⑤ Записують загальний розв'язок, підставляючи знайдені функції $C_1(x), ..., C_n(x)$.

❷ ***Метод Лаґранжа для рівняння*** $y'' + py' + qy = f(x)$

① $y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$

② $y_{\text{заг. неодн.}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2.$

③ $\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases}$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x),$$

де $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$ — *функція спеціального вигляду (квазімногочлен)*

❸ ***Схема методу невизначених коефіцієнтів*** (застосовний до ДР зі спеціальною правою частиною).

① Записують теорему про структуру розв'язку ЛНДР.

$$y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}$$

② Знаходять загальний розв'язок відповідного ЛОДР (метод Ейлера).

③ Записують частинний розв'язок ЛНДР з невизначеними коефіцієнтами.

④ Визначають коефіцієнти, підставляючи частинний розв'язок у ЛНДР.

⑤ Записують загальний розв'язок ЛНДР.

11.7. Частинний розв’язок ЛНДР залежно від правої частини

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right) \leftrightarrow k = \alpha + i\beta,$$

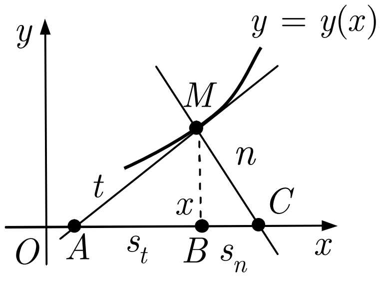
де $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$; ХР — характеристичний многочлен

Права частина спец. вигляду $f(x)$	***Шаблон для частинного розв’язку*** $y_{\text{част. неод.}}$
❶ $P_n(x) \leftrightarrow k = 0$	
$k = 0$ не є коренем ХР	$\overline{P}_n(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n.$
$k = 0$ корінь кратності s ХР	$x^s\overline{P}_n(x)$
❷ $P_n(x)e^{\alpha x} \leftrightarrow k = \alpha$	
$k = \alpha$ не є коренем ХР	$\overline{P}_n(x)e^{\alpha x}$
$k = \alpha$ корінь кратності s ХР	$x^s\overline{P}_n(x)e^{\alpha x}$
❸ $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow k = \alpha + i\beta$	$l = \max(n, m)$
$k = \alpha + i\beta$ не є коренем ХР	$e^{\alpha x}\left(\overline{P}_l(x)\cos\beta x + \overline{Q}_l\sin\beta x\right)$
$k = \alpha + i\beta$ корінь кратності s ХР	$x^se^{\alpha x}\left(\overline{P}_l(x)\cos\beta x + \overline{Q}_l\sin\beta x\right)$
Окремі випадки	
❹ $ae^{\alpha x} \leftrightarrow k = \alpha$	
$k = \alpha$ не є коренем ХР	$Ae^{\alpha x}$
$k = \alpha$ корінь кратності s ХР	$Ax^se^{\alpha x}$
❺ $a\cos\beta x + b\sin\beta x \leftrightarrow k = i\beta$	
$k = i\beta$ не є коренем ХР	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$
$k = i\beta$ корінь кратності s ХР	$x^s\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$
❻ $e^{\alpha x}\left(a\cos\beta x + b\sin\beta x\right) \leftrightarrow k = \alpha + i\beta$	
$k = \alpha + i\beta$ не є коренем ХР	$e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$
$k = \alpha + i\beta$ корінь кратності s ХР	$x^se^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$

11.8. Лінійні однорідні системи ДР зі сталими коефіцієнтами

❶ ***Лінійна однорідна система ДР зі сталими коефіцієнтами***	$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \Leftrightarrow$
❷ ***Матричний запис системи***	$\vec{x}' = A\vec{x}$
	де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
❸ ***Метод Ейлера***	Шукаємо розв'язок у вигляді $\vec{x} = \vec{C}e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C},$
❹ ***Характеристичне рівняння***	$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$
❺ ***Лінійно незалежні розв'язки ДР залежно від розв'язків характеристичного рівняння (ФСР)***	
① Дійсні різні корені λ_1, λ_2	$\vec{x}_1(t) = \vec{A}_1 e^{\lambda_1 t}, \vec{x}_2(t) = \vec{A}_2 e^{\lambda_2 t}$
② Дійсний кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^{\lambda t}$
③ Пара комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$\vec{x}_1 = \mathrm{Re}\left(\vec{A}e^{(\alpha+\beta i)t}\right),$ $\vec{x}_2 = \mathrm{Im}\left(\vec{A}e^{(\alpha+\beta i)t}\right)$
❻ ***Загальний розв'язок***	$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t)$

11.9. Застосування диференціальних рівнянь

❶ ***Динаміка популяції.*** Швидкість розпаду (розмноження) пропорційна кількості $x(t)$ речовини, що залишилась.	$x'(t)=kx(t), k>0$ $k<0$ — розпад; $k>0$ — розмноження
❷ ***Другий закон Ньютона***	$mv'(t)=F(v,t)\Leftrightarrow ms''(t)=F(v,t)$
❸ ***Закон Ньютона.*** Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла $T(t)$ і температурою середовища $T_{\text{с}}$ охолодження тіла	$T'(t)=k(T-T_{\text{с}})$
❹ ***Електричне коло з самоіндукцією.*** $i(t)$ — струм; $E(t)$ — ЕРС; R — опір; L — коефіцієнт самоіндукції	$i'(t)+\dfrac{R}{L}i(t)=\dfrac{E(t)}{L}$
❺ ***Розчинення речовини.*** Швидкість розчинення речовини в рідині пропорційна кількості цієї речовини, яке ще може розчинитись до повного насичення.	$x'(t)=k(P-x(t)),$ де $x(t)$ — кількість речовини; P — максимальна кількість розчиненої речовини.
❻ ***Концентрація розчину.*** Речовина розчинена в об'ємі V рідини. Надходить об'єм V_1 рідини і витікає V_2 рідини $(V_2\le V_1)$.	$x'(t)=-\dfrac{V_2x}{V+(V_1-V_2)t}$
❼ ***Геометричні застосування.***  	$t=\left\|\dfrac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right\|$ — *дотична* $n=\left\|y\sqrt{1+y'^2}\right\|$ — *нормаль* s_t — *піддотична*; s_n — *піднормаль*

Модуль 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

1. Функції кількох змінних

Навчальні задачі

1.1. Знайти і зобразити область означення D функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ і побудувати лінії рівня цієї функції.

Розв'язання. [9.1.4, 9.1.6.]① **[***Знаходимо область означення функції.***]**
Функція означена, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Цю нерівність справджують координати всіх точок, що лежать усередині й на межі круга радіусом $R = 2$ з центром у початку координат.

[*Знаходимо лінії рівня функції.***]**
Рівняння сукупності ліній рівня:

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = C \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 - C^2, C \in [0; 2].$$

Надаючи C різних значень з відрізка $[0; 2]$, дістанемо концентричні кола з центром у початку координат.

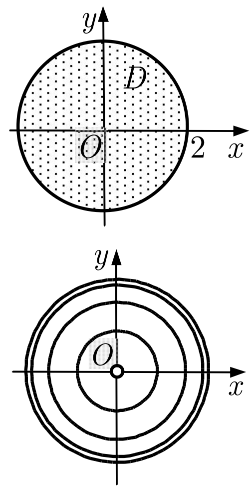


Рис. до зад. 1.1

Коментар. ① Під областю означення функції $u = f(x, y)$ двох змінних, заданої аналітично, розуміють множину точок $(x; y)$ площини, в яких аналітичний вираз $f(x, y)$ визначений і набуває дійсних значень.

1.2. Знайти область означення D функції $u = \arcsin(x^2 + y^2 - z^2)$ і її поверхні рівня.

Розв'язання. [9.1.4, 9.1.7.]① **[***Знаходимо область означення функції.***]**
Функція означена, якщо

$$-1 \leq x^2 + y^2 - z^2 \leq 1.$$

Ця нерівність означує множину точок між двопорожнинним гіперболоїдом $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ і однопорожнинним гіперболоїдом $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

[*Знаходимо поверхні рівні функції.***]**
Рівняння сукупності поверхонь рівня:

$$\arcsin(x^2 + y^2 - z^2) = C, C \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Якщо $C \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right)$, то поверхнями рівня є двопорожнинні гіперболоїди

$$x^2 + y^2 - z^2 = \sin C;$$

якщо $C = 0$, то поверхнею рівня є конус

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

якщо $C \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right]$, та поверхнями рівня є однопорожнинні гіперболоїди

$$x^2 + y^2 - z^2 = \sin C.$$

Коментар. ① Під областю означення функції трьох змінних $u = f(x,y,z)$, заданої аналітично, розуміють множину точок $(x;y;z)$ простору, в яких аналітичний вираз $f(x,y,z)$ визначений і набуває дійсних значень.

1.3.1. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$.

Розв'язання. [9.2.1.]①

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \left| \begin{matrix} \overset{②}{\sin xy \sim xy,} \\ xy \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x = 2.$$

Коментар. ① Границя існує, якщо вона не залежить від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(2;0)$.

② Для функцій кількох змінних залишаються правдивим еквівалентності.

1.3.2. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. **[***Переходимо до полярних координат.***]**

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} x \to 0, \\ y \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \rho \to 0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\varphi\sin\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in (-\pi;\pi].$$

Коментар. ① Часто границю $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ обчислюють переходячи до полярних координат із центром у точці $A(a;b)$:

$$x = a + \rho\cos\varphi,$$
$$y = b + \rho\sin\varphi.$$

Якщо $(x;y) \to (a;b)$, то

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \rho \to 0.$$

Задачу зводять до дослідження $\lim\limits_{\rho \to 0} F(\rho, \varphi)$, де

$$F(\rho, \varphi) = f(a + \rho \cos \varphi, b + \rho \sin \varphi).$$

1.3.3. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (2x + 5y) \sin \dfrac{3}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $(2x+5y) \to 0$, коли $x \to 0$, $y \to 0$, і $\left| \sin \dfrac{3}{x} \right| \le 1$, то за властивістю н. м. ф. маємо, що

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (2x + 5y) \sin \frac{3}{x} = 0.$$

1.3.4. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. **[***Переходимо до полярних координат.***]**

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} x \to 0, \\ y \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \to 0.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \cos 2\varphi.$$

Границя залежить від кута φ, тобто від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(0;0)$. А це означає, що функція f не має границі. ①

Коментар. ① Якщо б границя існувала, то вона не залежала б від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(0;0)$.

1.4.1. Знайти точки розриву функції $z = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+2)^2}$.

Розв'язання. [9.2.2.] Для заданої функції точками розриву можуть бути лише точки, де знаменник дорівнює нулеві:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -2. \end{cases}$$

Оскільки $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to -2}} \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \infty$, то точка $M_0(1;-2)$ є точкою нескінченного розриву.

1.4.2. Знайти точки розриву функції $z = \dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

Розв'язання. Задана функція може мати розриви лише в точках, де знаменник дорівнює нулеві:

$$x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Отже, функція z має розриви в точках прямої $y = x$.

Нехай $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, x_0 = y_0$. Тоді,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{x_0^2+x_0y_0+y_0^2} = \frac{1}{3x_0^2}.$$

Отже, точки прямої $y = x, x \neq 0,$ — точки усувного розриву.

Із співвідношення

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \infty$$

випливає, що точка $M_0(0;0)$ — точка нескінченного розриву.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

1.5. Знайдіть і зобразіть область означення і лінії рівня функції:

1) $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1}$; 2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$;

3) $z = \sqrt{4x - y^2}$; 4) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$;

5) $z = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)$; 6) $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} - 1}$.

1.6. Знайдіть і зобразіть область означення функції:

1) $z = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$; 2) $z = \arccos \dfrac{x}{x+y}$;

3) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(9 - x^2 - y^2)}$;

4) $z = \log_3(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

1.7. Знайдіть область означення функції і її поверхні рівня:

1) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9^2}$; 2) $u = \ln(36 - 36x^2 - 9y^2 - 4z^2)$;

3) $u = \arcsin \dfrac{x^2 + y^2}{z}$; 4) $u = \dfrac{1}{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$;

5) $u = \dfrac{\ln(z^2 - x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$; 6) $u = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - z^2}$;

7) $u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$; 8) $u = \sqrt{2z^2 - 6x^2 - 3y^2 + 6}$.

1.8. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2 - 4y + 4}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{\operatorname{tg}(x+y)e^{x-y}}{x^2 - y^2}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; 8) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

1.9. Покажіть, що границя не існує:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x - y}{x + y}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$.

1.10. Знайдіть точки розриву функції:

1) $z = e^{-\frac{3}{x^2+y^2}}$; 2) $z = e^{\frac{2}{x^2-y^2}}$;

3) $z = \dfrac{1}{y - x^2}$; 4) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2 - 1}$.

1.11. Знайдіть точки розриву функції:

1) $u = \dfrac{1}{xyz}$; 2) $u = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2}$;

3) $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2 - 1}$; 4) $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2 + 1}$.

Відповіді

1.8. 1) -6; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{e^2}{2}$; 4) 1; 5) 0; 6) 0; 7) e; 8) e^3.

1.10. 1) точка розриву $(0;0)$; 2) лінії розриву — прямі $y = \pm x$; 3) лінія розриву — парабола $y = x^2$; 4) лінія розриву — гіпербола $x^2 - y^2 = 1$.

1.11. 1) поверхні розриву — площини $x = 0, y = 0, z = 0$; 2) точка розриву $(1;-1;0)$;

3) поверхня розриву — однопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$;

4) поверхня розриву — двопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$.

2. Похідні й диференціали функцій кількох змінних

Навчальні задачі

2.1.1. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $z = xe^{-xy}$.

Розв'язання. [9.3.1.] **[***Знаходимо частинну похідну за змінною x.***]**

$$z'_x = (xe^{-xy})'_x \overset{①}{=} e^{-xy} - xye^{-xy}.$$

[*Знаходимо частинну похідну за змінною y.***]**

$$z'_y = (xe^{-xy})'_y \overset{②}{=} -x^2e^{-xy}.$$

Коментар. ① Знаходячи частинну похідну функції $z = xe^{-xy}$ за змінною x, вважаємо y сталою і використовуємо правила і формули диференціювання функцій однієї змінної.

② Знаходячи частинну похідну функції $z = xe^{-xy}$ за змінною y, вважаємо x сталою і використовуємо правила і формули диференціювання функцій однієї змінної.

2.1.2. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $u = z^{xy}$.

Розв'язання. [9.3.1.]①

$$u'_x = yz^{xy}\ln z, u'_y = xz^{xy}\ln z, u'_z = xyz^{xy-1}.$$

Коментар. ① Функція u залежить від трьох змінних x, y, z. Знаходячи частинні похідні за кожною змінною, інші дві вважаємо сталими.

2.2.1. Знайти частинні диференціали і повний диференціал 1-го порядку функції $u = \ln(x^2 + y^2)$.

Розв'язання. [9.4.5, 9.4.6.]

$$d_xu \overset{[9.4.6]}{=} \frac{\partial u}{\partial x}dx = \frac{2x}{x^2 + y^2}dx; \quad d_yu \overset{[9.4.6]}{=} \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{2y}{x^2 + y^2}dy.$$

$$du \overset{[9.4.5]}{=} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy.$$

Коментар. ① У формулах для диференціалів диференціали незалежних змінних dx та dy є сталими:

$$dx = \Delta x, dy = \Delta y.$$

2.2.2. Знайти диференціал 1-го порядку функції $u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$ у точці $M_0(1;2;1)$.

Розв'язання. [9.4.5.]

$$du\Big|_{M_0} \overset{[9.4.5]}{=} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} dx + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} dy + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} dz.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{-z}{(x^2+y^2)^2}2x\Big|_{M_0(1;2;1)} \underset{\textit{підставляємо: } x=1, y=2, z=1}{=} -\frac{2}{25};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{-z}{(x^2+y^2)^2}2y\Big|_{M_0(1;2;1)} = -\frac{4}{25};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} = \frac{1}{x^2+y^2}\Big|_{M_0(1;2;1)} = \frac{1}{5}.$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формулу для диференціала.*]

$$du\Big|_{M_0(1;2;1)} = -\frac{1}{25}\big(2dx + 4dy - 5dz\big).$$

2.3. Знайти $\dfrac{d\tilde{u}}{dt}$, якщо $u = x^y, x = \ln t, y = \sin t$.

Розв'язання. [9.3.2.]

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} \overset{[9.3.2]}{=} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y \ln x \cdot \cos t =$$

$$= \frac{\sin t}{t}(\ln t)^{\sin t - 1} + \cos t \cdot \ln\ln t \cdot (\ln t)^{\sin t}.$$

2.4. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{d\tilde{z}}{dx}$, якщо $z = \ln(e^x + e^y), y = \dfrac{1}{3}x^3 + x$;

Розв'язання. [9.3.3.]

[*Знаходимо частинну похідну.*]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}.$$

[*Записуємо формулу для повної похідної і знаходимо похідну.***]**

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} \overset{[1.3.3]}{=} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y}(x^2 + 1) = 1 + \frac{x^2 e^{\frac{1}{3}x^3 + x}}{e^x + e^{\frac{1}{3}x^3 + x}} = 1 + \frac{x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}}{1 + e^{\frac{1}{3}x^3}}.$$

2.5. Знайти z'_u, z'_v, якщо $z = x^3 + y^3 - 3xy, x = uv, y = \dfrac{u}{v}$.

Розв'язання. [9.3.2.] [*Визначаємо формули.*]

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \overset{[9.3.2]}{=} \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \overset{[9.3.2]}{=} \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

[*Обчислюємо всі потрібні похідні.***]**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 3u^2v^2 - 3\frac{u}{v}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = v; \frac{\partial x}{\partial v} = u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 3\frac{u^2}{v^2} - 3uv; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}; \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2};$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формули.***]**

$$z'_u = \left(3u^2v^2 - 3\frac{u}{v}\right)v + \left(3\frac{u^2}{v^2} - 3uv\right)\frac{1}{v} = 3\left(u^2v^3 + \frac{u^2}{v^3} - 2u\right);$$

$$z'_v = \left(3u^2v^2 - 3\frac{u}{v}\right)u + \left(3\frac{u^2}{v^2} - 3uv\right)\left(-\frac{u}{v^2}\right) = 3u^3\left(v^2 - \frac{1}{v^4}\right).$$

2.6. Знайти z'_x, z'_y якщо $x + 2y + 3z = e^z$.

Розв'язання. [9.3.4.] **[***Записуємо співвідношення, яке задає неявну функцію у вигляді $F(x, y, z) = 0$.***]**

$$F(x, y, z) = x + 2y + 3z - e^z.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \overset{[9.3.4]}{=} -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{3 - e^z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \overset{[9.3.4]}{=} -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2}{3 - e^z}.$$

2.7. Знайти всі похідні 2-го порядку функції $z = xe^{-xy}$.

Розв'язання. [9.3.5, 9.3.6.] ① [*Знаходимо похідні 1-го порядку.*]

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{-xy}) = (1 - xy)e^{-xy};$$
$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-xy}) = -x^2 e^{-xy}.$$

[*Знаходимо похідні 2-го порядку.*]

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}((1 - xy)e^{-xy}) = -2ye^{-xy} + xy^2 e^{-xy};$$
$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 e^{-xy}) = x^3 e^{-xy};$$
$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}((1 - xy)e^{-xy}) = -2xe^{-xy} + x^2 ye^{-xy};$$
$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 e^{-xy}) = -2xe^{-xy} + x^2 ye^{-xy}.$$

Коментар. ① Для функції двох змінних можна розглядати чотири похідні 2-го порядку. Якщо виконані умови теореми Шварца [9.3.6], то мішані похідні z''_{xy} та z''_{yx} рівні.

2.8. Знайти диференціали 2-го та 3-го порядку функції $u(x, y) = e^y \sin x$. Обчислити їх у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Розв'язання. [9.4.7, 9.4.8.]

[*Записуємо формулу для диференціала 2-го порядку функції двох змінних.*]

$$d^2u \overset{[9.4.7]}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

[*Знаходимо похідні 2-го порядку.*]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \sin x; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^y \cos x; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \sin x.$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формулу для диференціала.*]

$$d^2u = -e^y \sin x dx^2 + 2e^y \cos x dxdy + e^y \sin x dy^2.$$

[*Обчислюємо диференціал у точці* M_0.]

$$d^2u(M_0) = -e^y \sin x dx^2 + 2e^y \cos x dxdy + e^y \sin x dy^2 \Big|_{M_0\left(\frac{\pi}{2};0\right)} = -dx^2 + dy^2.$$

[*Записуємо формулу для диференціала 3-го порядку функції двох змінних.*]

$$d^3z \underset{m=3}{\overset{[9.4.8]}{=}} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

[*Знаходимо похідні 3-го порядку.*]

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -e^y \cos x; \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -e^y \sin x;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = e^y \cos x; \ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = e^y \sin x.$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формулу для диференціала.*]

$$d^3u = -e^y \cos x dx^3 - 3e^y \sin x dx^2dy + 3e^y \cos x dxdy^2 + e^y \sin x dy^3.$$

[*Обчислюємо диференціал у точці* M_0.]

$$d^3u(M_0) = -e^y \cos x dx^3 - 3e^y \sin x dx^2dy + 3e^y \cos x dxdy^2 + e^y \sin x dy^3 \Big|_{M_0\left(\frac{\pi}{2};0\right)} =$$

$$= -3dx^2dy + dy^3.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

2.9. Знайдіть частинні похідні і повний диференціал функції:

1) $z = x^3y - y^3x + 2x - 3y + 1$; 2) $z = xy - \dfrac{y}{x} + 3x + 2y - 2$;

3) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 4) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;

5) $z = x^y$; 6) $z = (\cos y)^{\sin x}$;

7) $x = \rho \cos \varphi$; 8) $y = \dfrac{t}{\alpha} + t \sin \alpha$.

2.10. Знайдіть частинні похідні і повний диференціал функції:

1) $u = xyz$; 2) $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$;

3) $u = x^{yz}$; 4) $u = x^{y/z}$.

2.11. Знайдіть $du(M_0)$, якщо:

1) $u = \dfrac{x}{y^2}, M_0(1;1)$; 2) $u = \dfrac{x + y}{x - y}, M_0(3;2)$;

3) $u = \ln \arcsin(x + y^3), M_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$;

4) $u = \operatorname{arcctg} \ln(\sqrt{x} + y^4), M_0(e^2; 0)$;

5) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, M_0(3;4;5)$; 6) $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z, M_0(1;1;1)$.

2.12. Знайдіть $\dfrac{du}{dt}$, якщо:

1) $u = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3$;

2) $u = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3$;

3) $u = xyz, x = t^2 + 1, y = \ln t, z = \operatorname{tg} t$;

4) $u = \dfrac{yz}{x}, x = e^t, y = \ln t, z = t^2 - 1$.

2.13. Знайдіть $\dfrac{dz}{dx}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, якщо:

1) $z = x^2 y, y = \sin x + \cos x$;

2) $z = \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y}, y = 3x + 1$;

3) $z = \operatorname{arctg}(xy), y = e^x$;

4) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}, y = \sqrt{x^2 + 1}$.

2.14. Знайдіть $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ якщо:

1) $z = x^2 \ln y, x = \dfrac{u}{v}, y = 3u - 2v$;

2) $z = x \sin y + y \cos x, x = \dfrac{u}{v}, y = uv$;

3) $z = \sqrt{x^2 - y^2}, x = u^v, y = u \ln v$;

4) $z = x^y + y^x, x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2$.

2.15. Знайдіть dz, якщо:

1) $x^2 e^{2z} - z^2 e^{2x} = 0$;

2) $z \sin x - \cos(x - z) = 0$;

3) $\sin(xz) - e^{xz} - x^2 z = 0$;

4) $z^x = x^z$;

5) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z = 5$;

6) $z^3 - 4xy + y^2 - 4 = 0$;

7) $z^3 + 3xyz = a^3$;

8) $e^z - xyz = 0$;

9) $xz - e^{z/y} + x^3 + y^3 = 0$;

10) $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

2.16. Знайдіть d^2u, якщо:

1) $u = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$;

2) $u = x^3 + 3x^2 y - y^3$;

3) $u = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$;

4) $u = \arcsin(xy)$;

5) $u = (x + y)e^{xy}$;

6) $u = x \ln \dfrac{y}{x}$;

7) $u = x^y$;

8) $u = y^{\ln x}$;

9) $u = xy + yz + zx$; 10) $u = \ln(x + y + z)$;

11) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 12) $u = e^{xyz}$.

2.17. Знайдіть вказані похідні:

1) $z = xe^{-y}, \dfrac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4}$. 2) $z = \ln(x^2 + y^2), \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$;

3) $z = \sin xy, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$; 4) $z = e^{xy^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

Відповіді

2.9. 1) $z'_x = 3x^2y - y^3 + 2, z'_y = x^3 - 3y^2x - 3$; 2) $z'_x = y + \dfrac{y}{x^2} + 3, z'_y = x - \dfrac{1}{x} + 2$;

3) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$;

4) $z'_x = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, z'_y = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$;

5) $z'_x = yx^{y-1}, z'_y = x^y \ln x$; 6) $z'_x = \cos x(\cos y)^{\sin x} \ln\cos y, z'_y = -(\cos y)^{\sin x - 1} \sin x \sin y$;

7) $x'_\rho = \cos\varphi, x'_\varphi = -\rho\sin\varphi$; 8) $y'_t = \dfrac{1}{\alpha} + \sin\alpha, y'_\alpha = -\dfrac{t}{\alpha^2} + t\cos\alpha$.

2.10. 1) $u'_x = yz, u'_y = xz, u'_z = xy$; 2) $u'_x = 3x^2 + 3y - 1, u'_y = z^2 + 3x,\ u'_z = 2yz + 1$;

3) $u'_x = yzx^{yz-1},\ u'_y = zx^{yz}\ln x, u'_z = yx^{yz}\ln x$;

4) $u'_x = \dfrac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}; u'_y = \dfrac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x; u'_z = -\dfrac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x$.

2.11. 1) $du(M_0) = dx - 2dy$; 2) $du(M_0) = -4dx + 6dy$; 3) $du(M_0) = \dfrac{6}{\pi} dx$;

4) $du(M_0) = -\dfrac{e^{-2}}{4} dx$; 5) $du(M_0) = -\dfrac{3}{25} dx - \dfrac{4}{25} dy + \dfrac{1}{5} dz$; 6) $2dx + \ln 4 \cdot dz$.

2.12. 1) $e^{x-2y}(\cos t - 6t^2)$;2) $\dfrac{3 - 12t^2}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}$;

3) $\dfrac{du}{dt} = 2tyz + \dfrac{xz}{t} + \dfrac{xy}{\cos^2 t}$; 4) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{x(z + 2yt^2) - yzte^t}{tx^2}$.

2.13. 1) $\dfrac{dz}{dx} = 2x(\sin x + \cos x) + x^2(\cos x - \sin x), \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy$;

2) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2x(3x + 2)}{(x^2 + 3x + 1)^2}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{4xy}{(x^2 + y)^2}$;

3) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{e^x(x + 1)}{1 + x^2e^{2x}}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$; 4) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$;

2.14. 1) $z'_u = \dfrac{2u}{v^2}\ln(3u-2v) + \dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$, $z'_v = -\dfrac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v) - \dfrac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$;

2) $z'_u = (\sin y - y\sin x)\dfrac{1}{v} + (x\cos y + \cos x)v,$

$z'_u = (\sin y - y\sin x)\left(-\dfrac{u}{v^2}\right) + (x\cos y + \cos x)u.$

3) $z'_u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}vu^{v-1} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln v$, $z'_v = \dfrac{xu^v}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln u - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\dfrac{u}{v}$;

4) $z'_u = 2u(yx^{y-1} + y^x\ln y + y^x\ln y + xy^{x-1})$, $z'_v = 2v(yx^{y-1} + y^x\ln y - y^x\ln y - xy^{x-1})$.

2.15. 1) $dz = \dfrac{z^2e^{2x} - xe^{2z}}{x^2e^{2z} - ze^{2x}}dx$; 2) $dz = \dfrac{z\cos x + \sin(x-z)}{\sin(x-z) - \sin x}dx$;

3) $dz = \dfrac{z}{x}\cdot\dfrac{2x + e^{xz} - \cos xz}{\cos xz - e^{xz} - x}dx$; 4) $dz = \dfrac{z^2\ln x - 1}{x^2\ln z - 1}dx$;

5) $dz = \dfrac{(2-x)dx + 2ydy}{z+1}$; 6) $dz = \dfrac{4ydx + (4x-2y)dy}{3z^2}$;

7) $dz = -\dfrac{yzdx + xzdy}{xy + z^2}$; 8) $dz = \dfrac{z}{z-1}\left(\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}\right)$;

9) $dz = \dfrac{y^2(z+3x^2)dx + (3y^4 + ze^{z/y})dy}{y(e^{z/y} - xy)}$; 10) $dz = \dfrac{zdx - z(1+x^2z^2)dy}{y(1+x^2z^2) - x}$.

2.16. 1) $d^2u = 6xdx^2 + 2(2y - 15y^2)dxdy + (2x - 30xy + 20y^3)dy^2$;

2) $d^2u = (6x+6y)dx^2 + 12xdxdy - 6ydy^2$;

3) $d^2u = \dfrac{(2x^2+y^2)dx^2 + 2xydxdy + (x^2+2y^2)dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

4) $d^2u = \dfrac{xy^3dx^2 + 2dxdy + x^3ydy^2}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

5) $d^2u = e^{xy}(y(y^2+xy+2)dx^2 + 2(x+y)(xy+2)dxdy + x(x^2+xy+2)dy^2)$;

6) $d^2u = -\dfrac{1}{x}dx^2 + \dfrac{2}{y}dxdy - \dfrac{x}{y^2}dy^2$;

7) $d^2u = y(y-1)x^{y-2}dx^2 + 2(1 + y\ln x)x^{y-1}dxdy + x^y\ln^2 xdy^2$;

8) $d^2u = y^{\ln x}\left(\dfrac{\ln y(\ln y + 1)}{x^2}dx^2 + 2\dfrac{\ln x\ln y + 1}{xy}dxdy + \dfrac{\ln x(\ln x - 1)}{y^2}dy^2\right)$;

9) $d^2u = 2(dxdy + dxdz + dydz)$;

10) $d^2u = -\dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dxdy + dxdz + dydz)}{(x+y+z)^2}$;

11) $d^2u = \dfrac{(y^2+z^2-x^2)dx^2+(x^2+z^2-y^2)dy^2+(x^2+y^2-z^2)dz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} -$

$-\dfrac{4(xydxdy+xzdxdz+yzdydz)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;

12) $d^2u = e^{xyz}((yzdx+zxdy+xydz)^2+2(zdxdy+xdydz+ydzdx))$.

2.17. 1) e^{-y}; 2) $\dfrac{4y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$; 3) $-2x\sin xy - x^2y\cos xy$; 4) $2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$.

3. Дотична й нормаль до поверхні. Градієнт

Навчальні задачі

3.1.1. Знайти похідну функції $u(M) = xy^2+z^2-xyz$ у точці $M_0(1;1;2)$ за напрямом $\overline{l} = (1;\sqrt{2};1)^T$.

Розв'язання. [9.5.2.] [*Записуємо формулу для похідної за напрямом.*]

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} \overset{[9.5.2]}{=} \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

де $\overline{l}^{\,0} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)^T$.

[*Обчислюємо частинні похідні.*]

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (y^2-yz)\,|_{(1;1;2)} = -1;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (2xy-xz)\,|_{(1;1;2)} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2z-xy)\,|_{(1;1;2)} = 3.$$

[*Обчислюємо напрямні косинуси вектора* $\overline{l}$.]

$$\overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix} = \frac{\overline{l}}{|\overline{l}|};\ |\overline{l}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2} = 2;$$

$$\overline{l}^{\,0} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right)^T \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\gamma = \frac{1}{2}.$$

[*Підставляємо знайдені частинні похідні і напрямні косинуси у формулу.*]

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

3.1.2. Знайти одиничний вектор внутрішньої нормалі до поверхні $S : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} = 1$ у точці $M_0\left(1;1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Розв'язання. [9.5.3, 9.7.2.]

[*Записуємо рівняння поверхні у вигляді*** $F(x,y,z)=0$.**]**

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} - 1.$$

[*Записуємо формулу для вектора нормалі до поверхні*** S.**]**

$$\overline{n}(M_0) \overset{[9.7.2]}{=} \pm \operatorname{grad} F(M_0).$$

[*Записуємо формулу для*** $\operatorname{grad} F(M_0)$.**]**

$$\operatorname{grad} F(M_0) \overset{[9.5.3]}{=} \frac{\partial F(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}\overline{k}.$$

[*Обчислюємо частинні похідні.***]**

$$F_x'(M_0) = \left.\frac{x}{2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}; F_y'(M_0) = \left.\frac{y}{2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}; F_z'(M_0) = 2z\,|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

[*Підставляємо знайдені похідні*]

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{1}{2}\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j} + \sqrt{2}\overline{k}.$$

Вектор внутрішньої нормалі до еліпсоїда у точці M_0 утворює тупі кути з осями координат, отже,

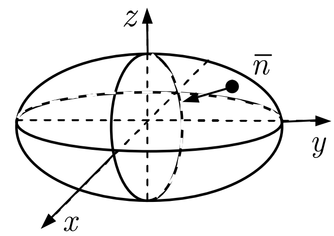


Рис. до зад. 3.1.2

$$\overline{l} = \overline{n}(M_0) = -\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)^T.$$

[*Знаходимо орт вектора нормалі.***]**

$$\overline{l}^0 = \overline{n}^0 = \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|}; \qquad |\overline{n}| = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

$$\overline{l}^0 = -\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)^T = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T.$$

3.2. Знайти градієнт, величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ у точці $M_0(1;2;1)$.

Розв'язання. [9.5.3, 9.5.6.] **[***Записуємо формулу для*** $\operatorname{grad} u(M_0)$.**]**

$$\operatorname{grad} u(M_0) \overset{[1.5.4]}{=} \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\overline{k}.$$

[*Обчислюємо частинні похідні функції*** $u(M)$.**]**

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{6}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

[*Знаходимо* $\operatorname{grad} u(M_0)$.**]** ①

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,\bar{k}.$$

[*Обчислюємо довжину* $\operatorname{grad} u(M_0)$.]

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 1.$$

Найбільша зміна функції відбувається у напрямі вектора $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; величина найбільшої зміни дорівнює 1.

Коментар. ① Найбільша зміна функції відбувається у напрямі градієнта. Величина цієї зміни дорівнює довжині градієнта.

3.3. Скласти рівняння дотичної площини P та нормалі L до поверхні $S : x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ у точці $M_0(1;2;-1)$.

Розв'язання. [9.7.3, 9.7.4.] **[***Записуємо рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні* $F(x,y,z) = 0$.**]**

$$P : F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0;$$

$$L : \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

[*Обчислюємо частинні похідні функції* $F(x,y,z)$.**]**

$$F'_x(M_0) = (3x^2 + yz)\,|_{(1;2;-1)} = 1;$$

$$F'_y(M_0) = (3y^2 + xz)\,|_{(1;2;-1)} = 11;$$

$$F'_z(M_0) = (3z^2 + xy)\,|_{(1;2;-1)} = 5.$$

Рівняння дотичної площини P:

$$1(x-1) + 11(y-2) + 5(z+1) = 0,$$

$$x + 11y + 5z - 18 = 0.$$

Рівняння нормалі L:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

3.4. Знайдіть напрям і величину $\operatorname{grad} u(M_0)$, якщо:

1) $u = x^2 + y^2, M_0(3;2)$; 2) $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}, M_0(2;1)$;

3) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz, M_0(1;-1;2)$;

4) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, M_0(2;1;1)$.

3.5. Знайдіть кут між градієнтами функції u в точках M_1 та M_2:

1) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, M_1(1;1), M_2(1;-1)$;

2) $u = \arcsin\dfrac{x}{x+y}, M_1(1;1), M_2(3;4)$;

3) $u = x^2 + y^2 + z^2, M_1(1;1;\sqrt{7}), M_2(\sqrt{7};-1;-1)$;

4) $u = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, M_1(1;1;1), M_2(1;2;-1)$.

3.6. Знайдіть похідну функції u у напрямі $\overline{l}$ у точці M_0, якщо:

1) $u = \operatorname{arctg} xy, \overline{l} = (1;1), M_0(1;1)$;

2) $u = x\sin(x+y), \overline{l} = (-2;0), M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1, \overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_0(3;1), M_1(6;5)$;

4) $u = 5x + 10x^2y + y^5, \overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_0(1;2), M_1(5;-1)$;

5) $u = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2, \overline{l} = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)^T, M_0(3;3;1)$;

6) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \overline{l} = \left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)^T, M_0(1;2;1)$;

7) $u = xyz, \overline{l} = \overline{M_0M_1},\ M_0(5;1;2),\ M_1(9;4;14)$;

8) $u = x^2y^2z^2, \overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_0(1;-1;3),\ M_1(0;1;1)$.

3.7. Знайдіть найбільше значення $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ у точці M_0, якщо:

1) $u = xy^2 - 3x^4y^5, M_0(1;1)$; 2) $u = \dfrac{x + \sqrt{y}}{y}, M_0(2;1)$;

3) $u = \ln xyz, M_0(1;-2;-3)$;

4) $u = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + 2z + \operatorname{ctg} z, M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.8. 1. Знайдіть швидкість змінювання функції $u = xyz$ у точці $M_0(5;1;-8)$ у напрямі вектора $\overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_1(9;4;4)$.

2. Знайдіть швидкість змінювання функції $u = xe^y + ye^x - z^2$ у точці $M_0(3;0;2)$ у напрямі вектора $\overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_1(4;1;3)$.

3.9. 1. Знайдіть напрям і величину найбільшого змінювання функції $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ у точці $M_0(1;1;1)$.

2. Знайдіть напрям і величину найбільшого змінювання функції $u = xyz$ у точці $M_0(2;1;-1)$.

3.10. Знайдіть одиничний вектор, напрямлений уздовж нормалі до заданої поверхні у точці M_0:

1) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, M_0(1;1;2)$;

2) $xy + xz + yz = 3, M_0(1;1;1)$.

3.11. Запишіть рівняння дотичної площини і нормалі до заданої поверхні в точці M_0:

1) $z = 2x^2 - 4y^2, M_0(2;1;4)$; 2) $z = x^2 + y^2, M_0(1;-2;5)$;

3) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0, M_0(4;3;4)$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, M_0(1;-2;-2)$;

5) $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{3} = 1, M_0(3;-2;-1)$; 6) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{3} = -1, M_0(4;-3;3)$;

7) $z - y - \ln\dfrac{x}{z} = 0, M_0(1;1;1)$; 8) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, M_0(2;2;1)$.

3.12. 1. До поверхні $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ проведіть дотичні площини, які паралельні площині $x + 4y + 6z = 0$.

2. До поверхні $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ проведіть дотичні площини, які паралельні площині $x - y + 2z = 0$.

3. До поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ проведіть дотичну площину, яка перпендикулярна до площин $x - y - z = 2$ та $2x - 2y - z = 4$.

4. Для поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ знайдіть нормаль, яка паралельна прямій $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{4}$.

3.13. Запишіть рівняння дотичної і нормальної площини до заданої кривої у точці, що відповідає значення t_0:

1) $x = \sin 2t, y = 1 - \cos 2t, z = \sqrt{2}\cos t, t_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, y = b\sin t, z = ct, t_0 = 0$.

3.14. Запишіть рівняння дотичної і нормальної площини до заданої кривої у точці M_0:

1) $x = t^2, y = 1 - t, z = t^3, M_0(1;0;1)$;

2) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\dfrac{t}{2}, M_0\left(\dfrac{\pi}{2} - 1;1;2\sqrt{2}\right)$.

Відповіді

3.4. 1) $6\overline{i} + 4\overline{j}, 2\sqrt{13}$; 2) $\dfrac{2}{3}\overline{i} + \dfrac{1}{3}\overline{j}, \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; 3) $6\overline{i} - 6\overline{j} + 6\overline{k}, 6\sqrt{3}$; 4) $9\overline{i} - 3\overline{j} - 3\overline{k}, 3\sqrt{11}$.

3.5. 1) $\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{7}{5\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha = \dfrac{1}{9}$; 4) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{99}}$.

3.6. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.2) -1; 3) 0; 4) -18; 5) 62; 6) $\dfrac{5}{9}$; 7) $\dfrac{98}{13}$; 8) -22.

3.7. 1) $\sqrt{290}$; 2) $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$; 3) $\dfrac{7}{6}$; 4) $\dfrac{\sqrt{137}}{8}$. **3.8.** 1) $-\dfrac{92}{13}$; 2) $\dfrac{e^3}{\sqrt{3}}$.

3.9. 1) $\operatorname{grad} u(M_0) = 8\overline{i} - 4\overline{j} + 8\overline{k}, \max\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = 12$.

2) $\operatorname{grad} u(M_0) = -\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}, \max\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = 3$.

3.10. 1) $\pm\left(\dfrac{2}{3\sqrt{14}};\dfrac{1}{3\sqrt{14}};\dfrac{11}{3\sqrt{14}}\right)^T$; 2) $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3.11. 1) $8x - 8y - z = 4, \dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{-8} = \dfrac{z-4}{-1}$;

2) $2x - 4y - z - 5 = 0, \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$;

3) $3x + 4y - 6z = 0, \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}$;

4) $x - 2y + 2z - 9 = 0, \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$;

5) $2x - 3y - 6z - 18 = 0, \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{-6}$;

6) $3x - 4y - 12z + 12 = 0, \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z-3}{-12}$;

7) $x + y - 2z = 0, \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$; 8) $x + y - 4z = 0, \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{4}$.

3.12. 1) $x + 4y + 6z = \pm 21$; 2) $x - y + 2z = \pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$;

3) $x + y = 1 \pm \sqrt{2}$; 4) $\dfrac{x - 1 \pm 1/\sqrt{26}}{1} = \dfrac{y \pm 3/\sqrt{26}}{3} = \dfrac{z \pm 3/\sqrt{26}}{4}$.

3.13. 1) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}, 2y-z-1=0$; 2) $\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}, by+cz=0.$

3.14. 1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{3}, 2x-y+3z-5=0;$

2) $\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, x+y+\sqrt{2}z=\dfrac{\pi}{2}+4.$

4. Екстремуми функції кількох змінних

Навчальні задачі

4.1. Розвинути функцію $z=e^{x/y}$ за Тейлоровою формулою з центром у точці $M_0(0;1)$ до членів 2-го порядку включно.

Розв'язання. [9.8.1.] **[***Записуємо Тейлорову формулу 2-го порядку з центром у точці* $M_0(0;1)$.**]**

$$z(x,y)=z(0,1)+\frac{1}{1!}\Big(z'_x(0,1)x+z'_y(0,1)(y-1)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2!}(z''_{x^2}(0,1)x^2+2z''_{xy}(0,1)x(y-1)+z''_{y^2}(0,1)(y-1)^2)+R_2(x,y).$$

[*Обчислюємо частинні похідні функції* z *у точці* M_0.**]**

$$z(M_0)=1;$$
$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}=\left.\left(e^{x/y}\frac{1}{y}\right)\right|_{M_0(0;1)}=1;$$
$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=\left.\left(e^{x/y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)\right|_{M_0(0;1)}=0;$$
$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}=\left.\left(e^{x/y}\frac{1}{y^2}\right)\right|_{M_0(0;1)}=1;$$
$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x\partial y}=\left.\left(-e^{x/y}\frac{x}{y^3}-e^{x/y}\frac{1}{y^2}\right)\right|_{M_0(0;1)}=-1;$$
$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}=\left.\left(e^{x/y}\frac{x^2}{y^4}+e^{x/y}\frac{2x}{y^3}\right)\right|_{M_0(0;1)}=0.$$

[*Підставляємо обчислені похідні в Тейлорову формулу.***]**

$$e^{x/y}=1+x+\frac{1}{2}x^2-x(y-1)+R_2(x,y).$$

4.2. Дослідити функцію $z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ на екстремум.

Розв'язання. [9.8.2–9.8.7.] ①

[***Крок 1.*** *Визначаємо область означення функції.*]

$$D(z) = \mathbb{R}^2.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо стаціонарні точки функції* z *із системи* $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$.]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12.$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Стаціонарними є точки: $M_0(2;1)$, $M_1(-2;-1), M_2(1;2), M_3(-1;-2)$.

[***Крок 3.*** *Для кожної точки перевіряємо достатню умову існування екстремуму і висновуємо.*]

[*Знаходимо похідні 2-го порядку функції* z.]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x;$$

$$\det H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2.$$

Для $M_0(2;1)$:

$$A_0 = 6x\big|_{M_0(2;1)} = 12, B_0 = 6y\big|_{M_0(2;1)} = 6, C_0 = 6x\big|_{M_0(2;1)} = 12;$$

$$\Delta_0 = 144 - 36 = 108 > 0, A_0 = 12 > 0 \Rightarrow M_0 - \text{ точка } \min.$$

Для $M_1(-2;-1)$:

$$A_1 = -12, B_1 = -6, C_1 = -12;$$

$$\Delta_1 = 144 - 36 = 108 > 0, A_1 = -12 < 0 \Rightarrow M_1 - \text{точка} \max.$$

Для $M_1(1;2)$:

$$A_2 = 6, B_2 = 12, C_2 = 6;$$

$$\Delta_2 = 36 - 144 < 0 \Rightarrow M_2 - \text{не є точкою екстремума.}$$

Для $M_3(-1;-2)$:

$$A_3 = -6, B_3 = -12, C_3 = -6;$$

$$\Delta_3 = 36 - 144 < 0 \Rightarrow M_3 - \text{не є точкою екстремума.}$$

4.3.1. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + y^2 - xy - x - y$$

в області $\overline{D} : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$

Розв'язання. [9.9.1, 9.9.6.]

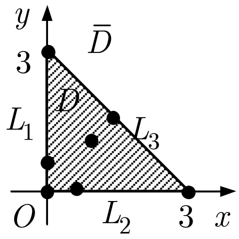


Рис. до зад. 4.3.1

[*Зображуємо область* $\overline{D} = D \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо стаціонарні точки, що є внутрішніми для області* $\overline{D}$ *із системи* $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$]

$$z'_x = 2x - y - 1, \quad z'_y = 2y - x - 1.$$

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \quad M_0(1;1) \in D.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо стаціонарні точки на межі області і долучаємо до них кінцеві точки кожної ланки.*]

На $L_1 = \left\{ x = 0, 0 \leq y \leq 3 \right\}$:

$$z(x,y)\Big|_{x=0} = z_1(y) = y^2 - y, y \in [0;3].$$

$$z'_1 = 2y - 1 = 0; y = \frac{1}{2}; M_1\left(0; \frac{1}{2}\right) \in L_1.$$

$$M_2(0;0) \in L_1, M_3(0;3) \in L_1.$$

На $L_2 = \left\{ y = 0, 0 \leq x \leq 3 \right\}$:

$$z(x,y)\Big|_{y=0} = z_2(x) = x^2 - x, x \in [0;3].$$

$$z'_2 = 2x - 1 = 0; x = \frac{1}{2}; M_4\left(\frac{1}{2}; 0\right) \in L_2.$$

$$M_2(0;0), M_5(3;0) \in L_2.$$

На $L_3 = \left\{ y = 3 - x, 0 \leq x \leq 3 \right\}$:

$$z(x,y)\Big|_{y=3-x} = z_3(x) = 3x^2 - 9x + 6, x \in [0;3].$$

$$z'_3 = 6x - 9 = 0; x = \frac{3}{2}; M_6\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \in L_3.$$

$$M_3(0;3), M_5(3;0) \in L_3.$$

[***Крок 3.*** *Порівнюємо значення функції у знайдених точках.*]

$$z(M_0) = z(1,1) = -1;$$

$$z(M_1) = z\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \; z(M_2) = z(0,0) = 0;$$

$$z(M_3) = z(0,3) = 6;\ z(M_4) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4};$$
$$z(M_5) = z(3,0) = 6;\ z(M_6) = z\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$$

[*Висновуємо.*]

$\max\limits_{M\in\overline{D}} z(M) = z(0,3) = z(3,0) = 6;$

$\min\limits_{M\in\overline{D}} z(M) = z(1,1) = -1.$

4.3.2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x + y$ в області $\overline{D} : x^2 + y^2 \le 4.$

Розв'язання. [9.9.1, 9.9.6.]

1. $z'_x = 1, z'_y = 1 \Rightarrow$ стаціонарних точок функція не має.

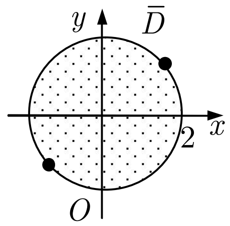


Рис. до зад. 4.3.2

2. Межу області коло $x^2 + y^2 = 4$ задаємо параметрично $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi).$

$$z(x,y)\Big|_{\substack{x=2\cos t,\\ y=2\sin t}} = \tilde{z}(t) = 2\cos t + 2\sin t, t \in [0; 2\pi].$$

$$\tilde{z}'(t) = -2\sin t + 2\cos t.$$

$$\tilde{z}'(t) = -2\sin t + 2\cos t = 0;\ \operatorname{tg} t = 1;\ t_1 = \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

$$M_1(\sqrt{2}; \sqrt{2}), M_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}).$$

$$z(M_1) = z(\sqrt{2}; \sqrt{2}) = 2\sqrt{2};$$
$$z(M_2) = z(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

$\max\limits_{M\in\overline{D}} z(M) = z(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2};$

$\min\limits_{M\in\overline{D}} z(M) = z(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$

4.4.1. Дослідити на екстремум функцію $z = (3x^2 - 4y)^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y$ за умови зв'язку $\dfrac{3}{4}x^2 - y + \dfrac{1}{6} = 0$ методом виключення змінних.

Розв'язання. [9.9.2.]

[*Виражаємо одну із змінних з рівняння зв'язку.*]

$$y(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}.$$

[*Підставляємо вираз у функцію* $z(x,y)$.]

$$z(x, y(x)) = \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}.$$

[*Досліджуємо на локальний екстремум одержану функцію.*]

$$\varphi'(x) = x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{3}.$$

[*Перевіряємо виконання достатніх умов існування локального екстремуму.*]

$$\varphi''\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 > 0.$$

У точці $x_0 = -\dfrac{1}{3}$ функція $\varphi(x)$ має локальний мінімум.

З умови зв'язку знаходимо відповідне значення

$$y_0 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Точка $M_0\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}\right)$ є точкою локального умовного мінімуму функції $z(x, y)$.

[*Обчислюємо значення функції* $z(x, y)$ *в цій точці.*]

$$z_{\min} = z\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

4.4.2. Дослідити на екстремум функцію $z = (3x^2 - 4y)^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y$ за умови зв'язку $\dfrac{3}{4}x^2 - y + \dfrac{1}{6} = 0$ методом множників Лаґранжа.

Розв'язання. [9.9.2–5, 9.9.7.]

[***Крок 1.*** *Записуємо функцію Лаґранжа для задачі.*]

$$L(x, y; \lambda) = (3x^2 - 4y)^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \lambda\left(\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6}\right),$$

де λ — невизначений Лаґранжів множник.

[***Крок 2.*** *Знаходимо стаціонарні точки Лаґранжової функції.*]

$$\begin{cases} L'_x = 12x(3x^2 - 4y) + \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2}\lambda x = 0; \\ L'_y = -8(3x^2 - 4y) + \dfrac{2}{3} - \lambda = 0; \\ \varphi(x, y) = \dfrac{3}{4}x^2 - y + \dfrac{1}{6} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{4}, \lambda = 6 \Leftrightarrow M'_0\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; 6\right).$$

[***Крок 3.*** *Перевіряємо виконання достатніх умов екстремуму для функції Лаґранжа в точці* M_0'.]

[*Знаходимо похідні 2-го порядку Лаґранжової функції.*]

$$L''_{xx} = 12(9x^2 - 4y) + \frac{3}{2}\lambda, L''_{xy} = -48x, L''_{yy} = 32;$$
$$L''_{xx}(M_0') = 9, L''_{xy}(M_0') = 16, L''_{yy}(M_0') = 32.$$

[*Записуємо другий диференціал функції* $L(x, y; \lambda)$ *в точці* $M_0'\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; 6\right)$.]

$$d^2L(M_0') = 9dx^2 + 32dxdy + 32dy^2.$$

[*Щоб визначити знак 2-го диференціала при наявності зв'язку, встановлюємо зв'язок між* dx *та* dy *з умови зв'язку*.]

$$d(\varphi(x, y)) = d\left(\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}xdx - dy = 0.$$

У точці M_0':

$$-\frac{1}{2}dx - dy = 0, dy = -\frac{1}{2}dx.$$

[*Підставляємо* dy *у вираз для* $d^2L(M_0')$.]

$$d^2L(M_0') = 9dx^2 + 32dx\left(-\frac{1}{2}dx\right) + 32\left(-\frac{1}{2}dx\right)^2 = dx^2 > 0.$$

У точці M_0' функція $L(x, y; \lambda)$ має локальний мінімум

$$L_{\min} = L(M_0') = \frac{1}{2},$$

а функція

$$z = (3x^2 - 4y)^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$$

при наявності зв'язку

$$\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6} = 0$$

має у точці $M_0\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$ локальний умовний мінімум

$$z_{\min} = z\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

4.5. Розвиньте функцію f за степенями $x - x_0$ та $y - y_0$, знайшовши члени 2-го порядку включно:

1) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2, x_0 = 1, y_0 = -1;$

2) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, x_0 = 1, y_0 = 0;$

3) $f(x, y) = y^x, x_0 = 1, y_0 = 1;$

4) $f(x, y) = \sin x \sin y, x_0 = y_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

4.6. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y;$ 2) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$

3) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$ 4) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27;$

5) $z = x^3y^2(6 - x - y), x > 0, y > 0;$ 6) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, x > 0, y > 0;$

7) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y;$

8) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y;$

9) $z = e^{x/2}(x + y^2);$

10) $z = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2), a > 0, b > 0.$

4.7. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

1) $z = x^2 + y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \le 9;$

2) $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$ в області $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1;$

3) $z = xy$ у крузі $x^2 + y^2 \le 1;$

4) $z = x^2 - y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \le 4;$

5) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$ та $x + y + 3 = 0;$

6) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ у трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $x + y + 5 = 0;$

7) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ у прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $x = 2, y = -1, y = 2;$

8) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ у прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0, x = 1, y = 2;$

9) $z = x^2 + 2xy - 1$ в області, обмеженій лініями $y = 0$ та $y = x^2 - 4;$

10) $z = x^4 - 2x^2y^2 + y^3$ в області, обмеженій лініями $y = 4$ та $y = x^2.$

4.8. Знайдіть умовні екстремуми функції:

1) $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$;

2) $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$;

3) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;

4) $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$;

5) $z = x^2 + xy + y^2$ при $x^2 + y^2 = 1$;

6) $z = 2x^2 + 12xy + y^2$ при $x^2 + 4y^2 = 25$.

4.9. 1. З усіх прямокутних паралелепіпедів, які мають заданий об'єм V, знайдіть той, який має найменшу поверхню.

2. З'ясуйте, яка з відкритих прямокутних ванн місткістю V має найменшу площу поверхні.

4.10. 1. Доведіть, що добуток трьох невід'ємних чисел заданої суми є найбільшим тоді й лише тоді, коли ці числа рівні між собою.

2. Доведіть, що сума трьох додатних чисел, які мають заданий добуток, є найменшою тоді й лише тоді, коли ці числа рівні.

Відповіді

4.5. 1) $5 + 5(x-1) - 5(y+1) + \dfrac{1}{2!}[2(x-1)^2 - 6(x-1)(y+1) + 2(y+1)^2] + R_2$;

2) $y - (x-1)y + R_2$; 3) $1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + R_2$;

4) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\left[\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 - 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) + \left(y - \dfrac{\pi}{4}\right)^2\right] + R_2$.

4.6. 1) $z_{\min}(1,0) = -1$; 2) $z_{\max}(0,0) = 10$; 3) $z_{\min}\left(1, \dfrac{1}{2}\right) = 0$; 4) $z_{\min}(3,3) = 0$;

5) $z_{\max}(3,2) = 108$; 6) $z_{\min}(5;2) = 30$; 7) $z_{\min}(1,3) = 10 - 18\ln 3$; 8) $z_{\min}(1,2) = 7 - 10\ln 2$;

9) $z_{\min}(-2,0) = -\dfrac{2}{e}$; 10) $z_{\min}(0,0) = 0$; якщо $a > b$, то $z_{\max}(\pm 1, 0) = \dfrac{a}{e}$; якщо $a < b$, то $z_{\max}(0, \pm 1) = \dfrac{b}{e}$; якщо $a = b$, то $z_{\max}(x^2 + y^2 = 1) = \dfrac{a}{e}$.

4.7. 1) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(x^2 + y^2 = 9\right) = 9$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(0,0\right) = 0$;

2) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1\right) = 1$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(0,0\right) = 0$;

3) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

4) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(2,0) = z(-2,0) = 4$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(0,2) = z(0,-2) = -4$;

5) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(-3,0) = z(0,-3) = 6,\ \min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(-1,-1) = -1;$

6) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(0,-5) = 41,\ \min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(-2,-1) = -3;$

7) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(2,-1) = 13,\ \min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(-1,-1) = z(0,-1) = -1.$

8) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(1,2) = 17,\ \min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(1,0) = -3;$

9) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{20}{9}\right) = \dfrac{181}{27},\ \min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(1,-3) = -6;$

10) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(0,4) = 64,\ \min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y) = z(\pm 2,4) = -48.$

4.8. 1) $z_{\min}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1-2\sqrt{2},\ z_{\max}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1-2\sqrt{2};$

2) $z_{\min}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5},\ z_{\max}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5};$

3) $z_{\min}\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{19}{4}$; 4) $z_{\min}(1,0) = 0, z_{\max}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}.$

5) $z_{\min}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}, z_{\max}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2};$

6) $z_{\min}\left(\pm 3,\mp 2\right) = -50, z_{\max}\left(\pm 4,\pm\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{425}{4}.$

4.9. 1) куб з ребром $\sqrt[3]{V}$; 2) $\sqrt[3]{2V} \times \sqrt[3]{2V} \times \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}.$

Модуль 2. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

5. Обчислення визначеного інтеграла

Навчальні задачі

5.1.1. Обчислити $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

Розв'язання. [10.4.1.]

$$\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \left| d \ln x = \frac{dx}{x} \right| \overset{①}{=} \int\limits_e^{e^2} \frac{d \ln x}{\ln x} \overset{[10.4.1]}{=} \ln \left| \ln x \right| \Big|_e^{e^2} \overset{②}{=}$$
$$= \ln \left| \ln e^2 \right| - \ln \left| \ln e \right| = \ln 2.$$

Коментар. ① Знаходимо первісну для підінтегральної функції методом уведення функції під знак диференціала.
② За формулою Ньютона — Лейбніца від значення первісної у верхній межі віднімаємо значення первісної у нижній.

5.1.2. Обчислити $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$.

Розв'язання. [10.4.1.]

$$\int\limits_2^5 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} \overset{①}{=} \int\limits_2^5 \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} \overset{[10.4.1]}{=} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} \Big|_2^5 =$$
$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{12}.$$

Коментар. ① Виділяємо повний квадрат у знаменнику дробу.

5.1.3. Обчислити $\int\limits_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} \, dx$.

Розв'язання. [10.4.2.]

$$\int\limits_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} \, dx = \left| \begin{array}{ccc} u = x & \to & du = dx \\ dv = \sin \frac{x}{2} dx & \to & v = -2 \cos \frac{x}{2} \end{array} \right| \overset{[10.4.2]}{=}$$

$$= -2x \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} + 2 \int\limits_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \, dx = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} + 0 + 4 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 4 \sin \frac{\pi}{2} - 4 \sin 0 = 4.$$

5.1.4. Обчислити $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx.$

Розв'язання. [10.4.3, 10.4.7.]

$$\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx \overset{①}{=} \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \\ dx = 3\cos t dt; \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \\ = 3\left|\cos t\right| = 3\cos t. \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \right| \overset{[10.4.3]}{=}$$

$$= 81\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t dt = 81\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t(1-\sin^2 t)dt =$$

$$= 81\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t dt - 81\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t dt \overset{[10.4.7]}{=} 81\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right) = \frac{81\pi}{16}.$$

Коментар. ① Обчислюючи визначений інтеграл заміною змінних, на відміну від невизначеного інтегрування, не потрібно вертатись до старої змінної. Використовуємо тригонометричну підстановку і не забуваємо змінити межі визначеного інтеграла:

$$x = 0 \Leftrightarrow 3\sin t = 0;\ t = 0.$$

$$x = 3 \Leftrightarrow 3\sin t = 3,\ t = \frac{\pi}{2}.$$

5.1.5. Обчислити $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$

Розв'язання. [10.4.3.]

$$\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}; \\ 1+\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & \frac{\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3} \\ \hline t & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} \end{array} \right| \overset{[10.4.3]}{=}$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^5 t dt}{\cos^2 t} = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^3 t dt = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\sin^2 t)d\sin t =$$

$$= \sin t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{11}{24}.$$

5.1.6. Обчислити $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx.$

Розв'язання. [10.4.3.]

$$\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{2}{\cos t}, t \in [0;\frac{\pi}{2}) \\ dx = \dfrac{2\sin t dt}{\cos^2 t}. \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 2 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{6} \end{array} \right| \overset{[10.4.3]}{=}$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/6} \cos t \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4}\,\frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = 2\int\limits_{0}^{\pi/6} \operatorname{tg}^2 t dt =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\pi/6} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = 2\operatorname{tg} t\Big|_0^{\pi/6} - 2t\Big|_0^{\pi/6} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}.$$

5.2.1. Обчислити $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt[3]{\sin x}dx.$

Розв'язання. [10.4.5.]

Оскільки $\sqrt[3]{\sin x}$ — непарна функція, то $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt[3]{\sin x}dx \overset{[2.3.6]}{=} 0.$

5.2.2. Обчислити $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left|\operatorname{tg} x\right| dx.$

Розв'язання. [10.4.4.]

Оскільки $\left|\operatorname{tg} x\right|$ — парна функція, то

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left|\operatorname{tg} x\right| dx \overset{[10.4.4]}{=} 2\int\limits_{0}^{\pi/4} \left|\operatorname{tg} x\right| dx = 2\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx = -2\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= -2\ln\cos\frac{\pi}{4} + 2\ln\cos 0 = \ln 2.$$

5.2.3. Обчислити $\int\limits_{0}^{6\pi} \sin^5 x dx.$

Розв'язання. [10.3.3, 10.4.5, 10.4.6.]

Функція $\sin^5 x$ має період 2π.

$$\int_0^{6\pi} \sin^5 xdx \overset{[10.3.3]}{=} \int_0^{2\pi} \sin^5 xdx + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^5 xdx + \int_{4\pi}^{6\pi} \sin^5 xdx \overset{[10.4.6]}{=}$$
$$= 3\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 xdx \overset{[10.4.5]}{=} 3 \cdot 0 = 0.$$

Коментар. ① Використовуючи властивість адитивності, розбиваємо проміжок інтегрування на відрізки завдовжки 2π.

5.2.4. Обчислити $\int_0^{2\pi} \sin^4 xdx.$

Розв'язання. [10.4.7.]

Функція $\sin^4 x$ має період $T = \pi$.

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 xdx \overset{[10.3.3]}{=} \int_0^{\pi} \sin^4 xdx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^4 xdx \overset{[10.4.5]}{=} 2\int_0^{\pi} \sin^4 xdx =$$
$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 xdx \overset{[10.4.4]}{=} 4\int_0^{\pi/2} \sin^4 xdx \overset{[10.4.7]}{=} 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3!!}{4!!} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

5.3. Обчисліть:

1) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

2) $\int_{2}^{-29} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$;

3) $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$;

4) $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$;

5) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$;

6) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;

7) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}dx}{x^2}$;

8) $\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}$;

9) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$;

10) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2xdx.$

5.4. Обчисліть:

1) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{4x^2+4x+5}dx$;
2) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$;

3) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$;
4) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

5) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;
6) $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx$;

7) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$;
8) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{5x-2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$;

9) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}dx$;
10) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)^2}dx$;

11) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}dx$;
12) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$;

13) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sin^2\varphi d\varphi$;
14) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos^4 x\sin^2 xdx$;

15) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 xdx$;
16) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3\varphi d\varphi$;

17) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$;
18) $\displaystyle\int_{0}^{\operatorname{arctg}2/3} \frac{6+\operatorname{tg}x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$.

5.5. Обчисліть:

1) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left|1+x\right|dx$;
2) $\displaystyle\int_{0}^{2} \left|x^2-3x+2\right|dx$;

3) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$;
4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$;

5) $\int\limits_0^2 f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2; \end{cases}$

6) $\int\limits_{-3}^3 f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$

5.6. Обчисліть:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$;

2) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (x \cos^2 x + x^2 \sin x)dx$;

3) $\int\limits_{-2}^{2} (x^5 e^{-x^2} + 5x^4 - 3x^3 + x)dx$;

4) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 4}{\cos^2 x} dx$;

5) $\int\limits_{-6}^{6} (x^5 - 3x^3 + x) \cos x dx$;

6) $\int\limits_{-2}^{2} (x^7 - 7x) \ln^3(x^4 + 1)dx$;

7) $\int\limits_{-1}^{1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})dx$;

8) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

5.7. Знайдіть похідну функції:

1) $F(x) = \int\limits_1^x \ln t dt, x > 0$;

2) $F(x) = \int\limits_x^0 \sqrt{1 + t^4} dt$;

3) $F(x) = \int\limits_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$;

4) $F(x) = \int\limits_0^1 \cos t^2 dt$;

5) $F(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$;

6) $F(x) = \int\limits_x^{x^2} e^{-t^2} dt$.

5.8. За допомогою інтегруванням частинами, обчисліть:

1) $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$;

2) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

3) $\int\limits_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1) \cos 3x dx$;

4) $\int\limits_0^3 (x^2 - 6x + 9) \sin 2x dx$;

5) $\int\limits_1^e \ln^3 x dx$; 6) $\int\limits_0^1 x\ln(1+x^2)dx$;

7) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$;

9) $\int\limits_{-2}^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2}$; 10) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}$.

5.9. Застосовуючи Валісову формулу, обчисліть:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^8 x dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2}dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^7 2x dx$;

5) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^9 x dx$; 6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^8 x dx$.

5.10. За допомогою заміни змінної, обчисліть:

1) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$;

3) $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$; 4) $\int\limits_1^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}dx$;

5) $\int\limits_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}dx$; 6) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$;

7) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$; 8) $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

9) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$; 10) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}$;

11) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$; 12) $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$;

13) $\displaystyle\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx;$ 14) $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}};$

15) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3};$ 16) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\sin x}.$

Відповіді

5.3. 1) $\frac{7}{72}$; 2) -5; 3) $\frac{(e-1)^5}{5}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\ln(1+\sqrt{2})$; 6) $1-\cos 1$; 7) $e-\sqrt{e}$; 8) $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 9) $\frac{3}{32}(12-7\sqrt[3]{4})$; 10) $\frac{2}{7}$.

5.4. 1) $\frac{\pi}{16}$; 2) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\arcsin\frac{1}{3}$; 5) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; 6) $\ln\frac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}$; 7) $10\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$; 8) $5\sqrt{10}-5\sqrt{5}+12\ln\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{10}}$; 9) $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$; 10) $\ln\frac{9}{2}-1$; 11) $\frac{\pi}{4}$; 12) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\ln 2\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$; 13) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$; 14) $\frac{\pi}{16}$; 15) $\frac{\pi}{6}+\frac{8}{9\sqrt{3}}$; 16) $\frac{3}{2}-\ln 2$; 17) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 18) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{36}\ln 4$.

5.5. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{4}{3}-\frac{\sqrt[4]{2}}{3}$; 4) 2; 5) $\frac{5}{6}$; 6) 9. **5.6.** 1) 0; 2) 0; 3) 64; 4) 8., 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) 0;

5.7. 1) $\ln x$; 2) $-\sqrt{1+x^4}$; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$; 6) $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$.

5.8. 1) $1-\frac{2}{e}$; 2) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 3) $\frac{2}{9}-\frac{2}{27}\sin 3$; 4) $\frac{17}{4}+\frac{1}{4}\cos 6$; 5) $6-2e$; 6) $\ln 2-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $\sqrt{2}\pi-4$; 9) $\frac{1}{16}+\frac{\pi}{32}$; 10) $\frac{\pi}{32}$.

5.9. 1) $\frac{8}{15}$; 2) $\frac{35\pi}{256}$; 3) $\frac{5\pi}{16}$; 4) $\frac{8}{35}$; 5) 0; 6) $\frac{35\pi}{64}$.

5.10. 1) $\frac{32}{3}$; 2) $2-\frac{\pi}{2}$; 3) $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$; 4) $6\ln\frac{4}{3}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$; 6) $4-\pi$; 7) $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$; 8) $\frac{\pi}{6}$; 9) $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; 10) $\frac{1}{8\sqrt{3}}$; 11) $\sqrt{7}-\sqrt{3}+\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{6}$; 12) $\frac{8}{15}$; 13) $\frac{1}{24\sqrt{3}}$; 14) $\frac{\pi}{32}+\frac{7\sqrt{3}}{64}-\frac{1}{4}$; 15) $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$; 16) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

6. Застосування визначеного інтеграла

Навчальні задачі

6.1. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = e^x - 1,\ y = e^{2x} - 3,\ x = 0$.

Розв'язання. [10.5.1.]

[*Записуємо формулу, виходячи із шуканого застосування інтеграла.*]

Площу фігури, обмеженої лініями $y = f(x), y = g(x)$, $x = a, x = b$ знаходять за формулою

$$S \overset{[10.5.1]}{=} \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx.$$

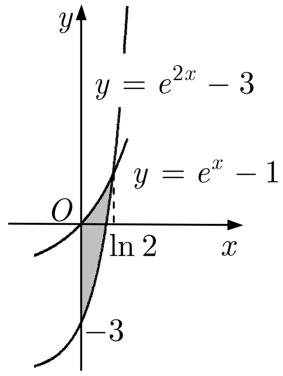


Рис. до зад. 6.1

Знаходимо точку перетину графіків функцій:

$$e^{2x} - 3 = e^x - 1;\ t = e^x.$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \Rightarrow x \in \varnothing; \\ t_2 = 2 \Rightarrow x = \ln 2. \end{array}\right.$$

На відрізку $[0; \ln 2]$ маємо $e^x - 1 \geq e^{2x} - 3$:

$$S = \int_0^{\ln 2} \left((e^x - 1) - (e^{2x} - 3) \right) dx = \int_0^{\ln 2} (e^x + 2 - e^{2x}) dx =$$

$$= \left(e^x + 2x - \frac{1}{2} e^{2x} \right) \Bigg|_0^{\ln 2} = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

6.2.1. Знайти площу області, обмеженої еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0.$

Розв'язання. [10.5.3.]

Параметризуємо рівняння еліпса:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} t \in [0; 2\pi].$$

Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1; t_2]$ знаходять за формулою

$$S \overset{[10.5.3]}{=} \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt \right|$$

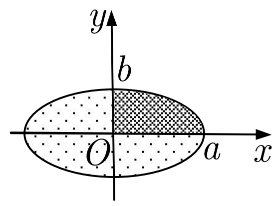


Рис. до зад. 6.2.1

Ураховуючи симетрію фігури, одержимо:

$$S = 4\left|\int\limits_0^{\pi/2} b\sin t(-a\sin t)dt\right| = 4ab\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 tdt = 4ab\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \pi ab.$$

6.2.2. Знайти площу фігури, обмеженої циклоїдою $\begin{cases}x = 2(t - \sin t),\\ y = 2(1-\cos t)\end{cases}$ та прямою $y = 3\,(0 < x < 4\pi, y \ge 3)$.

Розв'язання. [10.5.3.]

Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, що задана параметрично знаходять за формулою

$$S = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\right|.$$

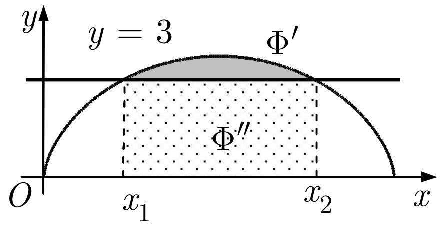


Рис. до зад. 6.2.2

Обмеження $0 < x < 4\pi$ вказує на те, що розглядають лише I арку циклоїди. Пряма перетинає циклоїду в точках з абсцисами x_1 та x_2. Шукану площу фігури Φ' можна знайти віднявши від площі під циклоїдою в межах $x_1 \le x \le x_2$ площу прямокутника Φ''. Знайдімо значення параметра t в точках перетину прямої і циклоїди:

$$\begin{cases}y = 2(1-\cos t),\\ y = 3\end{cases} \Leftrightarrow 3 = 2(1-\cos t) \Leftrightarrow \cos t = -\frac{1}{2}\ \ (0 \le t \le 2\pi);$$

$$t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

$$x_1 = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3},\ \ x_2 = 2\left(\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

$$S_{\Phi''} = 3(x_2 - x_1) = 3\left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) = 4\pi + 6\sqrt{3}.$$

$$S_{\Phi'\cup\Phi''} = 4\int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3}(1-\cos t)^2 dt = 4\int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= 4\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{4\pi/3} = 4\left(\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4}\right) = 4\pi + 9\sqrt{3}.$$

$$S_{\Phi'} = (4\pi + 9\sqrt{3}) - (4\pi + 6\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

6.3. Знайти площу фігури, обмеженої кривими: $\rho = 4\cos 3\varphi, \rho = 2 \ (\rho \geq 2)$.

Розв'язання. [10.5.2.]

Площу фігури, обмеженої трипелюстковою розою та колом знаходимо, враховуючи симетрію:

$$S = 3S_{\Phi'}.$$

Знайдімо за якого значення кута (для розглядуваної пелюстки), перетинаються коло і роза:

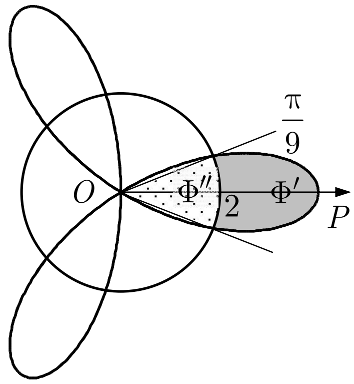


Рис. до зад. 6.3.

$$\begin{cases} \rho = 2, \\ \rho = 4\cos\varphi, \end{cases} \Leftrightarrow 4\cos 3\varphi = 2 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2}.$$

$$3\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{9}.$$

$$S_{\Phi'} = S_{\Phi} - S_{\Phi''},$$

де S_{Φ} — площа «розового» сектора $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$, $S_{\Phi''}$ — площа кругового сектора.

$$S_{\Phi} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/9}^{\pi/9} 16\cos^2 3\varphi d\varphi = 16\int\limits_{0}^{\pi/9} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} d\varphi = 8\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/9} =$$

$$= 8\left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{6}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{\Phi''} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/9}^{\pi/9} 4d\varphi = 4\varphi\Big|_{0}^{\pi/9} = \frac{4\pi}{9}.$$

$$S_{\Phi'} = \frac{8\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi}{9} = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$S = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

6.4. Обчислити об'єм тіла Ω, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

Розв'язання. [10.5.4.]

Об'єм тіла за відомою площею перерізу його площиною, перпендикулярною до осі Ox знаходять за формулою:

$$V \overset{[10.5.4]}{=} \int\limits_{a}^{b} S(x)dx$$

Кожний переріз тіла, обмеженого еліпсоїдом, площиною $x = x_0, -a \leq x_0 \leq a$, є плоскою фігурою, що обмежена еліпсом:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}=1,$$

з півосями $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$ та $\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$, $-a \le x \le a$.

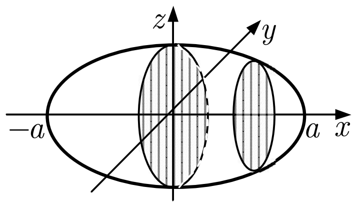


Рис. до зад. 6.4

Площа фігури (задача **6.2.1**):

$$S(x_0)=\pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x_0^2), -a \le x_0 \le a.$$

Отже, позначаючи x_0 через $x, -a \le x \le a$, одержимо:

$$V=\int_{-a}^{a} S(x)dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{bc}{a^2}(a^2-x^2)dx=2\pi\frac{bc}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

6.5. Обчислити об'єм, обмежений тором, і площу тора, утвореного обертанням кола $x^2+(y-b)^2=a^2$ навколо осі $Ox\,(b>a)$.

Розв'язання. [10.5.5.]

1. Об'єм тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції навколо осі Ox знаходять за формулою

$$V=\pi\int_{a}^{b} f^2(x)dx.$$

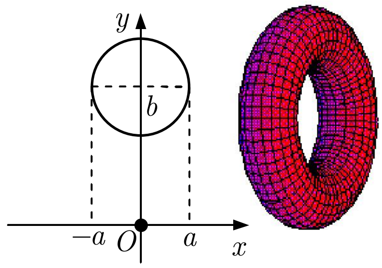


Рис. до зад. 6.4.2

Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійних трапецій, обмежених зверху лініями

$$y_1=b-\sqrt{a^2-x^2} \text{ та } y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}$$

знаходимо за формулою:

$$V_т=V_2-V_1=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})^2dx-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})^2dx=$$

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=4\pi b\frac{\pi a^2}{2}=2\pi^2a^2b.$$

2. Площу поверхні обертання, утвореної обертанням кривої $y=f(x), x\in[a;b]$, навколо осі Ox знаходять за формулою

$$Q=2\pi\int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Площу поверхні обертання, утвореної обертанням ліній

$$y_1=b-\sqrt{a^2-x^2} \text{ та } y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}$$

знаходимо за формулою:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2\pi\int_{-a}^{a}(b + \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dx +$$

$$+2\pi\int_{-a}^{a}(b - \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= 4\pi ba\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\pi ba \arcsin\frac{x}{a}\bigg|_{-a}^{a} = 4\pi^2 ab.$$

6.6. Матеріальна точка M рухається прямолінійно зі швидкістю

$$v(t) = 3t^2 + 2t + 1 \text{ м/с}.$$

Знайти шлях, який пройде точка від моменту $t_0 = 0$ за 3 секунди.

Розв'язання.

Шлях, пройдений матеріальною точкою із швидкістю $v = v(t)$ за проміжок часу $[t_1; t_2]$, знаходять за формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Отже,

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 2t + 1)dt = (t^3 + t^2 + t)\,\big|_0^3 = 39\,\text{м}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

6.7. Знайдіть площу фігур, обмежених:

1) параболою $y = x^2 + 2x$ і прямою $y = x + 2$;

2) параболою $y = 2x - x^2$ і прямою $y = -x$;

3) параболами $y^2 + 8x = 16$ та $y^2 - 24x = 48$;

4) параболами $y = x^2 + 8x - 12$ та $y = 18x - x^2$;

5) колом $x^2 + y^2 = 16$ і параболою $y^2 = 6x$;

6) колом $x^2 + y^2 = 8$ і параболою $y = \dfrac{x^2}{2}$.

7*) еліпсом $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ і гіперболою $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

6.8. Знайдіть площу фігур, обмежених лініями:

1) $y = x(x-1)^2, y = 0;$ 2) $x = y^2(y-1), x = 0;$

3) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1;$ 4) $y = \operatorname{tg} x, y = \frac{2}{3}\cos x, x = 0.$

6.9. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) однією аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ та віссю абсцис;

2) астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

3) кардіоїдою $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t); \end{cases}$ 4) еліпсом $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t. \end{cases}$

6.10. Знайдіть площу петлі лінії:

1) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

6.11. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) двопелюстковою розою $\rho = a\sin 2\varphi;$

2) п'ятипелюстковою розою $\rho = a\cos 5\varphi;$

3) лініями $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ та $\rho = 2 - \cos 4\varphi;$

4) лінією $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, що лежить поза лінією $\rho = 2 + \sin\varphi;$

5). лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2);$

6) лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, яка лежить усередині кола $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$

6.12. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, навколо осі Ox:

1) $y = x^3, x = 0, y = 8;$ 2) $y = \frac{2}{1+x^2}, y = 0, x = 0, x = 1;$

3) $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0;$ 4) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}, y = 0, x = -a, x = a.$

6.13. Крива обертається навколо осі $Ox.$ Обчисліть площу поверхні обертання:

1) $y^2 = x, x \in [0;4];$ 2) $y^2 = 4 + x, x \in [0;2];$

3) $y = \sin x, x \in [0;\pi];$ 4) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}, x \in [0;a].$

6.14. 1. Знайдіть об'єм кулі радіусом R.

2. Знайдіть об'єм конуса з радіусом основи R і висотою H.

6.15. Знайдіть шлях, який проходить тіло під час прямолінійного руху зі швидкістю $v(t)$ м/с за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$:

1) $v(t) = 3t^2 + 1, t_1 = 0, t_2 = 4;$ 2) $v(t) = 2t^2 + t, t_1 = 1, t_2 = 3.$

Відповіді

6.7. 1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $\frac{32}{3}\sqrt{6}$; 4) $\frac{343}{3}$; 5) $S_1 = \frac{16\pi}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}, S_2 = \frac{32\pi}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}$;

6). $S_1 = 2\pi + \frac{4}{3}, S_2 = 6\pi - \frac{4}{3}$; 7) $S_1 = S_3 = \pi - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 3 - 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}46, S_2 = 2(\pi - S_1)$.

6.8. 1). $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $e + \frac{1}{e} - 2$; 4) $\frac{1}{3} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.9. 1) $3\pi a^2$; 2) $\frac{3\pi a^2}{8}$; 3) $6\pi a^2$; 4) 6π.

6.10. 1) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$; 2) $\frac{8}{15}$.

6.11. 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) $\frac{\pi a^2}{4}$; 3) $\frac{37\pi}{6} - 5\sqrt{3}$; 4) $\frac{51\sqrt{3}}{16}$; 5) a^2; 6) $a^2\left(1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.12. 1) $\frac{768}{7}\pi$; 2) $\frac{\pi^2 + 2\pi}{2}$; 3) 12π; 4) $\pi a^3\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\right)$.

6.13. 1) $\frac{52}{3}\pi$; 2) $\frac{62}{3}\pi$; 3) $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$; 4) $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$.

6.14. 1) $\frac{4}{3}\pi R^3$; 2) $\frac{\pi R^2 H}{3}$.

6.15. 1) 68 м; 2) $\frac{64}{3}$ м.

7. Обчислення і дослідження невластивих інтегралів

Навчальні задачі

7.1.1. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1+2x}{x^2(x+1)}dx$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [10.6.1.] Маємо невластивий інтеграл 1-го роду. ①

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(x+1)}dx \overset{[10.6.1]}{=} \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2}\right)dx \overset{①}{=} \lim_{A\to+\infty} \left(\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^A \overset{①}{=}$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\ln\frac{A}{A+1} - \frac{1}{A} + \ln 2 + 1\right) = \ln 2 + 1.$$

Інтеграл збігається.

Коментар. ① Проміжок інтегрування нескінчений, і підінтегральна функція на ньому неперервна.

② Інтеграл від суми дорівнюватиме сумі інтегралів лише в разі їхньої збіжності. Границя від суми тут теж не дорівнює сумі границь.

7.1.2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax}dx \quad (a>0)$, або довести його розбіжність.

Розв'язання. [10.6.1.] Маємо невластивий інтеграл 1-го роду.

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax}dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} xe^{-ax}dx = \left|\begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = e^{-ax}dx & \to & v = -\dfrac{1}{a}e^{-ax}\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}xe^{-ax}\Bigg|_0^A + \frac{1}{a}\int\limits_0^A e^{-ax}dx\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{A}{a}e^{-aA} - \frac{1}{a^2}e^{-ax}\Bigg|_0^A\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{A}{a}e^{-aA} - \frac{1}{a^2}e^{-aA} + \frac{1}{a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{e^{aA}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{①}{=} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{ae^{aA}} = \frac{1}{a^2}.$$

Інтеграл збігається.

Коментар. ① За правилом Бернуллі — Лопіталя.

7.1.3. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x\ln x}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [10.6.2.] Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ має дві точки розриву: $x_1=0\notin[1;5], x_2=1\in[1;5]$.
Оскільки $x=1$ є точкою нескінченного розриву, то маємо невластивий інтеграл 2-го роду. ①

$$\int\limits_1^5 \frac{dx}{x\ln x} \overset{[10.6.2]}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^5 \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\ln x\right|\Big|_{1+\varepsilon}^5 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\ln\ln 5-\ln\ln\big(1+\varepsilon\big)\Big)=+\infty.$$

Інтеграл розбігається.
Коментар. ① Межі інтегрування є скінченними. Досліджуючи невластивий інтеграл за означенням, відступаємо всередину проміжку інтегрування.

7.1.4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [10.4.3.] Підінтегральна функція має розриви в точках $x_1=0, x_2=-\frac{1}{3}\notin\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right], x_3=\frac{1}{3}\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

Оскільки $x=\frac{1}{3}$ є точкою нескінченного розриву, то маємо невластивий інтеграл 2-го роду.

$$\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \left|\begin{matrix} x=\dfrac{1}{t}, \\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}. \end{matrix}\quad \begin{array}{c|c|c} x & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline t & 3 & \frac{3}{2} \end{array}\right| = \int\limits_{3/2}^{3} \frac{dt}{t\sqrt{\dfrac{9}{t^2}-1}} =$$
$$= \int\limits_{3/2}^{3} \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \left|\begin{matrix} t=3-\text{ точка} \\ \text{нескінченного розриву} \end{matrix}\right| = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{3/2}^{3-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{t}{3}\Bigg|_{3/2}^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)-\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

Інтеграл збігається.

7.2.1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

Розв'язання. [10.6.3, 10.6.7.] **[**_Плануючи використати ознаку порівняння, розбиваємо невластивий інтеграл 1-го роду на суму двох інтегралів так, щоб точка_ 0 _не належала проміжку інтегрування невластивого інтеграла._**]**

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}} = \int\limits_0^{1} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}} + \int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}.$$

Перший доданок — визначений інтеграл. А другий — невластивий інтеграл 1-го роду①

Дослідімо $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$ за ознакою порівняння.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} > 0, x \in [1;+\infty);$$

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{5/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} = g(x), x \to +\infty.$$

Оскільки $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ збігається[10.6.3], то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$ збігається за граничною ознакою порівняння.

Інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$ збігається як сума визначеного і збіжного невластивого інтеграла.

Коментар. ① Точка $x=-1$ в якій підінтегральна функція стає необмеженою, не належить проміжку інтегрування.

7.2.2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^{x^2}-1}$.

Розв'язання. [10.6.4, 10.6.8.] **[**_З'ясовуємо в яких точках підінтегральна функція стає необмеженою._**]**

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}-1} > 0, x \in (0;1]; \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{x^2}-1} = +\infty.$$

Точка $x=0$ — точка нескінченного розриву і досліджуваний інтеграл є невластивим інтегралом 2-го роду.

[_Застосовуємо граничну ознаку порівняння._**]**

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}-1} \sim \frac{1}{x^2} = g(x), x \to 0.$$

Оскільки $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ – розбігається[10.6.4], то $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{x^2}-1}$ розбігається за граничною ознакою порівняння.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

7.3. Обчисліть невластивий інтеграл (або встановіть його розбіжність):

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx \ (a > 0)$;
4) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

5) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;
6) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;
8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;
10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$;

11) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin xdx$;
12) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bxdx$.

7.4. Користуючись ознаками збіжності, дослідіть на збіжність інтеграл:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$;
2) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4+1}dx$;

3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x^{14}dx}{(x^3+x+1)^5}$;
4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^7dx}{(x^3+2x+1)^3}$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^3+1}}$;
6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$;

7) $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\sqrt{x}}dx$;
8) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{x}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$;

9) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln(x^2+5)}{x^2}dx$;
10) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

7.5. Обчисліть невластивий інтеграл або встановіть його розбіжність:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$;

3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$; 4) $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

5) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$;

7) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 8) $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$;

9) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$; 10) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$;

11) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$; 12) $\int\limits_0^\pi \operatorname{tg} x dx$.

7.6. Обчисліть невластивий інтеграл або встановіть його розбіжність:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

3)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$; 4)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\,dx$.

7.7. Користуючись ознаками збіжності, дослідіть на збіжність інтеграл:

1) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$;

7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln(1+x)-x}$. 8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$;

9) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$; 10) $\int\limits_0^1 \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

7.8. З'ясуйте, для яких значень k збігається:

1) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k \ln x}$; 2) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$.

7.9. Швидкість прямолінійного руху матеріальної точки $v(t)$. Знайдіть шлях, який пройде точка від початку руху до повної зупинки, якщо:

1) $v = te^{-0{,}01t}$ м/с; 2) $v = 4te^{-t^2}$ м/с.

Відповіді

7.3. 1) розбігається; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{a}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) розбігається; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{\pi^2}{8}$; 8) розбігається; 9) π; 10) $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$; 11) розбігається; 12) $\frac{a}{a^2+b^2}$, $a>0$, розбігається, $a \le 0$.

7.4. 1) збігається; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) збігається; 5) розбігається; 6) збігається; 7) збігається; 8) розбігається; 7) збігається; 8) розбігається.

7.5. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) 1; 5) π; 6) $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}$; 7) $\frac{8}{3}$; 8) $-\frac{2}{e}$; 9) $\frac{10}{7}$; 10) розбігається; 11) розбігається; 12) розбігається.

7.6. 1) розбігається; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}(3+2\sqrt{3})$.

7.7. 1) збігається; 2) розбігається; 3) збігається; 4) збігається; 5) розбігається; 6) розбігається; 7) збігається; 8) розбігається.

7.9 1) $k>1$; 2) $k>1$. **7.10.** 1) 10^4 м; 2) 2 м.

8. Подвійний інтеграл у декартових координатах

Навчальні задачі

8.1. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^x xydy$, написати рівняння ліній, що обмежують область інтегрування відповідного подвійного інтеграла.

Розв'язання. [10.7.4.]

Область обмежена відрізками прямих $x=1, x=3$ і лініями $y=0$, $y=x$.

$$\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^x xydy = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^x xydy \right) dx \overset{①}{=} \int\limits_1^3 x \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{8}\Bigg|_1^3 = 10.$$

Коментар. ① Повторні інтеграли обчислюють справа на ліво (із середини назовні). Інтегруючи за змінною y, змінну x вважають сталою.

8.2.1. Обчислити $\iint\limits_D dxdy$, де область D обмежена лініями $y^2 = x,\ x = 1.$

Розв'язання. [10.7.4.]

[*Зображуємо область інтегрування і визначаємо у напрямі якої осі область інтегрування є правильною.***]**

Область інтегрування D є правильною в напрямі осі Ox: ①
фігура проектується у відрізок $-1 \le y \le 1$

і обмежена: зліва параболою $x = y^2$, справа прямою $x = 1$.

$$\iint\limits_D dxdy \overset{[10.7.4.1]}{=} \left| \begin{array}{l} -1 \le y \le 1; \\ \text{справа } x = 1, \\ \text{зліва } x = y^2 \end{array} \right| = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (1 - y^2) dy = \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

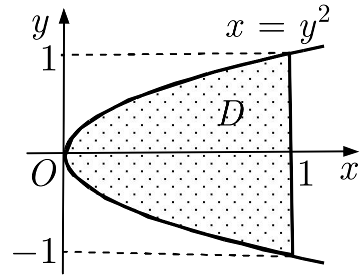


Рис. до зад. 8.2.1

Коментар. ① Область D правильна також і в напрямі осі Oy:
проектується у відрізок $0 \le x \le 1$;

обмежена: знизу параболою $y = -\sqrt{x}$, зверху параболою $y = \sqrt{x}$ (рівняння кривої $y^2 = x$ треба розв'язати щодо y). Отже, інтегрувати можна і в напрямі осі Oy:

$$\iint\limits_D dxdy \overset{[10.7.4.2]}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1; \\ \text{зверху } y = \sqrt{x}, \\ \text{знизу } y = -\sqrt{x} \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy = \frac{4}{3}.$$

8.2.2. Обчислити $\iint\limits_D xdxdy$, де область D обмежена лініями: $xy = 2, y = \dfrac{1}{2}x,$ $y = 2x\ \ (x \ge 0).$

Розв'язання. [10.7.4.]

Оскільки область інтегрування D не є правильною, то зображуємо її як суму правильних областей:

$$D = D_1 \cup D_2.$$

Область D_1 є правильною в напрямі осі Oy:
проектується у відрізок $0 \le x \le 1$

і обмежена: знизу прямою $y = \dfrac{x}{2}$, зверху прямою $y = 2x$.

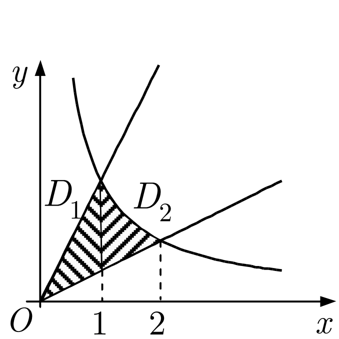


Рис. до зад. 8.2.2

Область D_2 є правильною в напрямі осі Oy:
проектується у відрізок $1 \le x \le 2$
і обмежена: знизу прямою $y = \dfrac{x}{2}$, зверху гіперболою $y = \dfrac{2}{x}$.
За властивістю адитивності

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} x dx dy = \iint\limits_{D_1} x dx dy + \iint\limits_{D_2} x dx dy \overset{[10.7.4.2]}{=}$$

$$= \int\limits_0^1 x dx \int\limits_{x/2}^{2x} dy + \int\limits_1^2 x dx \int\limits_{x/2}^{2/x} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 xy \,\Big|_{x/2}^{2x} \, dx + \int\limits_1^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2} x^3 \,\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

8.3.1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D e^{-y^2} dx dy$, де область D — трикутник з вершинами $O(0;0), A(0;1), B(1;1)$.

Розв'язання. [10.7.4.] ①

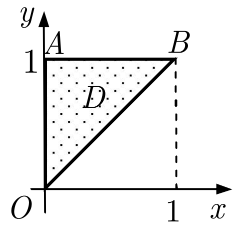


Рис. до зад. 8.3.1

1. Область інтегрування є правильною в напрямі осі Oy:
проектується у відрізок $0 \le x \le 1$;
обмежена знизу прямою $y = x$, зверху прямою $y = 1$.

$$\iint\limits_D e^{-y^2} dx dy \overset{[10.7.4.1]}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1; \\ \text{зверху } y = 1, \\ \text{знизу } y = x \end{array} \right| = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 e^{-y^2} dy.$$

Інтеграл $\int e^{-y^2} dy$ не виражається через елементарні функції.

2. Область інтегрування є правильною в напрямі осі Ox:
проектується у відрізок $0 \le y \le 1$,
обмежена: зліва прямою $x = 0$, справа прямою $x = y$.

$$\iint\limits_D e^{-y^2} dx dy \overset{[10.7.4.2]}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le y \le 1; \\ \text{справа } x = y, \\ \text{зліва } x = 0 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 e^{-y^2} dy \int\limits_0^y dx = \int\limits_0^1 e^{-y^2} y dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 e^{-y^2} d(y^2) = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}.$$

Коментар. ① Вибір напряму інтегрування залежить не тільки від форми області, а й від підінтегральної функції.

8.3.2 Обчислити інтеграл $\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy$, де область D обмежена прямими

$$y = \ln 3,\; y = \ln 4, x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{3}.$$

Розв'язання. [10.7.4.2.]

Область інтегрування D є правильною в напрямах обох осей. Інтегруватимемо у напрямі осі Ox. ①

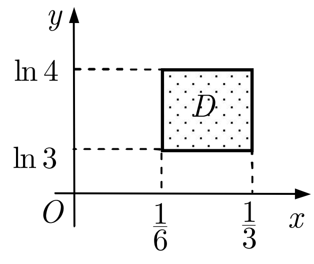


Рис. до зад. 8.3.2

$$\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy \overset{[10.7.4.2]}{=} \left| \begin{array}{l} \ln 3 \le y \le \ln 4; \\ \text{справа } x = \dfrac{1}{3}, \\ \text{зліва } x = \dfrac{1}{6} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{1/6}^{1/3} 12ye^{6xy}dx = 12\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} y\frac{e^{6xy}}{6y}\Bigg|_{1/6}^{1/3} dy =$$

$$= 2\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4}(e^{2y} - e^{y})dy = 2\left(\frac{e^{2y}}{2} - e^{y}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{\ln 4} = 2\left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2} - 4 + 3\right) = 5.$$

Коментар. ① Інтегрування вздовж осі Oy призвело б до інтегрування частинами у внутрішньому інтегралі.

8.4. Змінити порядок інтегрування

$$I = \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Розв'язання. [10.7.4.]

[*Записуємо рівняння ліній, які обмежують область D і відновлюємо область інтегрування.*]

З першого доданку:

$$-2 \le x \le -\sqrt{3}; y = 0, y = \sqrt{4 - x^2}.$$

З другого доданку:

$$-\sqrt{3} \le x \le 0; y = 0, y = 2 - \sqrt{4 - x^2}.$$

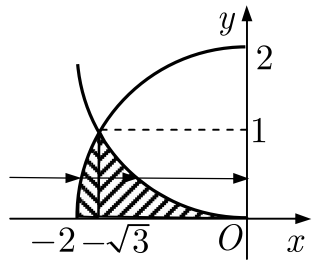


Рис. до зад. 8.4

Точка $(-\sqrt{3};1)$ є точкою перетину кіл.

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Область D є правильною в напрямі осі Ox і проектується у відрізок $0 \le y \le 1$.

[*Розв'язуємо рівняння кіл щодо x.*]

$$y = \sqrt{4 - x^2} \overset{①}{\Rightarrow} x = -\sqrt{4 - y^2};$$

$$y = 2 - \sqrt{4 - x^2} \overset{①}{\Rightarrow} x = -\sqrt{4y - y^2}.$$

Область D обмежена:

зліва дугою кола $x = -\sqrt{4 - y^2}$, справа дугою кола $x = -\sqrt{4y - y^2}$.

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx.$$

Коментар. ① Корені беремо зі знаком мінус тому, що всі точки області D мають недодатні абсциси.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

8.5. Обчисліть повторний інтеграл і відновіть область інтегрування:

1) $\int_0^4 dx \int_0^1 (x + 3y^2)dy$; 2) $\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 2y)dy$;

3) $\int_1^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} xydy$; 4) $\int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy$;

5) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho$; 6) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} \rho^2 \sin^2\varphi d\rho$.

8.6. 1. За якою змінною взято зовнішній інтеграл у повторному інтегралі $\int_1^2 \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} f(x,y)dydx$ і яка область інтегрування?

2. Після витирання з дошки залишилось не витертим $\int_{-y}^{\sqrt{y}}$. Який це інтеграл: внутрішній чи зовнішній? За якою змінною він узятий? Що можна зауважити про область інтегрування?

8.7. Розставте межі інтегрування в $\iint_D f(x,y)dxdy$, якщо область:

1) D — прямокутник з вершинами $O(0;0), A(2;0), B(2;1), C(0;1)$;

2) D — прямокутник з вершинами $A(-3;0), B(-3;2), C(0;2), O(0;0)$;

3) D — трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(1;1)$;

4) D — трикутник зі сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 5$;

5) D — паралелограм з вершинами $A(1;2), B(2;4), C(2;7), D(1;5)$;

6) D — паралелограм зі сторонами $y = x, y = x - 4, y = 0, y = 2$;

7) D — фігура, обмежена лініями $y = x^2, x + y = 2$;

8) D — фігура, обмежена лініями $y = x^2, y = 4$;

9) D — фігура, обмежена лініями $x = \sqrt{4 - y^2}, x = \sqrt{4y - y^2}, y = 2$;

10) D — фігура, обмежена лініями $x = 0, x = 1, x = y^2, y = e^x$.

8.8. Змініть порядок інтегрування:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dx;$

2) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\log_3 y} f(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)dx;$

3) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{x/2} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-3}}^{x/2} f(x,y)dy;$

4) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_0^{(x+2)/2} f(x,y)dy + \int\limits_2^{10/3} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{(x+2)/2} f(x,y)dy;$

5) $\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{R/\sqrt{2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy;$

6) $\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{0} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

8.9. Обчисліть подвійний інтеграл:

1) $\iint\limits_D xydxdy, D$ — трикутник з вершинами $O(0;0), A(0;1), B(1;0)$;

2) $\iint\limits_D ydxdy, D$ — трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;2), B(2;1)$;

3) $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy,\ D$ — область, обмежена параболами $y = x^2,\ y^2 = x$;

4) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy,\ D$ — область, обмежена прямими $x = 2, y = x$ і гіперболою $xy = 1$;

5) $\iint\limits_D e^{x/y}dxdy$, D — область, обмежена лініями $x = y^2, x = 0, y = 1$;

6) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{ax - x^2}}$, D — область, обмежена лініями $x = 0, y^2 = a^2 - ax$;

7) $\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$, D — область, обмежена лініями $y = 0, y = x, x = 1$;

8) $\iint\limits_D \sin(x^3 - 1)dxdy$, D — область, обмежена лініями $y = 0, y = x^2$, $x = 1$.

8.10. Оцініть:

1) $I_1 = \iint\limits_D (x + y + 1)dxdy$, де D — круг $x^2 + y^2 \le 4$;

2) $I_2 = \iint\limits_D (x^2 - y^2)dxdy$, де D — круг $x^2 + y^2 \le 2x$.

Відповіді

8.5. 1) 12; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{15}{4}$; 4) $\frac{9}{4}$; 5) $\frac{3\pi}{2}$; 6) $\frac{12}{5}$.

8.6. 1. За змінною x; область інтегрування обмежена лініями $y = -\sqrt{x}, y = x^3, x = 1$, $x = 2$. 2. Це внутрішній інтеграл узятий за змінною x. Область інтегрування правильна у напрямі осі Ox.

8.7. 1) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2 f(x,y)dx = \int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-3}^0 f(x,y)dx = \int\limits_{-3}^0 dx\int\limits_0^2 f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)dx = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy$; 4) $\int\limits_0^5 dx\int\limits_0^{5-x} f(x,y)dy = \int\limits_0^5 dy\int\limits_0^{5-y} f(x,y)dx$;

5) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2x}^{2x+3} f(x,y)dy$; 6) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_y^{y+4} f(x,y)dx$; 7) $\int\limits_{-2}^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$;

8) $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_{x^2}^4 f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dy$; 9) $\int\limits_1^2 dy\int\limits_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx$; 10) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{e^x} f(x,y)dy$.

8.8. 1) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x/2}^{2x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{3^x}^{4-x} f(x,y)dy$; 3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y}^{\sqrt{y^2+3}} f(x,y)dx$; 4) $\int\limits_0^{8/3} dy\int\limits_{2y-2}^{\sqrt{y^2+4}} f(x,y)dx$;

5) $\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dy\int\limits_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$; 6) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dx\int\limits_{-x}^x f(x,y)dy + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

8.9. 1) $\dfrac{1}{24}$; 2) $\dfrac{3}{2}$; 3) $\dfrac{33}{140}$; 4) $\dfrac{9}{4}$; 5) $\dfrac{1}{2}$; 6) $4a$; 7) $\dfrac{e-1}{2}$; 8) $\dfrac{\cos 1 - 1}{3}$.

8.10. 1) $(-2\sqrt{2}+1)4\pi \le I_1 \le (2\sqrt{2}+1)4\pi$; 2) $-\dfrac{\pi}{2} \le I_2 \le 4\pi$.

9. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Навчальні задачі

9.1. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$ де область D обмежена лініями $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1, x=0, y=0,$ виконати заміну змінних за формулами: $x=au\cos^4 v,\ y=bu\sin^4 v\,.$

Розв'язання. [10.7.5.1.]

Для взаємно однозначності вимагаймо, щоб $v\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Рівняння ліній перейдуть відповідно в рівняння:

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1 \Rightarrow u=1;$$

$$x=0 \Rightarrow u=0 \text{ або } v=\frac{\pi}{2};$$

$$y=0 \Rightarrow u=0 \text{ або } v=0.$$

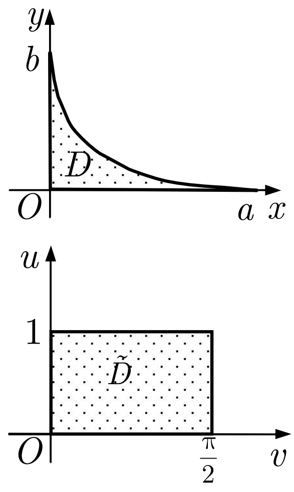


Рис. до зад. 9.1

[*Зображуємо стару і нову області інтегрування.*]

[*Обчислюємо якобіан переходу від змінних (x,y) до змінних (u,v).*]

$$J \overset{[10.7.5.1]}{=} \begin{vmatrix} a\cos^4 v & -4au\cos^3 v\sin v \\ b\sin^4 v & 4bu\sin^3 v\cos v \end{vmatrix} =$$

$$=4abu\sin^3 v\cos^5 v+4abu\cos^3 v\sin^5 v=$$

$$=4abu\sin^3 v\cos^3 v.$$

[*Заміняємо змінні в подвійному інтегралі.*]

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{[10.7.5.1]}{=} \iint\limits_{\tilde{D}} f(x(u,v),y(u,v))\big|J(u,v)\big|dudv=$$

$$=4ab\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 v\cos^3 v\,dv\int\limits_0^1 f(au\cos^4 v, bu\sin^4 v)udu.$$

9.2.1. Обчислити $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, де область D обмежена колами $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x$ і прямими $y=x, y=2x$.

Розв'язання. [10.7.5.2, 10.7.6.]

[*Побудуймо область D.***]**

$$x^2+y^2=4x \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4,$$
$$x^2+y^2=8x \Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=16.$$

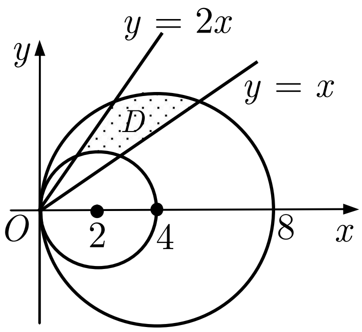


Рис. до зад. 9.2

[*Вибираємо систему координат, у якій обчислюватимемо інтеграл.*① **]**

Інтеграл обчислимо в полярних координатах:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \quad x^2+y^2=\rho^2, \varphi\in(-\pi;\pi]. \\ \left|J\right|=\rho; \end{cases}$$

[*Записуємо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування, в полярних координатах.***]**

$$x^2+y^2=4x;\ \ \rho^2=4\rho\cos\varphi;\ \ \rho=4\cos\varphi.$$
$$x^2+y^2=8x;\ \ \rho^2=8\rho\cos\varphi;\ \ \rho=8\cos\varphi.$$
$$y=x;\ \ \rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi;\ \begin{cases}\operatorname{tg}\varphi=1, \\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\end{cases}\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$
$$y=2x;\ \ \rho\sin\varphi=2\rho\cos\varphi;\ \begin{cases}\operatorname{tg}\varphi=2, \\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\end{cases}\ \varphi=\operatorname{arctg}2.$$

[*Записуємо подвійний інтеграл у полярних координатах.***]**

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} \overset{[10.7.5.2]}{=} \iint\limits_{\tilde D}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^4}=\iint\limits_{\tilde D}\frac{d\rho d\varphi}{\rho^3}=$$
$$=\left|\begin{aligned}&\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\operatorname{arctg}2,\\ &4\cos\varphi\le\rho\le 8\cos\varphi\end{aligned}\right| \overset{[10.7.6]}{=} \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\frac{d\rho}{\rho^3}=$$
$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2}\frac{1}{\rho^2}\Bigg|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}d\varphi=\frac{3}{128}\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{3}{128}\operatorname{tg}\varphi\Bigg|_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2}=\frac{3}{128}.$$

Коментар. ① Змінюючи систему координат чи залишаючись у декартовій, зважаємо на таке:

1) правильна чи неправильна щодо якоїсь з осей область у декартових координатах (якщо неправильна, то на скільки правильних областей її треба розбити);
2) чи спрощує відповідним чином підібрана заміна змінних область інтегрування (скажімо, вона стає правильною) і підінтегральну функцію.
До **полярних** координат [10.1.1] доцільно переходити, якщо:
1) областю інтегрування є круг (кругове кільце) або круговий сектор;
2) підінтегральна функція залежить від $x^2 + y^2$ (у разі переходу до полярних координат $x^2 + y^2 = \rho^2$).

9.2.2. Обчислити $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{9 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy.$

Розв'язання. [10.7.5.3] ①
Переходимо до узагальненої полярної системи координат:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ \left|J\right| = ab\rho; \end{cases} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2, \varphi \in (-\pi; \pi].$$

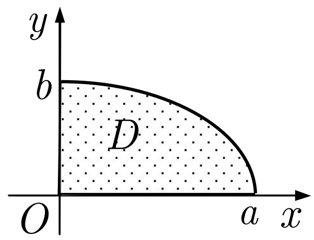


Рис. до зад. 9.3

[*Записуємо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування, в узагальнених полярних координатах.*]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ \rho^2 = 1;\ \rho = 1;$$

$$0 \le x \le a;\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{9 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy = \iint\limits_D \sqrt{9 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy \overset{[10.7.5.3]}{=}$$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} \sqrt{9-\rho^2} ab\rho\, d\varphi d\rho = ab\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{9-\rho^2}\rho d\rho \overset{②}{=}$$

$$= -\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{9-\rho^2} d\left(9-\rho^2\right) =$$

$$= -\frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3}(9-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi ab}{6}\left(27 - 16\sqrt{2}\right).$$

Коментар. ① До **узагальнених полярних** координат [10.1.2] доцільно переходити, якщо:

1) область інтегрування обмежена еліпсами (еліпсом) $\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1;$

2) підінтегральна функція залежить від $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ (за такого переходу $\left.\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\rho^2\right)$.

Оскільки область інтегрування D еліптичний сектор, то переходимо до узагальненої полярної системи координат.

② Такі повторні інтеграли (сталі межі інтегрування в обох інтегралах і підінтегральна функція кожного інтеграла залежить лише від однієї змінної) можна обчислювати незалежно.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

9.3. Розставте межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, перейшовши до полярних координат, якщо:

1) D — частина круга $x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0$;

2) D — частина круга $x^2+y^2\le 9, x\le 0, y\ge 0$;

3) D — круг $x^2+y^2\le ax, a\ge 0$; 4) D — круг $x^2+y^2\le by, b\ge 0$;

5) D — область, обмежена колами $x^2+y^2=4y, x^2+y^2=8y$ і прямими $y=x, y=2x$;

6) D — область, обмежена колами $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x$ і прямими $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x$.

9.4.* 1. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями $xy=2$, $xy=1, y=3x, y=4x$, замінити змінні за формулами: $xy=u, y=vx$.

2. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями $x^2=ay$, $x^2=by, y^2=px, y^2=qx$ $(0<a<b, 0<p<q)$, замінити змінні за формулами: $x^2=uy, y^2=vx$.

9.5. Обчисліть подвійні інтеграли, перейшовши до інших координат:

1) $\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy$; 2) $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$;

3) $\iint\limits_D (h-2x-3y)dxdy, D$ — круг $x^2+y^2\le R^2$;

4) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, D$ — круг $x^2+y^2\le 16$;

5) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dxdy,\quad D$ — частина кільця $x^2+y^2\ge 1, x^2+y^2\le 4$, $\dfrac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\sqrt{3}$;

6) $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D$ — кільце $\dfrac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le 4\pi^2$;

7) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy,\ D$ — круг $x^2+y^2\le Rx$;

8) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ D$ — круг $x^2+y^2\le Ry$;

9) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,\ D$ — область, обмежена пелюсткою лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(x\ge 0)$;

10) $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D$ — область, обмежена пелюсткою лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(x\ge 0)$;

11) $\iint\limits_D (x^2+y^2)^4dxdy, D$ — круг $x^2+y^2=2Rx$;

12) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy, D$ — область, обмежена лініями $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax, y=0\ (y>0)$.

13) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}, D$ — область, обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

14) $\iint\limits_D \sqrt{16-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}dxdy, D$ — область, обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Відповіді

9.3. 1) $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 2) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{3} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;

3) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 4) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;

5) $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.

9.4. 1. $\frac{1}{2}\int\limits_3^4 \frac{dv}{v}\int\limits_1^2 f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) du$. 2. $\frac{1}{3}\int\limits_a^b du \int\limits_p^q f\left(\sqrt[3]{u^2 v}, \sqrt[3]{uv^2}\right) dv$.

9.5. 1) $\frac{\pi}{4}\Big((1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\Big)$; 2) $\frac{\pi}{4}(e^{a^2}-1)$; 3) $\pi R^2 h$; 4) 4π; 5) $\frac{\pi^2}{16}$; 6) $2\pi - \pi^2$; 7) $\frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$; 8) $\pi R - 2R$; 9) $\frac{a^3(3\pi + 20 - 16\sqrt{2}}{18}$; 10) $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$; 11) $\frac{126}{5}\pi R^{10}$; 12) $\frac{45}{64}\pi a^4$; 13) 12π; 14) $4\pi(64 - 15\sqrt{15})$.

10. Застосування подвійного інтеграла

Навчальні задачі

10.1.1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 12$, $x\sqrt{6} = y^2$ $(x \geq 0)$.

Розв'язання. [10.8.1.]

[*Записуємо формулу, виходячи із шуканого застосування інтеграла.***]**

Площу плоскої області D знаходять за формулою

$$S(D) \overset{[10.8.1]}{=} \iint\limits_D dxdy.$$

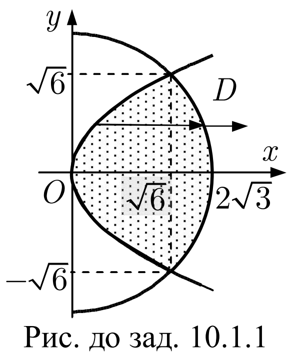


Рис. до зад. 10.1.1

Область D є правильною в напрямі осі Ox

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ x\sqrt{6} = y^2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2\sqrt{6}, x_2 = \sqrt{6}.$$

але $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{6}$, а отже $y_1 = -\sqrt{6}$, $y_2 = \sqrt{6}$.

Область D проектується на вісь Oy у відрізок $-\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}$,

і обмежена: зліва параболою $x = \frac{1}{\sqrt{6}}y^2$, справа дугою кола $x = \sqrt{12 - y^2}$.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{y^2/\sqrt{6}}^{\sqrt{12-y^2}} dx = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}} \right) dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{6}} \sqrt{12-y^2}dy - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{6}} = \left| \begin{matrix} y = 2\sqrt{3}\sin t, \\ dy = 2\sqrt{3}\cos t dt. \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c|c} y & 0 & \sqrt{6} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{4} \end{array} \right\| =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{12 - 12\sin^2 t}\, 2\sqrt{3}\cos t dt - 4 = 24\int\limits_0^{\pi/4} \cos^2 t dt - 4 =$$

$$= 12\int\limits_0^{\pi/4} (1+\cos 2t)dt - 4 = 12\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\pi/4} - 4 = 3\pi + 2.$$

10.1.2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0,\ x = \sqrt{3}y, x = 0.$

Розв'язання. [10.8.1.]

Площу плоскої області D знаходять за формулою

$$S(D) \overset{[10.8.1]}{=} \iint\limits_D dxdy.$$

Область D обмежена колами

$$(y-4)^2 + x^2 = 16, (y-2)^2 + x^2 = 4,$$

і прямими $x = 0,\ x = \sqrt{3}y.$

Виходячи з форми області D, доцільно перейти до полярних координат [10.7.5.2]:

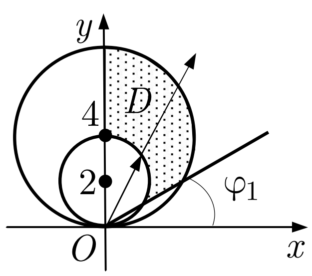


Рис. до зад. 10.1.2

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2, \varphi \in (-\pi;\pi]. \\ \left|J\right| = \rho; \end{cases}$$

$$y^2 - 4y + x^2 = 0;\ \rho^2 - 4\rho\sin\varphi = 0;\ \rho = 4\sin\varphi.$$

$$y^2 - 8y + x^2 = 0;\ \rho = 8\sin\varphi$$

$$\rho\sin\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi \in [0;\pi];\ \varphi_1 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\rho\cos\varphi = 0; \cos\varphi = 0, \varphi \in [0;\pi];\ \ \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$S = \iint_D dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=} \iint_{\tilde{D}} \rho d\varphi d\rho = \left| \begin{matrix} \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; \\ 4\sin\varphi \le \rho \le 8\sin\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \rho d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2} \Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} d\varphi = 24\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 12\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(1 - \cos 2\varphi\right) d\varphi = 12\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = 4\pi + 3\sqrt{3}.$$

10.2.1. Знайти масу пластинки D, яка обмежена лініями $2y = x^2$, $x + y = 4$, з густиною розподілу маси $\mu(x, y) = 2$.

Розв'язання. [10.8.2.]

Масу пластинки D з густиною $\mu(x, y)$ знаходять за формулою

$$m(D) \overset{[10.8.2]}{=} \iint_D \mu(x, y) dxdy = \iint_D 2dxdy.$$

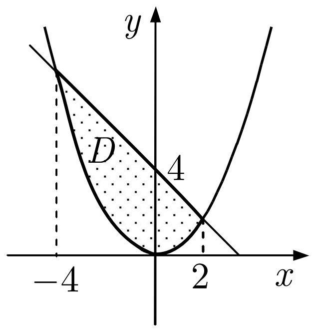


Рис. до зад. 10.2.1

Область D правильна в напрямі осі Oy.
Залишаємось у декартових координатах.
[*Щоб визначити межі інтегрування знайдемо абсциси точок перетину параболи з прямою.*]

$$\begin{cases} 2y = x^2, \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = -4, \\ x_2 = 2. \end{matrix} \right.$$

$$m = 2\iint_D dxdy = \left| \begin{matrix} -4 \le x \le 2, \\ \text{зверху } y = 4 - x, \\ \text{знизу } y = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = 2\int_{-4}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy =$$

$$= 2\int_{-4}^{2} \left(4 - x - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-4}^{2} = 36.$$

10.2.2. Знайти масу пластинки D, яку задано нерівностями $y \ge \frac{x}{4} \ge 0$,

$1 \le \frac{x^2}{16} + y^2 \le 3$, з густиною розподілу маси $\mu(x, y) = \frac{x}{y^5}$.

Розв'язання. [10.8.2.]

Масу пластинки D з густиною $\mu(x,y)$ знаходять за формулою

$$m(D) \overset{[10.8.2]}{=} \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy = \iint\limits_D \frac{x}{y^5}\,dxdy.$$

Виходячи з форми пластинки доцільно перейти до узагальнених полярних координат [10.7.3]:

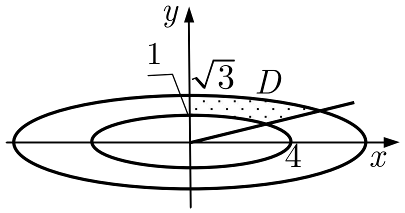


Рис. до зад. 10.2.2

$$\begin{cases} x = 4\rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ \left|J\right| = 4\rho. \end{cases}$$

$$1 \le \rho^2 \le 3;\ 1 \le \rho \le \sqrt{3}.$$

$$4\rho\sin\varphi \ge 4\rho\cos\varphi \ge 0;\ \operatorname{tg}\varphi \ge 1;\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$m = \iint\limits_D \frac{x}{y^5}dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} \frac{4\cos\varphi}{\rho^4\sin^5\varphi}4\rho d\rho d\varphi = 16\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{d\rho}{\rho^3} = 4.$$

10.3. Знайти координати центра маси однорідної матеріальної пластини, обмеженої кривими $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$.

Розв'язання. [10.8.4]

Пластина однорідна, тому $\mu(x,y) = \mu_0 = \mathrm{const}$.

Пластина симетрична відносно осі Ox, тому $y_C = 0$.

Абсцису центра маси шукають за формулою

$$x_C = \frac{M_y}{m},$$

де $M_y = \frac{1}{m}\iint\limits_D \mu_0 xdxdy;\quad m = \iint\limits_D \mu_0 dxdy.$

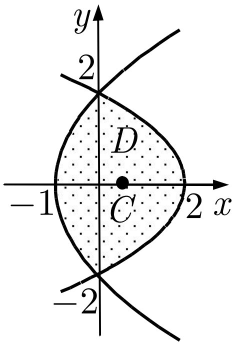


Рис. до зад. 10.3

$$M_y = \iint\limits_D x\mu_0 dxdy = \mu_0\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}\left(4-y^2\right)^2 - \frac{1}{16}\left(y^2-4\right)^2\right)dy =$$

$$= \frac{3}{16}\mu_0\int\limits_0^2\left(16-8y^2+y^4\right)dy = \frac{3}{16}\mu_0\left(16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{5}\mu_0.$$

$$m = \iint_D \mu_0 dxdy = \mu_0 \int_{-2}^{2} dy \int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} dx = \mu_0 \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}\left(4 - y^2\right) - \frac{1}{4}\left(y^2 - 4\right) \right) dy =$$

$$= 2\mu_0 \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{4} y^2 \right) dy = 2\left(3y - \frac{y^3}{4} \right)\Bigg|_0^2 = 8\mu_0.$$

$$x_c = \frac{16\mu_0}{5} \cdot \frac{1}{8\mu_0} = \frac{2}{5}.$$

Центр маси даної пластини міститься в точці $C\left(\frac{2}{5}; 0\right)$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

10.4. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями:

1) $y^2 = 2x, y = x$; 2) $y = x^2, y = 2x - x^2$;

3) $x = 0, y = x, y = 2 - x^2\ (x \geq 0)$; 4) $x^2 + y^2 = 4, y^2 = 4 - 4x, x < 1$;

5) $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = x, y = 0$;

6) $x^2 + y^2 = 3y, x^2 + y^2 = 5y, y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}, x = 0$;

7) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, x^2 + y^2 - \sqrt{2}x = 0$;

8) $\rho = a(1 + \cos\varphi), \rho = a\cos\varphi\ (a > 0)$;

9) $\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ (лемніската);

10) $\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}\right)^2 = 4xy$ (лемніската);

11) $x^2 = 3y, x^2 = 4y, y^2 = x, y^2 = 2x$;

12) $y^2 = ax, y^2 = bx, xy = \alpha, xy = \beta\ (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$.

10.5. Знайдіть масу пластини D з густиною $\mu(x, y)$:

1) $D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16, x \leq 0,\ y \geq 0, \mu(x, y) = \dfrac{y - x}{x^2 + y^2}$;

2) $D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, x \geq 0,\ y \geq 0, \mu(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

3) $D: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\ (x \geq 0),\ \mu(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$;

4) $D: (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)\ (x \geq 0, y \geq 0),\ \mu(x, y) = x^2 + y^2$;

5) $D: x^2+y^2=ax, x^2+y^2=2ax, y\ge 0, \mu(x,y)=x^2+y^2$;

6) $D: 1\le \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}\le 2, x\ge 0, x\le \dfrac{4}{3}y, \mu(x,y)=\dfrac{27x}{y^5}$.

10.6. Для пластинки D з густиною $\mu(x,y)$ знайдіть: а) масу; б) координати центру мас; в) моменти інерції щодо осей Ox та Oy, якщо:

1) $D: x^2+y^2\le 2ax, \mu(x,y)=\mu_0\sqrt{x^2+y^2}$;

2) $D: x+y\ge a, a\ge x\ge 0, a\ge y\ge 0, \mu(x,y)=x$.

Відповіді

10.4. 1) $\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{7}{6}$; 4) $\dfrac{6\pi+8}{3}$; 5) $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3}{2}$; 6) $\dfrac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$; 7) $\dfrac{\pi-1}{2}$; 8) $\dfrac{5}{4}\pi a^2$; 9) 6; 10) 72; 11) $\dfrac{1}{3}$; 12) $\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)\ln\dfrac{b}{a}$.

10.5. 1) 4; 2) 4; 3) $\dfrac{2\sqrt{2}}{15}a^4$; 4) $\dfrac{81\pi}{32}$; 5) $\dfrac{45}{64}\pi a^4$; 6) 1.

10.6. 1) а) $\dfrac{32}{9}a^3\mu_0$; б) $x_C=\dfrac{6}{5}a, y_C=0$; в) $I_{xx}=\dfrac{512}{525}a^5\mu_0, I_{yy}=\dfrac{1024}{175}a^5\mu_0$;
2) а) $\dfrac{a^3}{3}$; б) $x_C=\dfrac{3a}{4}, y_C=\dfrac{5a}{8}$; в) $I_{xx}=\dfrac{3a^5}{20}, I_{yy}=\dfrac{a^5}{5}$.

11. Потрійний інтеграл

Навчальні задачі

11.1. Обчислити $I=\iiint\limits_G z\,dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями:

$z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x,y,z=0.$

Розв'язання. [10.9.4.]

Область інтегрування G є циліндричною в напрямі осі Oz. Вона обмежена: знизу площиною $z=0$, зверху — параболоїдом $z=x^2+y^2$. Проектуємо тіло на площину Oxy.

$$\iiint\limits_G z\,dxdydz \overset{[10.9.4]}{=} \left|\begin{matrix}\text{зверху } z=x^2+y^2,\\ \text{знизу } z=0\end{matrix}\right| = \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy\int\limits_0^{x^2+y^2} z\,dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{Oxy}} \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{x^2+y^2} dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{Oxy}} (x^2+y^2)^2 dxdy \overset{①}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1, \\ \text{зверху } y = 1-x, \\ \text{знизу } y = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^4 y + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{y^5}{5} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^4(1-x) + \frac{2}{3}x^2(1-x)^3 + \frac{(1-x)^5}{5} \right) dx = \frac{7}{180}.$$

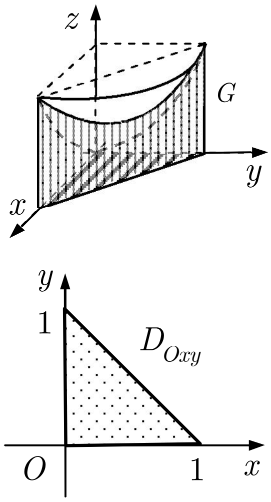


Рис. до зад. 11.1

Коментар. ① Оскільки область D_{Oxy} є трикутником, залишаємось у декартовій системі координат. Вибираємо інтегрування вздовж осі Oy (область правильна в обох напрямах.)

11.2. Обчислити $\iiint\limits_{V:x^2+y^2+z^2 \le z} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz.$

Розв'язання. [10.9.8.]

Оскільки область є кулею, обмеженою сферою

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

то інтеграл зручніше обчислювати у сферичній системі координат [10.1.5]:

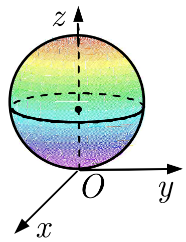


Рис. до зад. 11.2

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \\ |J| = r^2\sin\theta; \end{cases} \quad \begin{array}{c} r \ge 0, \\ \varphi \in (-\pi;\pi], \theta \in [0;\pi], \\ x^2+y^2+z^2 = r^2. \end{array}$$

[*Записуємо рівняння поверхонь у сферичній системі координат.*]

$$x^2+y^2+z^2 = z;\ r^2 = r\cos\theta;\ r = \cos\theta.$$

$$r = \cos\theta \ge 0;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

$$-\pi \le \varphi \le \pi.$$

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz \overset{[10.9.8]}{=} \iiint\limits_{\tilde{G}} r^3 \sin\theta\, dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 d\rho = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\theta\sin\theta d\theta = -\frac{\pi}{2}\frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}.$$

Коментар. ① Від декартових до сферичних координат [10.1.5] у потрійних інтегралів доцільно переходити для областей, обмежених сферами, конусами та площинами, які проходять через вісь Oz.

11.3.1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}$, $z = 0, x + z = 2$.

Розв'язання. [10.10.1.]

Об'єм тіла G знаходять за формулою

$$V(G) \overset{[10.10.1]}{=} \iiint\limits_G dxdydz.$$

Тіло G① — циліндричне в напрямі осі Oz; на площину Oxy воно проектується в область D_{Oxy}, яка є правильною у напрямі осі Oy.

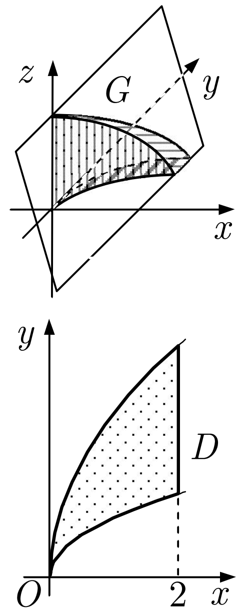


Рис. до зад. 11.3.1

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \left|\begin{matrix} 0 \le x \le 2, \\ \sqrt{2x} \le y \le 16\sqrt{2x}, \\ 0 \le z \le 2 - x \end{matrix}\right| \overset{[10.9.5]}{=}$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{16\sqrt{2x}} dy \int\limits_0^{2-x} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{16\sqrt{2x}} (2-x)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 (2-x)15\sqrt{2x}dx = 15\sqrt{2}\left(2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 15\sqrt{2}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{5}\right) = 32.$$

Коментар. ① Тіло G обмежено поверхнями: параболічними циліндрами $y = 16\sqrt{2x}$, $y = \sqrt{2x}$, твірні яких паралельні осі Oz; площиною $Oxy : z = 0$, площиною $x + z = 2$, яка паралельна осі Oy.

11.3.2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $2z = x^2 + y^2, z = 2$.

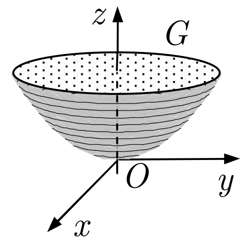
Розв'язання. [10.10.1.]

Об'єм тіла G знаходять за формулою

$$V(G) \overset{[10.10.1]}{=} \iiint\limits_G dxdydz.$$

Тіло G① циліндричне в напрямі осі Oz і проектується на площину Oxy в область D_{Oxy}, обмежену колом:

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2, \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$



$$V = \iiint\limits_{G} dxdydz \overset{[10.9.4]}{=} \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{2} dz = \\ = \iint\limits_{D_{Oxy}} \left(2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy.$$

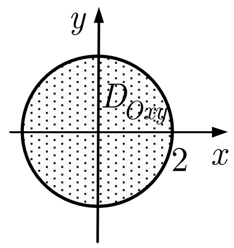


Рис. до зад. 11.3.2

У подвійному інтегралі переходимо до полярних координат [10.1.1]:

$$x^2 + y^2 = 4; \;\; \rho^2 = 4; \;\; \rho = 2;$$
$$0 \le \rho \le 2; \;\; -\pi \le \varphi \le \pi.$$

$$V \overset{[10.7.5.2]}{=} \iint\limits_{\Delta} \rho \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\varphi d\rho = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \rho \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = 4\pi.$$

Коментар. ① Тіло G обмежено поверхнями: параболоїдом $2z = x^2 + y^2$ і площиною $z - 2 = 0$.

11.3.3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 4x, z = x$, $z = 2x$.

Розв'язання. [10.10.1.]①

Об'єм тіла G знаходять за формулою

$$V(G) = \iiint\limits_{G} dxdydz.$$

Тіло циліндричне в напрямі осі Oz. Проекція D тіла на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 \le 4x$.

Обчислимо інтеграл у циліндричній системі координат [10.1.3]②:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \\ y = \rho\sin\varphi, & \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2} \\ z = z, & \rho \ge 0, \varphi \in (-\pi; \pi] \\ \left|J\right| = \rho; & \end{cases}$$

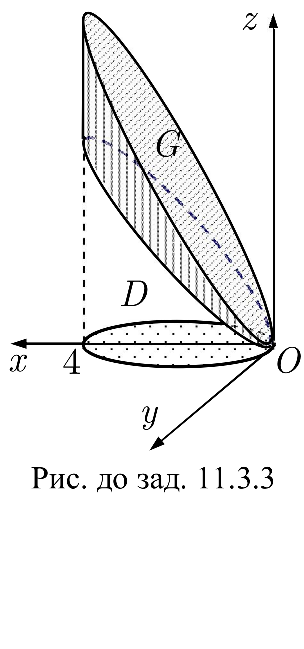


Рис. до зад. 11.3.3

[*Записуємо рівняння поверхонь у циліндричних координатах.*]

$$x^2 + y^2 = 4x;\ \ \rho^2 = 4\rho\cos\varphi;\ \ \rho = 4\cos\varphi.$$
$$z = x;\ \ z = \rho\cos\varphi;$$
$$z = 2x;\ z = 2\rho\cos\varphi;$$
$$\rho(\varphi) = 4\cos\varphi \ge 0;\ \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$
$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz \overset{[10.9.6]}{=} \iiint\limits_{\tilde G} \rho d\varphi d\rho dz =$$
$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho d\rho \int\limits_{\rho\cos\varphi}^{2\rho\cos\varphi} dz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho z \,\Big|_{\rho\cos\varphi}^{2\rho\cos\varphi} d\rho =$$
$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho^2\cos\varphi d\rho = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{4\cos\varphi} d\varphi =$$
$$= \frac{64}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi \overset{[10.4.4]}{=} \frac{128}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi \overset{[10.4.7]}{=} \frac{128}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = 8\pi.$$

Коментар. ① Тіло G обмежене коловим циліндром $x^2 + y^2 = 4x$ і площинами $z = x$ і $z = 2x$.
② Від декартових до циліндричних координат [10.1.3] у потрійних інтегралах доцільно переходити для областей з осьовою симетрією.

11.3.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \ge 2Rz$.

Розв'язання. [10.10.1.]

Об'єм тіла G знаходять за формулою
$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.$$
Тіло G обмежено сферами:
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$$
і міститься ззовні сфери з центром у точці O.

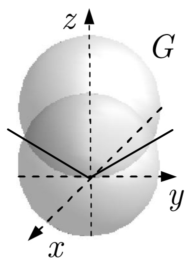


Рис. до зад. 11.3.4

Переходимо до сферичних координат [10.1.5]:
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\ r^2 = R^2;\ r = R;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz;\ \ r^2 = 2Rr\cos\theta;\ \ r = 2R\cos\theta.$$
$$\begin{cases} r = R, \\ r = 2R\cos\theta; \end{cases} \cos\theta = \frac{1}{2};\ \ \theta = \frac{\pi}{3}.$$
$$-\pi \le \varphi \le \pi.$$

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz \overset{[10.9.8]}{=} \iiint\limits_{\tilde G} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \int\limits_R^{2R\cos\theta} r^2 dr = 2\pi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_R^{2R\cos\theta} d\theta =$$

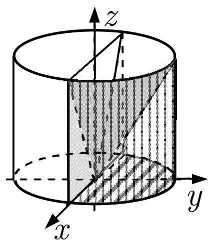
$$= \frac{2\pi R^3}{3} \int\limits_0^{\pi/3} (8\cos^3\theta - 1)\sin\theta d\theta = \frac{11\pi R^3}{12}.$$

11.4. Знайти масу тіла G, заданого нерівностями $\frac{z^2}{64} \le x^2 + y^2 \le 4,\ y, z \ge 0,$ з густиною розподілу маси $\mu(x,y,z) = \frac{5(x^2+y^2)}{4}.$

Розв'язання. [10.10.2.]

Масу тіла G з густиною $\mu(x,y,z)$ знаходять за формулою

$$m(G) \overset{[10.10.2]}{=} \iiint\limits_G \mu(x,y,z) dxdydz = \iiint\limits_G \frac{5(x^2+y^2)}{4} dxdydz.$$



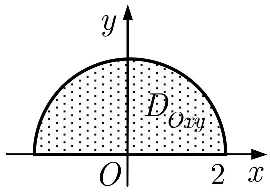


Рис. до зад. 11.4

Тіло G① — циліндричне в напрямі осі Oz.
Обмежене: знизу площиною $z = 0$, зверху — конусом $z = 8\sqrt{x^2+y^2}$; і проектується на площину Oxy у півкруг.

$$m(G) = \iiint\limits_G \frac{5(x^2+y^2)}{4} dxdydz \overset{[10.9.4]}{=}$$

$$= \frac{5}{4} \iint\limits_{D_{Oxy}} (x^2+y^2) dxdy \int\limits_0^{8\sqrt{x^2+y^2}} dz =$$

$$= 10 \iint\limits_{D_{Oxy}} (x^2+y^2)^{3/2} dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=} 10 \iint\limits_{\Delta} \rho^4 d\varphi d\rho =$$

$$= 10 \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^4 d\rho = 10\varphi \,\Big|_0^{\pi} \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^2 = 10\pi \cdot \frac{32}{5} = 64\pi.$$

Коментар. ① Тіло G обмежують поверхні: конус $z^2 = 64(x^2+y^2)$ $(z \ge 0)$; циліндр $x^2 + y^2 = 4$ і площини Oxz $(y = 0)$ та Oxy $(z = 0)$.

11.5. Знайти координати центра мас тіла G, заданого нерівностями $\dfrac{x}{6} \le y^2 + z^2 \le 3, x \ge 0,$ з густиною розподілу маси $\mu(x,y,z) = \mu_0$.

Розв'язання. [10.10.4.]

Оскільки вісь Ox є віссю симетрії тіла, то

$$y_C = z_C = 0.$$

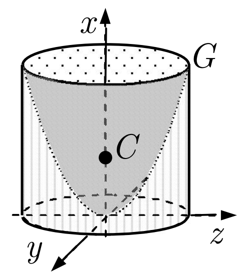
Абсцису x_C центра мас тіла знаходять за формулою

$$x_c \overset{[10.10.4]}{=} \frac{M_{Oyz}}{m},$$

де

$$M_{Oyz} \overset{[10.10.3]}{=} \iiint\limits_G x\mu(x,y,z)dxdydz;$$

$$m \overset{[10.10.2]}{=} \iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz.$$



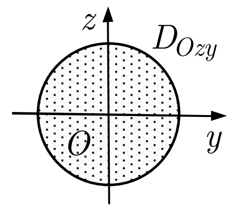


Рис. до зад. 11.5

Тіло циліндричне в напрямі осі Ox і проектується на площину Oyz у круг $y^2 + z^2 \le 3$.

$$m(G) = \iiint\limits_G \mu_0 dxdydz \overset{[10.9.4]}{=} \mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} dydz \int\limits_0^{6(y^2+z^2)} dx =$$

$$= 6\mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} (y^2 + z^2)dydz \overset{[10.7.5.2]}{=} 6\mu_0 \iint\limits_{\tilde{D}_{Oyz}} \rho^3 d\varphi d\rho =$$

$$= 6\mu_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho = 6\mu_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{9}{4} = 27\pi\mu_0.$$

$$M_{Oyz} = \iiint\limits_V \mu_0 x dxdydz \overset{[10.9.4]}{=} \mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} dydz \int\limits_0^{6(y^2+z^2)} xdx =$$

$$= 18\mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} (y^2 + z^2)^2 dydz \overset{[10.7.5.2]}{=} 18\mu_0 \iint\limits_{\tilde{D}_{Oyz}} \rho^5 d\varphi d\rho =$$

$$= 18\mu_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^5 d\rho = 18\mu_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{27}{6} = 162\pi\mu_0.$$

$$x_c = \frac{M_{Oyz}}{m} = \frac{162\pi\mu_0}{27\pi\mu_0} = 6.$$

Центр мас $C(6;0;0)$.

Коментар. ① Тіло G обмежене поверхнями: параболоїдом обертання $x = 6(y^2 + z^2)$, коловим циліндром $y^2 + z^2 = 3$, твірні якого паралельні осі Ox, площиною Oyz.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

11.6. Обчисліть потрійний інтеграл:

1) $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, G — область, обмежена площинами $x = 0$, $y = 0, z = 0, x + y + z = 1$;

2) $\iiint\limits_G (x+z)dxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $x + y = 1$, $x - y = 1, x + z = 1, z = 0, x = 0$;

3) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + z^2}dxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $y = x^2 + z^2, y = 1$;

4) $\iiint\limits_G xydxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0, z = 1, x \geq 0, y \geq 0$;

5) $\iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz, G : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$;

6) $\iiint\limits_G \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dxdydz$, $G : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$;

7) $\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, G — область, обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

8) $\iiint\limits_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}}dxdydz$, G — область, обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

11.7. Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x = 4, y = 4, z = x^2 + y^2 + 1, x = 0,\ y = 0, z = 0$;

2) $z = 2x^2 + y^2 + 1, x + y = 1, x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0$;

3) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 6, z = 0$;

4) $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$;

5) $az = x^2 + y^2, 2az = a^2 - x^2 - y^2$;

6) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2, az = x^2 + y^2$;

7) $x^2 + y^2 = 2az, x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$;

8) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 6 - x^2 - y^2$;

9) $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$;

10) $2(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$;

11) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \le 60,\ z = 1$;

12) $z = 0, z = ae^{-(x^2+y^2)}, x^2 + y^2 = R^2$;

13) $z = 0, x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = z^2$;

14) $x^2 + y^2 = 2Rx, z = x^2 + y^2, z = 0$;

15) $x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 4y, z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

16) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \le ax, z \ge 0$;

17) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \le z^2$;

18) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \le z^2$;

19) $64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 169, z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}}, y \ge 0, y \ge -\sqrt{3}x$;

20) $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}}, y \le 0, y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

21) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

22) $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1, \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} \le \dfrac{z^2}{9}$.

11.8. 1. Знайдіть масу сферичного шару між поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, якщо густина в кожній його точці обернено пропорційна віддалі точки від початку координат.

2. Знайдіть масу циліндра з радіусом R та висотою H, якщо густина пропорційна висоті та дорівнює 1 на нижній основі.

3. Знайдіть масу тіла, обмеженого еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, з густиною $\mu(x, y, z) = k\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)$.

4. Знайдіть масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(y \geq 0)$, $y^2 \geq x^2 + z^2$, з густиною $\mu(x,y,z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$.

5. Знайдіть масу тіла, обмеженого поверхнями $z = h$ та $x^2 + y^2 = z^2$, якщо густина в кожній точці пропорційна аплікаті цієї точки.

6. Знайдіть масу тіла, обмеженого поверхнями $z = h$ та $x^2 + y^2 = z^2$, якщо густина в кожній точці дорівнює $\mu_0 z^2$.

11.9. Знайдіть координати центра мас тіла з густиною μ:

1) $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0,\ \mu = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

2) $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0,\ \mu = \mu_0(x^2 + y^2 + z^2)$;

3) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, \mu(x,y,z) = \mu_0 z^2$;

4) $x^2 + y^2 \leq z \leq h, \mu(x,y,z) = \mu_0\sqrt{h - z}$;

5) $z = \dfrac{y^2}{2}, x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y - 12 = 0, \mu(x,y,z) = 1$;

6) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6, \mu(x,y,z) = 1$.

11.10. Знайдіть моменти інерції щодо осі Oz однорідного $(\mu = 1)$ тіла:

1) $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$.

Відповіді

11.6. 1) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{4\pi}{15}$; 4) $\frac{1}{8}$; 5) $\frac{31\pi}{10}$; 6) $\frac{\pi R^3}{6}$; 7) $\frac{4}{5}\pi abc$; 8) $\frac{3\pi^2}{2}$.

11.7. 1) $\frac{560}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$; 4) $\frac{88}{105}$; 5) $\frac{\pi a^3}{12}$; 6) $\frac{\pi a^3}{6}(8\sqrt{2} - 7)$; 7) $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} \pm 5)$; 8) $\frac{32}{3}\pi$; 9) $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2} - 1)$; 10) $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2} - 1)$; 11) 276π; 12) $\pi a(1 - e^{-R^2})$; 13) $\frac{32}{9}a^3$; 14) $\frac{3\pi R^4}{2}$; 15) 28; 16) $\frac{a^3}{9}(3\pi - 4)$; 17) $\frac{2\pi a^3}{3}(2 - \sqrt{2})$; 18) πa^3; 19) 337π; 20) 52π; 21) $\frac{4\pi abc}{3}$; 22) $4\pi(2 - \sqrt{2})$.

11.8. 1) $6k\pi R^2$; 2) $\frac{\pi R^2 H}{2}(H + 2)$; 3) $\frac{4}{5}k\pi abc$; 4) $\frac{k\pi R^5}{5}(2 - \sqrt{2})$; 5) $\frac{\pi k h^4}{4}$; 6) $\frac{\pi\mu_0 h^5}{5}$.

11.9. 1) $\left(\frac{8R}{3\pi^2}; 0; 0\right)$; 2) $\left(0; \frac{105}{124}; 0\right)$; 3) $\left(0; 0; \frac{5h}{6}\right)$; 4) $\left(0; 0; \frac{4h}{7}\right)$; 5) $\left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}; \frac{8}{5}\right)$; 6) $\left(\frac{18}{7}; \frac{15\sqrt{6}}{16}; \frac{12}{7}\right)$. **11.10.** 1) $\frac{\pi}{2}HR^4$; 2) $\frac{4\pi R^5}{15}$.

12. Криволінійний інтеграл 1-го роду

Навчальні задачі

12.1.1. Обчислити $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)dl$, де L — відрізок прямої AB, між точками $A(1;1;1)$ та $B(3;0;3)$.

Розв'язання. [10.11.5.]

Запишімо параметричні рівняння прямої $AB^{①}$:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t+1, \\ y=-t+1, \\ z=2t+1. \end{cases}$$

Відрізку AB прямої відповідає відрізок $t\in[0;1]$.

[*Записуємо формулу для диференціала дуги і обчислюємо його.*]

$$dl \overset{[10.11.5]}{=} \sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dy.$$

$$x_t'=2, y_t'=-1, z_t'=2;$$

$$dl=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3dt.$$

[*Обчислюємо інтеграл.*]

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)dl \overset{[10.11.5]}{=} 3\int\limits_0^1((2t+1)^2+(1-t)^2+(2t+1)^2)dt=$$

$$=3\int\limits_0^1(9t^2+6t+3)dt=27.$$

Коментар. ① Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

12.1.2. Обчислити $\int\limits_L ydl$, де $L: y=x^3, 0\le x\le 1$.

Розв'язання. [10.11.7.]

$$dl \overset{[10.11.7]}{=} \sqrt{1+y_x'^2}dx;$$

$$y_x'=3x^2,\ dl=\sqrt{1+9x^4}dx.$$

$$\int\limits_L y\,dl \overset{[10.11.7]}{=} \int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{1}{36}\int\limits_0^1 \sqrt{1+9x^4}\,d(1+9x^4) =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}\left(1+9x^4\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{54}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

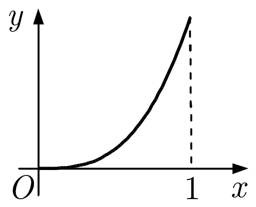


Рис. до зад. 12.1.2

12.1.3. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де $L : \rho = a(1+\cos\varphi), 0 \le \varphi \le \pi$.

Розв'язання. [10.11.8.] ①

$$dl \overset{[10.11.8]}{=} \sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}\,d\varphi.$$

$$\rho'_\varphi = -a\sin\varphi;$$

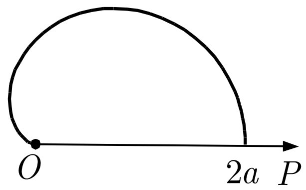


Рис. до зад. 12.1.3

$$dl \overset{[10.11.8]}{=} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= a\sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi.$$

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl \overset{[10.11.8]}{=} \int\limits_0^\pi a(1+\cos\varphi)2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 8a^2\int\limits_0^\pi \cos^3\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \overset{[10.4.7]}{=} 8a^2\,\frac{2}{1\cdot 3} = \frac{16}{3}a^2.$$

Коментар. ① Крива $\rho = a(1+\cos\varphi), -\pi \le \varphi \le \pi$, є кардіоїдою.

12.2.1. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.

Розв'язання. [10.11.9.]

Довжину дуги кривої L знаходять за формулою

$$l \overset{[10.11.9]}{=} \int\limits_L dl.$$

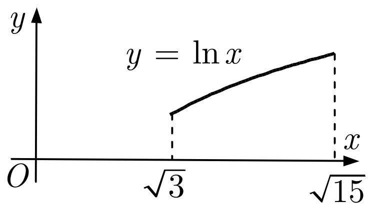


Рис. до зад. 12.2.1

$$dl \overset{[10.11.7]}{=} \sqrt{1+\left(\left(\ln x\right)'\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx.$$

$$l = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx \overset{①}{=} \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x^{-1}\left(1+x^2\right)^{1/2}dx =$$

$$=\left|\begin{array}{ll} m=-1, n=2 & 1+x^2=t^2 \\ p=\dfrac{1}{2} & d(1+x^2)=dt^2 \\ \frac{m+1}{n}=0\in\mathbb{Z} & xdx=tdt \end{array}\right| = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x^{-2}\left(1+x^2\right)^{1/2} xdx =$$

$$=\int\limits_2^4 \frac{t}{t^2-1}tdt = \int\limits_2^4 \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt = \int\limits_2^4 dt + \int\limits_2^4 \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^4 = \left(4-2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3}\right)\right) = 2+\ln\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Коментар. ① Скористаємось теоремою Чебишова.

12.2.2. Знайти довжину дуги кривої $\rho = 3e^{3\varphi/4}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. [10.11.9.]①

Довжину дуги кривої L знаходять за формулою

$$l(L) = \int\limits_L dl.$$

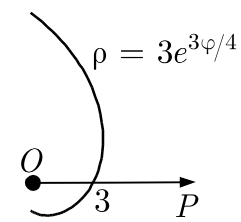


Рис. до зад. 12.2.2

$$dl \overset{[10.11.8]}{=} \sqrt{\frac{81}{16}e^{3\varphi/2} + 9e^{3\varphi/2}}d\varphi = \frac{15}{4}e^{3\varphi/4}d\varphi.$$

$$l = \frac{15}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{3\varphi/4}d\varphi = \frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}e^{3\varphi/4}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 5\left(e^{3\pi/8} - e^{-3\pi/8}\right) \overset{②}{=}$$

$$= 10\cdot\frac{e^{3\pi/8} - e^{-3\pi/8}}{2} = 10\operatorname{sh}\frac{3\pi}{8}.$$

Коментар. ① Крива $\rho = 3e^{3\varphi/4}$ є логарифмічною спіраллю.

② $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

12.3. Знайти масу, розподілену з густиною $\mu = 2z - \sqrt{x^2+y^2}$ уздовж кривої $L\colon x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, t\in[0;2\pi]$.

Розв'язання. [10.11.10.]①

Масу кривої L з густиною $\mu(x,y,z)$ знаходять за формулою

$$m(L) \overset{[10.11.10]}{=} \int\limits_L \mu(x,y,z)dl = \int\limits_L (2z - \sqrt{x^2+y^2})dl.$$

$$dl \overset{[10.11.6]}{=} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt = \\ = \sqrt{2+t^2}dt.$$

$$m(L) = \int\limits_0^{2\pi} \left(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\right)\sqrt{2+t^2}dt = \\ = \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2+t^2}d\left(2+t^2\right) = \\ = \frac{1}{3}\left(\left(2+4\pi^2\right)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right).$$

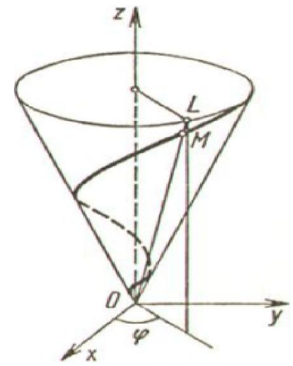


Рис. до зад. 12.3

Коментар. ① Крива L є конічною гвинтовою лінією.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

12.4. Обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, де L — відрізок прямої $y = x+2$, який з'єднує точки $A(2;4)$ та $B(1;3)$;

2) $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L — відрізок прямої $y = \frac{x}{2} - 2$, який з'єднує точки $A(0;-2)$ та $B(4;0)$;

3) $\int\limits_L (2x+y)dl$, де L — межа трикутника з вершинами $A(1;0), B(0;4), O(0;0)$;

4) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L — межа трикутника з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(0;1)$;

5) $\int\limits_L xdl$, де L — дуга параболи $y = x^2$ між точками $A(2;4)$ та $B(1;1)$;

6) $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2}dl$, де L — дуга гіперболи $xy = 1$ між точками $A(1;1)$ та $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$;

7) $\int\limits_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, де L — дуга синусоїди $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$;

8) $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dl$, де L — дуга косинусоїди $y = \cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;

9) $\int\limits_L xy^2 dl$, де L — дуга кола $x^2 + y^2 = R^2$, яка лежить у 1-й чверті;

10) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2} dl$, де L — дуга розгортки кола $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$;

11) $\int\limits_L \sqrt{2y} dl$, де L — перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

12) $\int\limits_L y^2 dl$, де L — перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

13) $\int\limits_L xy dl$, де L — частина еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, що лежить у 1-й чверті;

14) $\int\limits_L x^2 y dl$, де L — дуга астроїди $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

15) $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L — перший виток циліндричної гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t,\ z = bt$;

16) $\int\limits_L z dl$, де L — перший виток конічної гвинтової лінії $x = t\cos t, y = t\sin t,\ z = t$;

17) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2} dl$, де L — верхня половина кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$;

18) $\int\limits_L (x-y) dl$, де L — коло $x^2 + y^2 = ax$;

19) $\int\limits_L (x+y) dl$, де L — права частина лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$;

20) $\int\limits_L \sqrt{(x^2+y^2)^3} dl$, де L — верхня частина лемніскати $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$;

21) $\int\limits_L (x^2 + y^2)^2 dl$, де L — дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ між точками $A(0;a)$ до точки $O(-\infty;0)$;

22) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}dl$, де L — дуга спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$ між точками $A(0;0)$ та $B(a;a^2)$;

23) $\int\limits_L \sqrt{2y^2 + z^2}dl$, де L — коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x = y$;

24) $\int\limits_L xyzdl$, де L — чверть кола $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{4}$, яка лежить у 1-му октанті.

12.5. Знайдіть довжину кривої:

1) $y = \sqrt{x}$ від точки $x = 0$ до точки $x = 1$;

2) $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ від точки $x = 0$ до точки $x = a$;

3) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$

5) $\rho = 2a(1 + \cos\varphi)$;

6) $\rho = a\varphi$, перший виток;

7) $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, 0 \le t \le 2$;

8) $x = ae^t\cos t, y = ae^t\sin t, z = ae^t, -\infty < t \le 0$.

12.6. Визначте масу, розподілену з лінійною густиною μ вздовж кривої L:

1) $L : y = \dfrac{x^2}{2}, A\left(1;\dfrac{1}{2}\right), B(2;2), \mu = \dfrac{y}{x}$;

2) $L : y = \sqrt{x}, A(1;1), B(4;2), \mu = y$;

3) $L : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \mu = |y|$;

4) $L : \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi,\ \mu = y^{3/2}$;

5) $L:\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \mu = k\rho$;

6) $L:\rho = a(1+\cos\varphi), \mu = k\sqrt{\rho}$;

7) $L: x = t\cos t, y = t\sin t, z = t,\ 0 \le t \le 2\pi, \mu = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

8) $L: x = ae^t\cos t, y = ae^t\sin t, z = ae^t,\ -\infty < t \le 0, \mu = kz$.

12.7. Визначте координати центра мас однорідної:

1) дуги циклоїди $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), 0 \le t \le \pi; \end{cases}$

2) кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

12.8. Знайдіть момент інерції I_x однорідного кола $x^2+y^2=R^2$.

Відповіді

12.4. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{3}{2}$; 2) $5\ln 2$; 3) $3+2\sqrt{5}$; 4) $1+\sqrt{2}$; 5) $\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}$; 6) $\frac{17\sqrt{17}-2\sqrt{2}}{6}$; 7) $\frac{\pi}{2}$; 8) $\frac{2}{3}$; 9) $\frac{R^4}{3}$; 10) $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{3/2}-1\right]$; 11) $4\pi a\sqrt{a}$; 12) $\frac{256}{15}a^3$; 13) $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$;

14) $\frac{16}{385}a^4$; 15) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$; 16) $\frac{2\sqrt{2}((1+2\pi^2)^{3/2}-1)}{3}$; 17) $\frac{16a^2}{3}$; 18) $\frac{\pi a^2}{2}$;

19) $a^2\sqrt{2}$; 20) a^4; 21) $\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$; 22) $\frac{a^5}{3}+a^3$; 23) $2\pi a^2$; 24) $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$.

12.5. 1) $\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}+\frac{\sqrt{5}}{2}$; 2) $a\,\mathrm{sh}\,1$; 3) $6a$; 4) $8a$; 5) $16a$;

6) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$; 7) $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$; 8) $a\sqrt{3}$.

12.6. 1) $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}$; 2) $\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}$; 3) $2\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$;

4) $3\sqrt{2}\pi a^{5/2}$; 5) $k\pi a^2$; 6) $\pi k(2a)^{3/2}$; 7) $\frac{4\left((1+2\pi^2)^{3/2}-1\right)}{3}$; 8) $\frac{\sqrt{3}ka^2}{2}$.

12.7. 1) $\left(\frac{4a}{3};\frac{4a}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{4a}{5};0\right)$.

12.8. πR^3.

13. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду

Навчальні задачі

13.1.1. Обчислити $\int\limits_L xydx + zdy + (x^2 + y^2)dz$, де L: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases} \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. [10.12.6.] ①

Інтеграл обчислюємо за формулою [10.12.6]:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{t_1}^{t_2} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t) + \tilde{R}(t)z'(t)]dt,$$

де $\tilde{P}(t) = P(x(t), y(t), z(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t), y(t), z(t)), \tilde{R}(t) = R(x(t), y(t), z(t))$

$$P(x,y,z) = xy, Q(x,y,z) = z, R(x,y,z) = x^2 + y^2;$$

$$\tilde{P}(t) = a^2 \sin t \cos t, \tilde{Q}(t) = bt, \tilde{R}(t) = a^2.$$

$$x' = -a\sin t, y' = a\cos t dt, z' = bdt.$$

$$\int\limits_L xydx + zdy + (x^2 + y^2)dz = \int\limits_0^{\pi/2} \Big(-a^3 \cos t \sin^2 t + bat\cos t + a^2 b\Big)dt =$$

$$= ab\int\limits_0^{\pi/2} t\cos t dt + a^2 b\int\limits_0^{\pi/2} dt - a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t & \to & du = dt \\ dv = \cos t dt & \to & v = \sin t \end{matrix} ; \cos t dt = d(\sin t) \right| \overset{[10.4.2]}{=}$$

$$= \left(ab\cos t + abt\sin t + a^2 bt - \frac{a^3}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{a^3}{3} - ab + \frac{\pi}{2}ab + \frac{a^2 b\pi}{2}.$$

Коментар. ① Крива L є циліндричною гвинтовою лінією.

13.1.2. Обчислити $\int\limits_{ABC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, уздовж ламаної ABC, якщо $A(1;1)$, $B(3;1), C(3;5)$.

Розв'язання. [10.12.8.]

Оскільки ламана складається з ланок AB та BC, то

$$\int\limits_{ABC} \overset{[10.12.8]}{=} \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} .$$

Інтеграли обчислюємо за формулою [10.12.8].

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \overset{[10.12.8]}{=} \int\limits_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]dx.$$

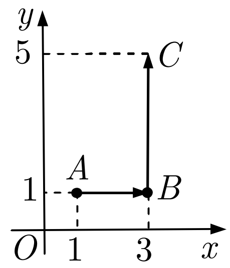


Рис. до зад. 13.1.1

На відрізку AB: $y = 1, y' = 0, x \in [1;3]$.

$$\int\limits_{AB} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \int\limits_1^3 (x^3 + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Bigg|_1^3 = 22.$$

На відрізку BC : $x = 3, x' = 0, y \in [1;5]$.

$$\int\limits_{BC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \int\limits_1^5 (3 + y^3)dy = \left(3y + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5 = 168.$$

$$\int\limits_{ABC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = 22 + 168 = 190.$$

13.2.1. Обчислити інтеграл $\displaystyle\oint\limits_{L:x^2+y^2=R^2} (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$ за формулою Остроградського — Ґріна і безпосередньо.

Розв'язання. [10.12.7, 10.12.9.]

[*Записуємо формулу Остроградського — Ґріна і перевіряємо умови її застосовності.*]

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

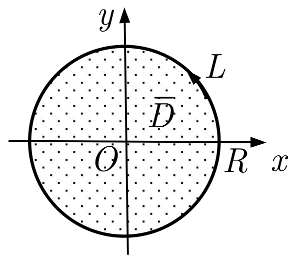


Рис. до зад. 13.2.1

де

$$P(x,y) = (1 - x^2)y, Q(x,y) = x(1 + y^2).$$

Оскільки ці функції неперервні і мають неперервні частинні похідні в замкненій області $\bar{D}$, коло є гладкою кривою, то формула Остроградського — Ґріна застосовна.

$$\oint\limits_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy \overset{[10.12.9]}{=} \left| \begin{matrix} Q'_x = 1 + y^2, \\ P'_y = 1 - x^2 \end{matrix} \right|$$

$$= \iint\limits_D (1 + y^2 - (1 - x^2))dxdy = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=}$$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} \rho^3 d\varphi d\rho = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2}R^4.$$

[*Обчислюємо криволінійний інтеграл безпосередньо.*]

Параметризуємо рівняння кола: $L : \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} (0 \le t \le 2\pi).$

$$\oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy \overset{[10.12.7]}{=}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} ((1-R^2\cos^2 t)R\sin t(-R\sin t) + R\cos t(1+R^2\sin^2 t)R\cos t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (R^2\cos 2t + 2R^4\sin^2 t\cos^2 t dt) = \frac{\pi}{2}R^4.$$

13.2.2. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{L:x^2+y^2=R^2} \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ безпосередньо і за формулою Остроградського — Ґріна.

Розв'язання. [10.12.7, 10.12.9.]

[*Обчислюємо інтеграл безпосередньо, параметризуючи криву.*]

$$L: \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} (0 \le t \le 2\pi).$$

$$\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \overset{[10.12.7]}{=} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt = 2\pi.$$

[*Перевіряємо умови застосовності формули Остроградського — Ґріна.*]

Функції $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ мають розрив в точці $O(0;0)$, яка лежить усередині круга $x^2+y^2 \le R^2$.

Формула Остроградського — Ґріна не застосовна. ①

Коментар. ① Ось чому, хоча і

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right), (x;y) \in \bar{D} \setminus O,$$

криволінійний інтеграл може бути відмінним від нуля.

13.3. Перевірити чи є підінтегральний вираз повним диференціалом та обчислити $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x^2-y^2)dx - 2xydy.$

Розв'язання. [10.13.1.]

[*Перевіряємо умову того, що підінтегральний вираз є повним диференціалом і криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.*]

$$P(x,y) = x^2 - y^2, Q(x,y) = -2xy.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}: \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy).$$

Оскільки підінтегральний вираз є повним диференціалом, то інтеграл не залежить від того, якою лінією сполучено точки $O(0;0)$ і $A(1;1)$.

Обчислюємо інтеграл вздовж прямої $y = x, x \in [0;1]$.

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \int\limits_{\substack{y=x,\\ x\in[0;1]}} (x^2 - y^2)dx - 2xydy \overset{[10.12.8]}{=}$$

$$= \left|y' = 1\right| = \int\limits_0^1 (0 - 2x^2 \cdot 1)dx = -2\int\limits_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

13.4. Обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_L xdy - ydx$, де L — дуга кривої $y = x^3$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(2;8)$;

2) $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + dy$, де L — дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$;

3) $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, де L — верхня половина еліпса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ що обходиться проти руху годинникової стрілки;

4) $\oint\limits_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, де L — коло $x^2 + y^2 = a^2$;

5) $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, де L — відрізок AB від точки $A = (1;1;1)$ до точки $B(2;3;4)$;

6) $\int\limits_L ydx + zdy + xdz$, де L — перший виток конічної гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$, у напрямі збільшення параметра.

13.5. Обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_L xdy - ydx$, де L: а) відрізок AB від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$; б) дуга параболи $y = 2x^2$, від точки A до точки B; в) ламана ACB, де $C(1;0)$;

2) $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$, де L: а) відрізок прямої $y = x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$; б) дуга параболи $y = x^2$ від точки A до точки B.

13.6. Застосовуючи формулу Остроградського — Ґріна, обчисліть криволінійний інтеграл уздовж кривої L :

1) $\oint\limits_L (2xy - y)dx + x^2dy$, де L — еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) $\oint\limits_L (x+y)^2dx - (x^2 + y^2)dy$, де L — трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(0;1)$;

3) $\oint\limits_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, де L — коло $x^2 + y^2 = R^2$;

4) $\oint\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, де L : а) еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; б) коло $x^2 + y^2 = ax$.

13.7. Переконайтесь у тому, що підінтегральний вираз є повним диференціалом і обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$; 2) $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)(dx + dy)$;

3) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;1)} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy$;

4) $\displaystyle\int\limits_{(\pi;1)}^{(\pi;2)} \left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)dy.$

Відповіді

13.4. 1) 8; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{4}{3}ab^2$; 4) -2π; 5) 13; 6) $-\pi a^2$.

13.5. 1) а) 0; б) $\frac{2}{3}$; в) 2; 2) а) 1; б) 1.

13.6. 1) πab; 2) -1; 3) $\frac{\pi R^4}{2}$; 4) а) 0; б) $-\frac{\pi a^3}{8}$.

13.7. 1) 8; 2) 2; 3) $\sqrt{2}$; 4) $1+\pi$.

14. Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду

Навчальні задачі

14.1. Знайти роботу сили $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j}$ під час переміщення вздовж верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(y \geq 0)$ від точки $M(a;0)$ до точки $N(-a;0)$.

Розв'язання. [10.12.10.]

Роботу силового поля $\overline{F}$ вздовж кривої L знаходять за формулою

$$\mathrm{A}_L(\overline{F}) \overset{[10.12.10]}{=} \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L ydx - xdy$$

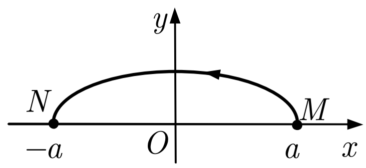


Рис. до зад. 14.1

Параметризуємо шлях переміщення:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$\mathrm{A} = \int\limits_L ydx - xdy \overset{[10.12.7]}{=} \int\limits_0^{\pi} (b\sin t\cdot(-a\sin t) - a\cos t\cdot b\cos t)dt =$$

$$= -ab\int\limits_0^{\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -\pi ab.$$

14.2. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{a} = x^2y^3\overline{i} + \overline{j} + z\overline{k}$ вздовж контуру $L: \{x^2 + y^2 = R^2, z = z_0\}$ (орієнтованого проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі Oz).

Розв'язання. [10.12.11.]

Циркуляцію векторного поля $\overline{a}$ вздовж кривої L знаходять за формулою

$$\mathrm{C}_L(\overline{a}) \overset{[10.12.11]}{=} \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz.$$

Параметризуємо рівняння кола L.

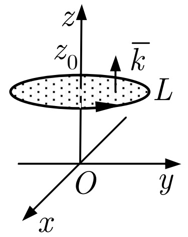


Рис. до зад. 14.2

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. ① \\ z = z_0, \end{cases}$$

$$\mathrm{C}_L(\overline{a}) = \oint\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz \overset{[10.12.6]}{=}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t \cdot R^3\sin^3 t(-R\sin t) + R\cos t + 0)dt =$$

$$= R^6\int\limits_0^{2\pi}\sin^6 tdt - R^6\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 tdt + R\sin t\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 4R^6\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin^6 tdt - \int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 tdt\right) \overset{[2.3.8]}{=} 4R^6\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right) = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

Коментар. ① Змінювання параметра t від 0 до 2π відповідає напряму обходу контуру, заданого в умові задачі.

14.3. Знайти площу фігури, обмежену астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

Розв'язання. [10.12.12.]

Площу фігури D, обмежену замкненим контуром L, обчислюють за формулою:

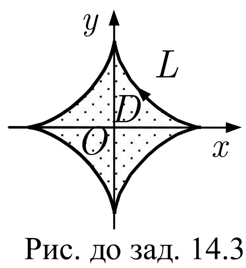


Рис. до зад. 14.3

$$S(D) \overset{[10.12.12]}{=} \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx = \begin{vmatrix} x' = -3a\cos^2 t\sin t, \\ y' = 3a\sin^2 t\cos t \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(3a^2\sin^2 t\cos^4 t + 3a^2\sin^4 t\cos^2 t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

14.4. Знайти функцію u за її повним диференціалом

$$du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy.$$

Розв'язання. [10.13.1, 10.13.3.]

[*Переконуємося в тому, що* du *є повним диференціалом 10.13.1.***]**:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$P(x,y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2}+1.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\right) = -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Вираз du є повним диференціалом.

Функцію $u(x,y)$ відновлюють за формулою

$$u(x,y) \overset{[10.13.3]}{=} \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + C.$$

Вибираємо за початкову точку $M_0(0;0)$. ①

$$u(x,y) = \int_0^x 0dt + \int_0^y \left(\frac{e^t}{1+x^2}+1\right)dt + C =$$

$$= \left(\frac{e^t}{1+x^2}+t\right)\Bigg|_0^y + C = \frac{e^y}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + y + C.$$

Коментар. ① Точку $M_0(x_0;y_0)$ можна вибирати довільно, але так, щоб функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ були у ній неперервними.

Запис $P(t,y_0)$ означає, що у функцію $P(x,y)$ підставляють t замість x і y_0 замість y.

Запис $Q(x,t)$ означає, що у функцію $Q(x,y)$ підставляють t замість y, а змінну x залишають без змін і під час інтегрування вважають сталою.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

14.6. Знайдіть роботу поля $\overline{F}$ під час переміщення точки вздовж дуги кривої L від точки A до точки B, якщо:

1) $\overline{F} = 2xy\overline{i} - y\overline{j}, L : y = x^2 - 1, A(1;0), B(2;3)$;

2) $\overline{F} = 3xy^2\overline{i} - (x+y)\overline{j}, L : y^2 = x + 1, A(0;1), B(3;2)$;

3) $\overline{F} = x^2\overline{i} + xy^2\overline{j}, L = AB, A(0;1), B(1;2)$;

4) $\overline{F} = x^2\overline{i} + \dfrac{1}{y^2}\overline{j}, L : xy = 1, A(1;1), B\left(4;\dfrac{1}{4}\right)$;

5) $\overline{F} = y\overline{i} - 2x\overline{j}, L : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, A(1;0), B(-1;0)$;

6) $\overline{F} = 2x\overline{j}, L : \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} A(a;0), B\big(-a;0\big)$;

7) $\overline{F} = -y\overline{i} + x\overline{j}, L : \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} A(0;0), B(2\pi a;0)$;

8) $\overline{F} = y\overline{i} + x\overline{j}, L : \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} A(a;0), B\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}};\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right)$;

9) $\overline{F} = (y^2 + z^2)\overline{i} - yz\overline{j} + x\overline{k}, L : x = bt, y = a\cos t, z = a\sin t, A(0;a;0)$, $B\left(\dfrac{b\pi}{2};0;a\right)$;

10) $\overline{F} = -\dfrac{yz}{x}\overline{i} + x\overline{j} + y\overline{k}, L : x = t, y = t\cos t, z = t\sin t, A(0;0;0)$, $B(2\pi;2\pi;0)$.

14.6. 1. Знайдіть роботу поля $\overline{F} = (4x - 5y)\overline{i} + (2x + y)\overline{j}$ під час переміщення вздовж кривої L від точки $A(1;-9)$ до точки $B(3;-3)$, якщо:

а) L — ламана APB, де $P(1;-3)$; б) L — ламана AQB, де $Q(3;-9)$.

2. Знайдіть роботу поля $\overline{F} = y^2\overline{i} + x^2\overline{j}$ під час переміщення вздовж кривої L від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$, якщо:

а) L — ламана OAB, де $A(1;0)$; б) L — ламана OCB, де $C(0;1)$.

14.7. Знайдіть модуль циркуляції векторного поля $\overline{a}$ вздовж контуру L, якщо:

1) $\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}, L : \{x + y + z = 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$;

2) $\overline{a} = y\overline{i} + z\overline{j} + x\overline{k}, L : \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$;

3) $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z\overline{k}, L : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$;

4) $\overline{a} = z\overline{i} - x\overline{j} + y\overline{k}, L : \{z = x^2 + y^2 - 10, z = -1\}$.

14.8. Обчисліть площу фігури, обмежену:

1) еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) кардіоїдою $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

14.9. Відновіть функцію u за її повним диференціалом:

1) $du = (e^{2y} - 5y^3e^x)dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)dy$;

2) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$;

3) $du = \dfrac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x + y)^3}$;

4) $du = \left(12x^2y + \dfrac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \dfrac{2x}{y^3}\right)dy$;

5) $du = \dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z}$; 6) $du = \dfrac{dx - 3dy}{z} + \dfrac{3y - x + z^3}{z^2}dz$.

Відповіді

14.5. 1) 0; 2) $\dfrac{113}{3}$; 3) $\dfrac{7}{4}$; 4) 18; 5) $-\dfrac{3\pi}{2}$; 6) πab; 7) $-6\pi a^2$; 8) $\dfrac{a^2}{8}$; 9) $\dfrac{\pi ab(a+1)}{2} + \dfrac{a^3}{3} - ab$; 10) π.

14.6. 1) а) 22; б) 106; 2) а) 1; б) 1. **14.7.** 1) 27; 2) $\dfrac{3}{4}\pi R^2$; 3) 4π; 4) 9π.

14.8. 1) πab; 2) $6\pi a^2$.

14.9. 1) $u = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$; 2) $u = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C$; 3) $u = \dfrac{x - y}{(x + y)^2} + C$;

4) $u = 4x^3y + \dfrac{x}{y^2} + C$; 5) $u = \ln\left|x + y + z\right| + C$; 6) $u = \dfrac{x - 3y}{z} + \dfrac{z^2}{2} + C$.

15. Поверхневий інтеграл 1-го роду

Навчальні задачі

15.1. Обчислити $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+3z^2)d\sigma$ за частиною поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, відтятою площиною $z=1$.

Розв'язання. [10.14.4.]

Поверхня Ω проектується на площину Oxy у круг D, обмежений колом

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1.$$

[*Знаходимо диференціал поверхні.*]

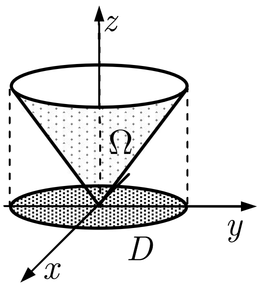


Рис. до зад. 15.1

$$d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy.$$

$$z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}dxdy.$$

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+3z^2)d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} =\iint\limits_{D}(x^2+y^2+3(x^2+y^2))\sqrt{2}dxdy=$$

$$=4\sqrt{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=$$

$$=4\sqrt{2}\iint\limits_{\tilde{D}}\rho^3d\varphi d\rho=4\sqrt{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{1}\rho^3d\rho=2\sqrt{2}\pi.$$

15.2. Знайти площу частини поверхні $\Omega: x^2+y^2+z^2=3$, вирізаної поверхнею $\Sigma: 2z=x^2+y^2$.

Розв'язання. [10.14.5.]

Площу поверхні Ω знаходять за формулою

$$S(\Omega)=\iint\limits_{\Omega}d\sigma.$$

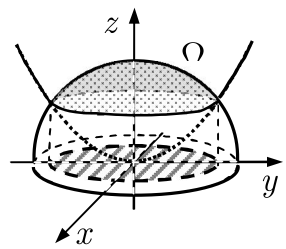


Рис. до зад. 15.2

Частина поверхні сфери, вирізаної параболоїдом, проектується на площину Oxy у круг, обмежений колом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ 2z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2.$$

Верхню півсферу задає рівняння $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

$$d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy.$$

$$z_x' = \frac{-x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, z_y' = \frac{-y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{3 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{3 - x^2 - y^2}}dxdy = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}dxdy.$$

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} \iint\limits_{D_{Oxy}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=} \sqrt{3}\iint\limits_{\tilde{D}_{Oxy}} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{3 - \rho^2}} =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{3 - \rho^2}} = -\sqrt{3}\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{d(3 - \rho^2)}{\sqrt{3 - \rho^2}} =$$

$$= -2\sqrt{3}\pi\sqrt{3 - \rho^2}\ \Big|_0^{\sqrt{2}} = (6 - 2\sqrt{3})\pi.$$

15.3.1. Знайти масу частини поверхні $\Omega : z^2 = 2px\ (p > 0)$, відтятою площинами $y = \alpha z, y = \beta z, z = \alpha\ \ (\beta z < y < \alpha z, 0 < z < \alpha, \alpha > \beta > 0)$, з густиною $\mu = \mu_0$.

Розв'язання. [10.14.6.]

Масу поверхні Ω з густиною $\mu(x, y, z)$ знаходять за формулою

$$m(\Omega) \overset{[10.14.6]}{=} \iint\limits_{\Omega} \mu(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{\Omega} \mu_0 d\sigma.$$

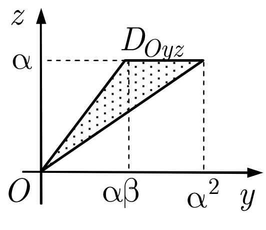


Рис. до зад. 15.3.1

Частина поверхні параболічного циліндра $\Omega : x = \dfrac{1}{2p}z^2$ однозначно проектується на площину Oyz в область D_{Oyz}.

$$d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}dydz = \sqrt{1 + \frac{z^2}{p^2}}dydz.$$

$$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mu_0 d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} \mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{p}\right)^2}dydz =$$

$$= \mu_0 \int\limits_0^{\alpha} \sqrt{1+\frac{z^2}{p^2}} dz \int\limits_{\beta z}^{\alpha z} dy = \mu_0(\alpha-\beta)\int\limits_0^{\alpha} z\sqrt{1+\frac{z^2}{p^2}} dz =$$

$$= \frac{\mu_0}{3p}(\alpha-\beta)\left(\left(p^2+\alpha^2\right)^{3/2}-p^3\right).$$

15.3.2. Знайти масу частини поверхні $\Omega : 2az = x^2 - y^2, a > 0,$ вирізаної поверхнею $\Sigma : x^2 + y^2 \le a^2$, з густиною $\mu = 15\left|z\right|$.

Розв'язання. [10.14.6.]

Масу поверхні Ω з густиною μ знаходять за формулою

$$m(\Omega) \overset{[10.14.6]}{=} \iint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{\Omega} 15\left|z\right|d\sigma.$$

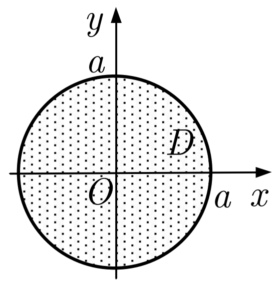


Рис. до зад. 15.3.2

Частина поверхні гіперболічного параболоїда $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2a}$, вирізана коловим циліндром $x^2 + y^2 = a^2$ проектується на площину Oxy у круг $D : x^2 + y^2 \le a^2$.

$$d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}dxdy = \frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}dxdy.$$

$$m = \iint\limits_{\sigma} \mu\left(x,y,z\right)d\sigma = \iint\limits_{D} 15\left|\frac{x^2-y^2}{2a}\right|\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=}$$

$$= \frac{15}{2a^2}\iint\limits_{\tilde{D}}\left|\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right|\sqrt{a^2+\rho^2}\cdot\rho d\rho =$$

$$= \frac{15}{2a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi\int\limits_0^a \rho^2\left|\cos 2\varphi\right|\sqrt{a^2+\rho^2}\cdot\rho d\rho \overset{①}{=}$$

$$= \frac{15}{2a^2}\cdot 8\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi\int\limits_0^a\left(\sqrt{\left(a^2+\rho^2\right)^3}-a^2\sqrt{a^2+\rho^2}\right)d\left(a^2+\rho^2\right) =$$

$$= \frac{15}{a^2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\left(\frac{2}{5}\left(a^2+\rho^2\right)^{5/2}-\frac{2a^2}{3}\left(a^2+\rho^2\right)^{3/2}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 30a^3\left(\frac{\left(4\sqrt{2}-1\right)}{5}-\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right) = 4a^3\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Коментар. ① $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\cos 2\varphi\right|d\varphi \underset{T=\frac{\pi}{2}}{\overset{[10.4.6]}{=}} 4\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left|\cos 2\varphi\right|d\varphi \overset{[10.4.4]}{=} 8\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi.$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

15.4. Обчисліть поверхневий інтеграл:

1) $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)d\sigma$, де Ω — сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$;

2) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)d\sigma$, де Ω — півсфера $y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$;

3) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, де Ω — частина поверхні конуса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{b^2}$ $(0\le z\le b)$;

4) $\iint\limits_{\Omega}(2z^2-x^2-y^2)d\sigma$, де Ω — частина поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, яка вирізана циліндром $x^2+y^2=2x$;

5) $\iint\limits_{\Omega}(x+y+z)d\sigma$, де Ω — частина площини $x+2y+4z=4$, $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$;

6) $\iint\limits_{\Omega}xyzd\sigma$, де Ω — частина поверхні параболоїда $2z=x^2+y^2$, $z\le 1$.

15.5. Обчисліть площу частини:

1) сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, що міститься всередині циліндра $x^2+y^2-ax=0$;

2) сфери $x^2+y^2+z^2=2a^2$, що міститься всередині конуса $x^2+y^2=z^2$;

3) конуса $x^2=y^2+z^2$, розташованої в 1-му октанті й обмеженої площиною $y+z=a$;

4) конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2+y^2=2x$;

5) параболоїда $2z = x^2 + y^2$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$;

6) параболоїда $2z = x^2 + y^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 1$;

7) гіперболічного параболоїда $az = xy$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;

8) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

15.6. Обчисліть масу, розподілену:

1) по сфері $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з густиною $\mu = \mu_0\sqrt{x^2 + y^2}$;

2) по частині параболоїда $x^2 + y^2 = 2z,\ z \le 1$, з густиною $\mu = \mu_0 z$.

15.7. Знайдіть координати центра мас однорідної поверхні:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$;

2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x \ge 0, y \ge 0,\ x + y \le R$;

3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \le x$.

Відповіді

15.4. 1) $\frac{8}{3}\pi a^4$; 2) $2\pi R^4$; 3) $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$; 5) $\frac{7\sqrt{21}}{3}$; 6) 0.

15.5. 1) $2a^2(\pi - 2)$; 2) $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$; 3) $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$; 4) $\pi\sqrt{2}$; 5) $\frac{20 - 3\pi}{9}$; 6) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$;

7) $\frac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$; 8) $2(\pi + 4 - 4\sqrt{2})a^2$.

15.6. 1) $\mu_0\pi^2R^3$; 2) $\frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})\mu_0}{15}$.

15.7. 1) $\left(\frac{R}{2};\frac{R}{2};\frac{R}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}R;\frac{\sqrt{2}}{4}R;\frac{\sqrt{2}+1}{\pi}R\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2};0;\frac{16}{9\pi}\right)$.

16. Поверхневий інтеграл 2-го роду

Навчальні задачі

16.1.1. Обчислити $\iint\limits_{\Omega} (2x-z)dydz + 3zdxdz + (x+2z)dxdy$, де Ω — верхній бік трикутника $x+4y+z=4, x, y, z \geq 0$.

Розв'язання. [10.15.5.]

Поверхня $\Omega: z = 4 - x - 4y$ однозначно проектується на площину Oxy.

Щоб обчислити поверхневий інтеграл, скористаємося формулою

$$\iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma \overset{[10.15.5]}{=} \iint\limits_{D_{Oxy}} \left. \frac{(\overline{a}, \overline{n}_0)}{|\cos\gamma|} \right|_{z=z(x,y)} dxdy.$$

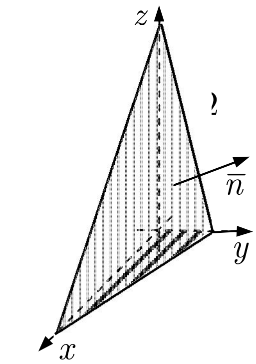


Рис. до зад. 16.1.1

Нормальний вектор до верхнього боку площини ①

$$\overline{n} = \overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}; \left|\overline{n}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18};$$

$$\overline{n}^0 = \frac{\overline{n}}{\left|\overline{n}\right|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{4}{3\sqrt{2}}\overline{j} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\overline{k}; \;\; \cos\gamma = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

$$\overline{a} = (2x - z)\overline{i} + 3z\overline{j} + (x + 2z)\overline{k}.$$

$$(\overline{a}, \overline{n}^0) = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2z - z \\ 3z \\ x + 2z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2x - z + 12z + x + 2z}{3\sqrt{2}} = \frac{3x + 13z}{3\sqrt{2}}.$$

$$\left. \frac{(\overline{a}, \overline{n}^0)}{\left|\cos\gamma\right|} \right|_{z=4-x-4y} = (3z + 13z)\Big|_{z=4-x-4y} = 52 - 10x - 52y.$$

$$\iint\limits_{\Omega} (2x-z)dydz + 3zdxdz + (x+2z)dxdy,$$

$$= \iint\limits_{D_{Oxy}} (52 - 10x - 52y) dxdy \overset{[10.7.4]}{=} \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{4-4y} (52 - 10x - 52y) dx = \frac{128}{3}.$$

Коментар. ① У загальному рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ коефіцієнти A, B, C є відповідними координатами нормального вектора. Вектор $(1; 4; 1)^{\mathrm{T}}$ утворює гострий кут з віссю Oz і задає верхній бік поверхні (нижній бік поверхні задає вектор $\overline{n} = (-1; -4; -1)^{\mathrm{T}}$).

16.1.2. Обчислити $\iint\limits_{\Omega}(5x^2+5y^2+z^2)dxdy$, де Ω — зовнішній бік частини півсфери $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, вирізаної конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. [10.15.5.]

Поверхневий інтеграл обчислимо за формулою

$$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)dxdy \overset{[10.15.5]}{=} \pm\iint\limits_{D_{Oxy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

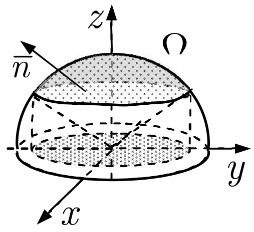


Рис. до зад. 16.1.2

На зовнішньому боці поверхні Ω нормаль утворює гострий кут із віссю Oz, отже перед інтегралом вибираємо знак «$+$».

Частина поверхні однозначно проектується в область D_{Oxy}, обмежену кривою

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=\sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2.$$

$$\iint\limits_{\Omega}(5x^2+5y^2+z^2)dxdy \overset{[10.15.5]}{=} +\iint\limits_{D_{Oxy}}(5x^2+5y^2+(4-x^2-y^2))dxdy=$$

$$=4\iint\limits_{D_{Oxy}}(1+x^2+y^2)dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=} 4\iint\limits_{\tilde{D}_{Oxy}}(1+\rho^2)\rho d\varphi d\rho=$$

$$=4\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}(1+\rho^2)\rho d\rho=4\cdot 2\pi\left(\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=16\pi.$$

16.1.3. Обчислити $\iint\limits_{\Omega} z^2dxdy$, де Ω — зовнішній бік півсфери $y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$.

Розв'язання. [10.15.5.]

Оскільки поверхня Ω проектується на площину Oxy неоднозначно, то розіб'ємо поверхню Ω на частини Ω_1 та Ω_2, розташовані відповідно вище й нижче площини $z=0$.

$$\iint\limits_{\Omega} z^2dxdy \overset{①}{=} \iint\limits_{\Omega_1} z^2dxdy+\iint\limits_{\Omega_2} z^2dxdy.$$

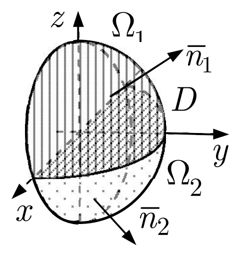


Рис. до зад. 16.1.3

Поверхні Ω_1 та Ω_2 проектуються на площину Oxy в одну й ту саму область $D_{Oxy}: x^2+y^2\le R^2, y\ge 0$. Зовнішня нормаль до Ω_1 утворює з віссю Oz гострий кут, а до Ω_2 — тупий. Отже,

$$\iint\limits_{\Omega_1} z^2 dxdy \overset{[10.15.5]}{=} +\iint\limits_{D_{Oxy}} (R^2 - x^2 - y^2)dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega_2} z^2 dxdy \overset{[10.15.5]}{=} -\iint\limits_{D_{Oxy}} (R^2 - x^2 - y^2)dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega} z^2 dxdy = 0.$$

Коментар. ① Властивість адитивності поверхневого інтеграла.

16.2. Знайти потік векторного поля $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ через зовнішній бік частини поверхні $\Omega : x^2 + y^2 = a^2 \quad (0 < z < a)$.

Розв'язання. [10.16.9.]

Потік векторного поля знаходять за формулою

$$\Pi_{\Omega}(\overline{a}) \overset{[10.16.9]}{=} \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma.$$

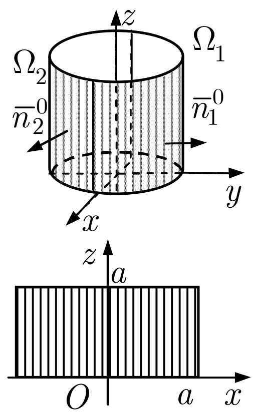


Рис. до зад. 16.2

Проектуємо поверхню Ω на площину Oxz. Оскільки вона проектується неоднозначно, то розіб'ємо її на частини $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ та $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

$$\Pi_{\Omega} = \Pi_{\Omega_1} + \Pi_{\Omega_2}.$$

$$\iint\limits_{\Omega_1} (\overline{a}, \overline{n}_1^0) d\sigma \overset{[10.15.6]}{=} \iint\limits_{D_{Oxz}} \left. \frac{(\overline{a}, \overline{n}_1^0)}{|\cos\beta|} \right|_{y = y(x,z)} dxdz.$$

На Ω_1 маємо:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

$$\overline{n}_1 = \pm \operatorname{grad} F = \pm(2x\overline{i} + 2y\overline{j}) \Rightarrow \overline{n}_1 = 2x\overline{i} + 2y\overline{j}.^{①}$$

$$\left|\overline{n}_1\right| = \sqrt{4x^2 + 4y^2}; \overline{n}_1^0 = \frac{x\overline{i} + y\overline{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$(\overline{a}, \overline{n}_1^0) = (x; y; z) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 0 \right)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{(\overline{a},\overline{n}_1^0)}{|\cos\beta|}\Bigg|_{y=\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x^2+y^2}{y}\Bigg|_{y=\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\Pi_{\Omega_1}(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega_1}(\overline{a},\overline{n}_1^0)d\sigma = a^2\iint\limits_{D_{Oxz}}\frac{a^2dxdz}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\int\limits_0^a dz\int\limits_{-a}^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= a^2\cdot a\cdot\arcsin\frac{x}{a}\Bigg|_{-a}^{a} = \pi a^3.$$

Коментар. ① Для Ω_1 нормаль утворює гострий кут з віссю Oy.

② Потік для Ω_2 обчислюють так само, враховуючи, що $\overline{n}_2 = -(2x\overline{i}+2y\overline{j})$, $y=-\sqrt{a^2-x^2}$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

16.3. Обчисліть:

1) $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, де Ω — зовнішній бік поверхні півсфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\geq 0)$;

2) $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, де Ω — внутрішній бік сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$;

3) $\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, де Ω — внутрішній бік параболоїда $z=4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$, відтятої площиною $z=0$.

4) $\iint\limits_{\Omega} ydxdz$, де Ω — верхній бік частини площини $x+y+z=a$, що лежить у 1-му октанті.

16.4. Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через орієнтовану поверхню Ω, якщо:

1) $\overline{a}=(x-2z;x+3y+z;5x+y)$, Ω — протилежний початку координат бік трикутника з вершинами $(1;0;0)$, $(0;1;0),(0;0;1)$;

2) $\overline{a}=(y^2;x^2;z^2),\Omega$ — частина зовнішнього боку циліндра $x^2+y^2=a^2$, розташованого в 1-му октанті між площинами $z=0$ і $z=a,a>0$;

3) $\overline{a} = (3x;-y;-z), \Omega$ — частина зовнішнього боку параболоїда $x^2 + y^2 = 9 - z$, розташованої в 1-му октанті;

4) $\overline{a} = (x^2;y^2;z^2), \Omega$ — частина зовнішнього боку параболоїда $x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{H}z \ (0 \le z < H)$;

5) $\overline{a} = (xy;yz;zx), \Omega$ — частина зовнішнього боку сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розташовану в 1-му октанті;

6) $\overline{a} = (x;y;\sqrt{x^2 + y^2 - 1}),\ \Omega$ — частина зовнішнього боку поверхні гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, що міститься між площинами $z = 0$ і $z = \sqrt{3}$.

Відповіді

16.3. 1) $\dfrac{\pi R^4}{2}$; 2) $-4\pi R^3$; 3) -96π; 4) $\dfrac{a^3}{6}$.

16.4. 1) $\dfrac{5}{3}$; 2) $\dfrac{2a^4}{3}$; 3) $\dfrac{81\pi}{8}$; 4) $\dfrac{\pi R^2 H^2}{3}$; 4) $\dfrac{3\pi}{16}$; 5) $2\sqrt{3}\pi$.

17. Теорія поля

Навчальні задачі

17.1. Обчислити $\operatorname{div}\overline{a}$, якщо $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$.

Розв'язання. [10.16.3.]

Дивергенцію знаходять за формулою

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[10.16.3]}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

$$P(x,y,z) = x^2, Q(x,y,z) = y^2, R(x,y,z) = z^2;$$

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[10.16.3]}{=} \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2y + 2z.$$

17.2. Знайти потік векторного поля $\overline{a} = 2x\overline{i} + 2y\overline{j} - z\overline{k}$ через зовнішній бік замкненої поверхні $\Omega : z = \sqrt{x^2 + y^2}\ (0 \le z \le H)$.

Розв'язання. [10.16.9, 10.16.11.]

Потік знаходять за формулою

$$\Pi_\Omega(\overline{a}) \overset{[10.16.9]}{=} \iint\limits_\Omega (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma.$$

Поверхня $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ замкнена, де Ω'' — поверхня конуса та Ω' — частина площини $z = H$, що вирізається конусом. Виконано умови теореми Остроградського — Ґауса [10.16.11].

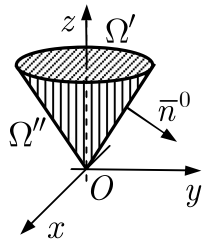


Рис. до зад. 17.2

$$\Pi_\Omega(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma \overset{[10.16.11]}{=} \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \overline{a} dxdydz =$$

$$= \left| \operatorname{div} \overline{a} = \frac{\partial}{\partial x}\big(2x\big) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 3 \right| = \iiint\limits_{V} 3dxdydz =$$

$$= 3\iiint\limits_{V} dxdydz \overset{[10.9.3]}{=} 3V_{\text{кон.}} \overset{①}{=} 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi H^2 \cdot H = \pi H^3.$$

Коментар. ① Об'єм конуса обчислюють за формулою

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h.$$

17.3. Знайти потік векторного поля $\overline{a} = 2x\overline{i} + 2y\overline{j} - z\overline{k}$ через внутрішній бік частини поверхні $\Omega : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z < H)$.

Розв'язання. [10.16.9, 10.16.11.] ①

Потік знаходять за формулою

$$\Pi_\Omega(\overline{a}) \overset{[10.16.9]}{=} \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma.$$

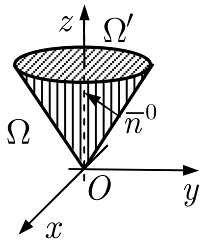


Рис. до зад. 17.3

Замкнімо поверхню Ω поверхнею $\Omega' : z = H$. Тоді

$$\Omega^* = \Omega \cup \Omega'; \ \Pi_{\Omega^*} = \Pi_\Omega + \Pi_{\Omega'}.$$

$$\Pi_\Omega = \Pi_{\Omega^*} - \Pi_{\Omega'}.$$

[*Деталі див. у зад. 17.2.***]**

$$\Pi_{\Omega^*}(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma \underset{②}{\overset{[10.16.11]}{=}} -\iiint\limits_{G} \operatorname{div} \overline{a} dxdydz =$$

$$= \left| \operatorname{div} \overline{a} = 3 \right| = -3\iiint\limits_{G} dxdydz = -\pi H^3.$$

$$\Pi_{\Omega'}(\overline{a}) \overset{[10.16.9]}{=} \iint\limits_{\Omega'} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = \left| \begin{aligned} &\overline{n} = -\overline{k}, \\ &(\overline{a}, \overline{n}^0) = z \end{aligned} \right| = \iint\limits_{\Omega'} z d\sigma \overset{③}{=}$$

$$= H \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy = HS_{\text{кр.}} = \pi H^3.$$

$$\Pi_\Omega = -\pi H^3 - \pi H^3 = -2\pi H^3.$$

Коментар. ① Задача відрізняється від задачі 17.2 тим, що дана поверхня **незамкнена**, на що вказує слово «частина» та нестрога нерівність в умові задачі. Один із способів обчислення потоку в цьому разі, полягає в замиканні поверхні й обчисленні потоку через замкнену поверхню за допомогою формули Остроградського — Ґауса.
② Знак «$-$» у формулі Остроградського — Ґауса вказує на внутрішній бік замкненої поверхні.
③ Частина поверхні Ω' проектується у круг $D_{Oxy}: x^2 + y^2 \le H^2$.

17.4.1. Знайти ротор векторного поля $\overline{a}$, якщо $\overline{a} = \overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.
Розв'язання. [10.16.6.]
Ротор знаходять за формулою

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}.$$

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \overset{①}{=}$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(x)\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right) =$$
$$= \overline{i}(0-0) - \overline{j}(0-0) + \overline{k}(0-0) = \overline{0}.$$

Коментар. ① Визначник розкладають за 1-м рядком. Добуток оператора частинного диференціювання на функцію означає знаходження відповідної похідної.

17.4.2. Знайти ротор векторного поля $\overline{a} = xy\overline{i} + (2x + 3y - z)\overline{j} + (z^2 + x^2)\overline{k}$ і найбільшу густину циркуляції цього поля у точці $M_0(1;2;-1)$.
Розв'язання. [10.16.6.]

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2x + 3y - z & x^2 + z^2 \end{vmatrix} =$$
$$= \overline{i}(0+1) - \overline{j}(2x - 0) + \overline{k}(2 - x) = \overline{i} - 2x\overline{j} + (2-x)\overline{k}.$$

Найбільша густина циркуляції — це довжина ротора.

$$\max j(M_0) = \left|\operatorname{rot}\overline{a}(M_0)\right|.$$

$$\operatorname{rot}\overline{a}(M_0) = \overline{i} - 2x\overline{j} + (2-x)\overline{k}\Big|_{M_0(1;2;-1)} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k};$$

$$\max j(M) = \left|\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

17.5. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{a} = x^2y^3\overline{i} + \overline{j} + z\overline{k}$ вздовж контуру $L : \{x^2 + y^2 = R^2, z = z_0\}$ (орієнтованого проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі Oz) за Стоксовою теоремою.

Розв'язання. [10.16.10, 10.16.12.]

Циркуляцію векторного поля знаходять за формулою

$$\mathrm{C}_L(\overline{a}) = \oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}).$$

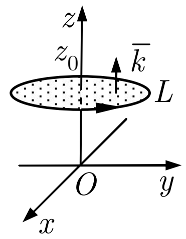


Рис. до зад. 17.5

Виконано всі умови теореми Стокса. За формулою Стокса

$$\oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) \overset{[10.16.12]}{=} \iint\limits_\Omega (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma.$$

За поверхню, напнуту на контур, вибираємо частину площини $z = z_0$, обмеженої контуром L. За одиничний вектор нормалі — вектор $\overline{n}^0 = \overline{k}$ (оскільки це забезпечує потрібний обхід контуру. Поверхня Ω проектується у круг $D_{Oxy} : x^2 + y^2 \le R^2$.

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = \overline{i}\cdot 0 - \overline{j}\cdot 0 + \overline{k}\cdot(-3x^2y^2) = -3x^2y^2\overline{k}.$$

$$(\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0) = (0;0;-3x^2y^2)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3x^2y^2.$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}dxdy = \begin{vmatrix} z = z_0, \\ z_x' = z_y' = 0 \end{vmatrix} = dxdy.$$

$$\mathrm{C}_L(\overline{a}) = -3\iint\limits_\Omega x^2y^2 d\sigma \overset{[10.14.4]}{=} -3\iint\limits_{D_{Oxy}} x^2y^2 dxdy \overset{[10.7.5.2]}{=}$$

$$= -3\iint\limits_{\tilde{D}_{Oxy}} \rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi d\rho =$$

$$= -3\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho = -\frac{R^6}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \cos^4\varphi d\varphi\right) \overset{[10.4.7]}{=}$$

$$= -2R^6\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right) = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

17.6.1. Перевірити потенціальність поля

$$\overline{a} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\overline{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\overline{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\overline{k}$$

і знайти його потенціал.

Розв'язання. [10.17.1, 10.17.2.]

[*Перевіряємо умову потенціальності поля* $\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}$.**]**

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2} & \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) - \overline{j}\left(-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right) + \overline{k}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \overline{0}.$$

Поле $\overline{a}$ потенціальне.

[*Записуємо формулу для потенціалу векторного поля* $\overline{a}$ *і знаходимо його.***]**

$$U(x,y,z) \overset{[10.17.2]}{=} \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C.$$

Вибираємо за початкову точку $M_0(1;1;1)$.

$$U(x,y,z) = \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt + \int_1^y \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t^2}\right)dt + \int_1^z \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{t^2}\right)dt + C =$$

$$= \left(t + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^x + \left(\frac{t}{x} + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^y + \left(\frac{t}{y} + \frac{x}{t}\right)\Bigg|_1^z + C =$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x} - 1 + \frac{y}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1 + \frac{z}{y} - \frac{1}{y} + \frac{x}{z} - x + C =$$

$$= \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \tilde{C}.$$

За означенням $\overline{a} = \operatorname{grad} U$.

17.6.2. Чи є поле $\overline{a} = 2xy\overline{i} - y^2z\overline{j} + (z^2y - 2yz)\overline{k}$ соленоїдальним?

Розв'язання. [10.17.3.]

[*Перевіряємо умову соленоїдальності поля*** $\operatorname{div}\overline{a} = 0.$**]**

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[10.16.3]}{=} \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2y - 2yz) = \\ = 2y - 2yz + 2zy - 2y = 0.$$

Поле $\overline{a}$ — соленоїдальне.

17.6.3. Показати, що векторне поле $\overline{a} = (y+z)\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (x+y)\overline{k}$ гармонічне.

Розв'язання. [10.17.4.]

[*Перевіряємо умову гармонічності векторного поля*** $\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}, \operatorname{div}\overline{a} = 0.$**]**

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[10.16.3]}{=} \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(x+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y) = 0.$$

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[10.16.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\overline{i} - (1-1)\overline{j} + (1-1)\overline{k} = \overline{0}.$$

Векторне поле $\overline{a}$ гармонічне.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

17.7. Нехай $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}, r = \left|\overline{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Знайдіть $\operatorname{grad} u$, якщо:

1) $u = r^2$; 2) $u = \dfrac{1}{r}$.

17.8. Знайдіть дивергенцію векторного поля:

1) $\overline{a} = xyz\overline{i} + (2x + 3y + z)\overline{j} + (x^2 + z^2)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = (x + y + z)\overline{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\overline{j} + (x^3 + y^3 + z^3)\overline{k}$;

3) $\overline{a} = \dfrac{\overline{r}}{\left|\overline{r}\right|}$, де $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$; 4) $\overline{a} = \left|\overline{r}\right|\overline{r}$;

5) $\overline{a} = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$; 6) $\overline{a} = \operatorname{grad}(x^3 + y^3 + z^3)$.

17.9. Знайдіть ротор векторного поля:

1) $\overline{a} = \dfrac{y}{z}\overline{i} + \dfrac{z}{x}\overline{j} + \dfrac{x}{y}\overline{k}$ в точці $M_0(1;2;-2)$;

2) $\overline{a} = y^2\overline{i} - x^2\overline{j} + z^2\overline{k}$;

3) $\overline{a} = x^2y\overline{i} + y^2z\overline{j} + z^2x\overline{k}$;

4) $\dfrac{q}{\left|\overline{r}\right|^3}\overline{r}$, де $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

17.10. Перевірте потенціальність і знайдіть потенціал поля:

1) $\overline{a} = (y+z)\overline{i} + (z+x)\overline{j} + (x+y)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = \dfrac{yz\overline{i} + zx\overline{j} + xy\overline{k}}{1 + x^2y^2z^2}$;

3) $\overline{a} = y\overline{i} + x\overline{j} + e^z\overline{k}$; 4) $\overline{a} = \dfrac{1}{x}\overline{i} + \dfrac{1}{y}\overline{j} + \dfrac{1}{z}\overline{k}$.

17.11. З'ясуйте, чи є поле $\overline{a}(M)$ соленоїдальним, якщо:

1) $\overline{a} = x(z^2 - y^2)\overline{i} + y(x^2 - z^2)\overline{j} + z(y^2 + x^2)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = (1 + 2xy)\overline{i} - y^2z\overline{j} + (z^2y - 2yz + 1)\overline{k}$;

3) $\overline{a} = x^2yz\overline{i} + xy^2z\overline{j} - xyz^2\overline{k}$; 4) $\overline{a} = \dfrac{-y\overline{i} + x\overline{j}}{x^2 + y^2} + xy\overline{k}$;

5) $\overline{a} = \ln(x^2 + y^2)\overline{i} + 2\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}\overline{j} + 3\overline{k}$.

17.12. З'ясуйте, чи є поле $\overline{a}(M)$ гармонічним, якщо:

1) $\overline{a} = 6x^2\overline{i} + 3\cos(3x + 2z)\overline{j} + \cos(3y + 2z)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = (yz - 2x)\overline{i} + (xz + 2y)\overline{j} + xy\overline{k}$;

3) $\overline{a} = (3x^2 - 3y^2)\overline{i} + (2 - 6xy)\overline{j}$;

4) $\overline{a} = (2x\cos y - 2y)\overline{i} + (x^2 - 2\sin y)\overline{j}$.

17.13. Знайдіть потік поля $\overline{a}$ через поверхню Ω, якщо:

1) $\overline{a} = (x^2; y^2; z^2)$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні піраміди, обмеженої площинами $x + y + z = 1, x = 0,\ y = 0, z = 0$;

2) $\overline{a} = y^2 z\overline{i} - yz^2\overline{j} + x(y^2 + z^2)\overline{k}$, де Ω — повна зовнішня поверхня циліндра $y^2 + z^2 \le a^2, 0 \le x \le a$;

3) $\overline{a} = (0; y^2; z)$, де Ω — обмежена частина внутрішнього боку параболоїда $z = x^2 + y^2$, відтятої площиною $z = 2$;

4) $\overline{a} = 2x\overline{i} + y\overline{j} - z\overline{k}$, де Ω — частина внутрішнього боку параболоїда $y^2 + z^2 = Rx$, яку відтинає площина $x = R$;

5) $\overline{a} = 2x\overline{i} + 2y\overline{j} - z\overline{k}$, де Ω — повна зовнішня поверхня конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le H$;

6) $\overline{a} = x^2 y\overline{i} + xy^2\overline{j} + xyz\overline{k}$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$;

7) $\overline{a} = \overline{r} = (x; y; z)$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні $z = 4 - x^2, 2x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0$;

8) $\overline{a} = (x - z^3 y; xz; z + xy)$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6}$.

17.14. Обчисліть за Стоксовою теоремою циркуляцію векторного поля $\overline{a}$ вздовж контуру L, орієнтованого за годинниковою стрілкою, якщо дивитись із початку координат, якщо:

1) $\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}, L : \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$;

2) $\overline{a} = (y + z)\overline{i} + (z + x)\overline{j} + (x + y)\overline{k}$,
$L : \{4(x^2 + y^2) = z^2, x + y + z = 1\}$;

3) $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}, L : \{z = x^2 + y^2, z + y = 2\}$;

4) $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z\overline{k}, L : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \ge 0\}$;

5) $\overline{a} = z^2\overline{j} + x^2\overline{k}, L : \{y^2 + z^2 = 9, 3z + 4x = 5\}$;

6) $\overline{a} = zx\overline{i} + xy\overline{j} + yz\overline{k}, L : \{y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.

Відповіді

17.7. 1) $\operatorname{grad} r^2 = 2\overline{r}$; 2) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\overline{r}}{r^3}$.

17.8. 1) $yz+3+2z$; 2) $1+2y+3z^2$; 3) $\dfrac{2}{\left|\overline{r}\right|}$; 4) $4\left|\overline{r}\right|$; 5) 6; 6) $6x+6y+6z$.

17.9. 1) $-\dfrac{5}{4}\overline{i}-\overline{j}+\dfrac{5}{2}\overline{k}$; 2) $-2(x+y)\overline{k}$; 3) $-y^2\overline{i}-z^2\overline{j}-x^2\overline{k}$; 4) $\overline{0}$.

17.10. 1) $xy+yz+zx+C$; 2) $\operatorname{arctg}(xyz)+C$; 3) $xy+e^z+C$; 4) $\ln(xyz)+C$.

17.11. 1) ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так.

17.12. 1) ні; 2) так; 3) так; 4) ні.

17.13. 1) $\dfrac{1}{4}$; 2) $-\dfrac{\pi a^5}{4}$; 3) -2π; 4) πR^3; 5) πH^3; 6) $\dfrac{R^5}{3}$; 7) 40; 8) $\dfrac{11}{3}$.

17.14. 1) $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$; 2) 0; 3) 0; 4) -4π; 5) 0; 6) π.

Модуль 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

18. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінним

Навчальні задачі

18.1. Зінтегрувати диференціальне рівняння $xy' - y = y^3$.

Розв'язання. [11.2.2.]

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

[*Підставляємо в диференціальне рівняння*** $y' = \dfrac{dy}{dx}$.**]**

$$x\frac{dy}{dx} = y^3 + y.$$

[*Відокремлюємо змінні, множачи обидві частини рівняння на*** dx ***і ділячи на*** $x(y^3 + y)$.**]**

$$xdy = (y^3 + y)dx;\ \frac{dy}{y^3 + y} = \frac{dx}{x}, y \neq 0.$$

[*Інтегруючи, дістаємо загальний інтеграл ДР.***]**

$$\int \frac{dy}{y(y^2+1)} = \int \frac{dx}{x};\ \int \frac{dy}{y} - \int \frac{ydy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\ln|y| - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln|x| + \ln|C|\ (C \neq 0);$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = Cx\ (C \neq 0).$$

Для $C = 0$ одержимо функцію $y = 0$, яка є розв'язком рівняння (його можна було б втратити під час відокремлення змінних).

Загальний інтеграл рівняння

$$\frac{y}{x\sqrt{y^2+1}} = C, C \in \mathbb{R}.$$

18.2. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0, y(0) = 1$.

Розв'язання. [11.1.2, 11.2.2.]

Це задача Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$ і початковою умовою $y(0) = 1$.

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1, y \neq \pm 1.$$
$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$\arcsin y = C - \arcsin x;\ \arcsin x + \arcsin y = C.$$

Функції $x = \pm 1, y = \pm 1$ є розв'язками ДР, але ці розв'язки не можна отримати за жодного значення сталої C — це особливі розв'язки.
Частинний інтеграл знайдемо з початкової умови $y(0) = 1$:

$$\arcsin 0 + \arcsin 1 = C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язок задачі Коші задає співвідношення

$$\arcsin x + \arcsin y = \frac{\pi}{2};\ \arcsin y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \overset{①}{\Rightarrow} y = \sqrt{1-x^2}.$$

Коментар. ① $\arcsin y = \arccos x;\ y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$

18.3. Матеріальна точка маси m рухається прямолінійно під дією сили F, прямо пропорційної часу від початку руху і обернено пропорційної швидкості руху v. Встановити залежність між швидкістю і часом, якщо $v\,|_{t=0} = 0$.

Розв'язання. [11.1.2, 11.2.2.]
[*Скористаємось фізичним змістом задачі.*]
Згідно із другим законом Ньютона

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}.$$

Для знаходження $v(t)$ маємо задачу Коші:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{kt}{v}; v(0) = 0.$$

[*Розв'яжімо її.*]

$$vdv = \frac{k}{m}tdt; \int vdv = \frac{k}{m}\int tdt;$$
$$\frac{v^2}{2} = \frac{k}{m}\cdot\frac{t^2}{2} + C;$$
$$v(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Розв'язком задачі Коші є функція $v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}t.$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

18.4. Зінтегрувати ДР:

1) $(x+1)dx+(y-1)dy=0$;
2) $4(x-1)dx+(y+1)dy=0$;
3) $(y-1)dx+(x+1)dy=0$;
4) $4(y+1)dx+(x-1)dy=0$;
5) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$;
6) $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx+\cos^2 x \operatorname{ctg} y dy=0$;
7) $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$;
8) $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$;
9) $y' \operatorname{tg} x-y=a$;
10) $y'=10^{x+y}$;
11) $2x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2)$;
12) $e^{-y}(1+y')=1$;
13) $y'=\sin(x-y)$;
14) $y'=(8x+2y+1)^2$.

18.5. Розв'язати задачу Коші:

1) $y'=8\sqrt{y}, y(0)=4$;
2) $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0, y(1)=0$;
3) $y'\sin x=y\ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$;
4) $y'\sin x-y\cos x=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

18.6. 1) Знайдіть лінію, що проходить через точку $(2;3)$, кожен відрізок дотичної якої, що міститься між координатними осями, поділяється навпіл точкою дотику.

2) Знайдіть усі лінії, у яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис поділяється навпіл точкою перетину його з віссю ординат.

3) Знайдіть лінію, у якої довжина нормалі (відрізок її від точки лінії до осі абсцис) дорівнює $a=\text{const}$.

4) Матеріальна точка масою 1 г рухається прямолінійно під дією сили, що прямо пропорційна часу від моменту $t=0$, й обернено пропорційна швидкості руху точки. В момент $t=10$ с швидкість дорівнювала $0,5$ м/с, а сила — $4\cdot10^{-5}$ Н. Якою буде швидкість через хвилину після початку руху?

5) Моторний човен рухається у спокійній воді зі швидкістю $v=10$ км/год. На повному ходу його двигун вимкнули, і через $t=20$ с швидкість човна зменшилась до $v_1=6$ км/год. Враховуючи, що сила опору води рухові човна пропорційна його швидкості, знайдіть швидкість чов-

на через 2 хв після вимкнення двигуна; знайдіть також віддаль, яку пройшов човен протягом 1 хв після зупинки двигуна.

6) Згідно з Ньютоновим законом швидкість охолодження будь-якого тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою T тіла і температурою повітря T_0. Якщо температура повітря дорівнює $20°\text{C}$ і тіло протягом $20\,$хв охолоджується із 100 до $60°$, то через скільки часу його температура знизиться до $30°$?

Відповіді

18.4. 1) $(x+1)^2+(y-1)^2=C$; 2) $4(x-1)^2+(y+1)^2=C$; 3) $y=\dfrac{C}{x+1}+1$; 4) $y=\dfrac{C}{(x-1)^4}-1$; 5) $\dfrac{1-x^2}{1+y^2}=C$; 6) $\operatorname{ctg}^2 y-\operatorname{tg}^2 x=C$; 7) $\dfrac{e^y+1}{x^2+1}=C$; 8) $y=C\sqrt{e^{2x}+1}$; 9) $y=C\sin x-a$; 10) $10^x+10^{-y}=C$; 11) $\arcsin y-\ln(1+x^2)=C, y=\pm1$; 12) $e^x=C(1-e^{-y})$; 13) $x+C=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{y-x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 14) $8x+2y+1=2\operatorname{tg}(4x+C)$.

18.5. 1) $y=(4x+2)^2$; 2) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1, x=1\ \left|y\right|<1$; 3) $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. 4) $y=\sin x$.

18.6. 1) гіпербола, $xy=6$; 2) параболи $y^2=Cx$; 3) $(x-C)^2+y^2=a^2$; 4) $\approx 2{,}7$ м/с; 5) $\approx 0,467$ км/ч; $85{,}2$ м; 6) $\dfrac{dT}{dt}=k(T-T_0), T=20+80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/20}$, $t=60$ хв.

19. Однорідні диференціальні рівняння

Навчальні задачі

19.1. Розв'язати задачу Коші: $y'=-\dfrac{x+y}{x}, y(1)=\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. [11.1.2, 11.2.4.]

Це задача Коші для однорідного рівняння $y'=-1-\dfrac{y}{x}$, з початковою умовою $y(1)=\dfrac{1}{2}$. **[***Шукаємо розв'язок рівняння як* $y=u(x)x$.**]**

$$\boxed{y=u(x)x, y'=\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.}$$

Дістаємо ДР з відокремлюваними змінними.

$$x\frac{du}{dx} + u = -1 - u;$$

$$\frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x}\ (2u+1 \neq 0);\ \int\frac{du}{1+2u} = -\int\frac{dx}{x}.$$

$$\ln\left|1+2u\right| = \ln\left|C\right| - 2\ln\left|x\right|\ (C \neq 0);$$

$$1 + 2u = \frac{C}{x^2} \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2} + \frac{C}{2x^2}.$$

[*Знаходимо загальний розв'язок рівняння.*]

$$y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}\ (C = 2C_1).$$

Функція $y = -\frac{x}{2}\left(u = -\frac{1}{2}\right)$ є розв'язком ДР, коли $C = 0$. Урахуємо початкову умову:

$$\frac{1}{2} = y(1) = -\frac{1}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Розв'язок задачі Коші $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

19.2. Зінтегрувати ДР $y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

Розв'язання. [11.2.5.]

Це рівняння, що зводиться до однорідного.

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

то до ДР з відокремлюваними змінними задане рівняння зводить підстановка:

$$\boxed{z = x + y + 1,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1;}$$

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{4-3z}{z}; \frac{dz}{dx} = \frac{4-2z}{z};$$

$$-\frac{2}{z-2}dz - dz = 2dx\,(z = x + y + 1 \neq 2);$$

$$-2\ln\left|z-2\right| - z + C = 2x;$$

$$3x + y + 2\ln\left|x + y - 1\right| = C_1$$

($x + y = 1$ теж є інтегралом рівняння, який одержимо із загального, коли $C_1 = -\infty$).

Загальний інтеграл ДР $3x + y + 2\ln\left|x + y - 1\right| = C$.

19.3. Знайти криву, яка проходить через точку $A(1;1)$, якщо довжина відрізка осі Ox, відтятого довільною дотичною, дорівнює довжині цієї дотичної.

Розв'язання.

Нехай рівняння шуканої кривої $y = y(x)$, а $M_0(x_0;y_0)$ — точка дотику. Тоді рівняння дотичної до кривої має вигляд

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0),\ (y_0' = y'(x_0)).$$

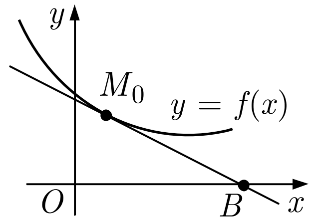


Рис. 1 до зад. 19.3

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox:

$$0 = y_0 + y_0'(x - x_0),$$

$$x = x_0 - \frac{y_0}{y_0'}.$$

Оскільки $\left|OB\right|$ — довжина відрізка, відтятого дотичною від осі Ox, а $\left|M_0B\right|$ — довжина відрізка дотичної, то за умовою задачі $\left|OB\right| = \left|M_0B\right|$. Звідки

$$\left|x_0 - \frac{y_0}{y_0'}\right| = \sqrt{\left(\frac{y_0}{y_0'}\right)^2 + y_0^2}.$$

Оскільки одержана умова виконується для довільної точки $M(x,y)$ кривої, то:

$$\left|x - \frac{y}{y'}\right| = \sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2}; \quad x^2 - \frac{2xy}{y'} + \frac{y^2}{y'^2} = \frac{y^2}{y'^2} + y^2.$$

[*Розв'яжемо ДР, яке задає криву.*]

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, y' = \frac{2\,\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}};$$

$$\boxed{y = u(x)x, y' = x\frac{du}{dx} + u.}$$

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2u}{1 - u^2};\ \frac{(1 - u^2)du}{u(u^2 + 1)} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{(1 - u^2)du}{u(u^2 + 1)} = \frac{dx}{x}.$$

$$\frac{u}{1 + u^2} = Cx;\ \frac{yx}{x^2 + y^2} = Cx;\ y = C(x^2 + y^2).$$

Оскільки крива проходить через точку $A(1;1)$, то

$$1 = C(1 + 1) \Rightarrow C = \frac{1}{2},$$

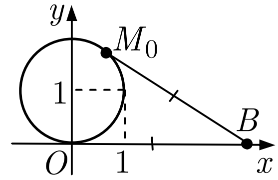


Рис. 2 до зад. 19.3

Шукана крива є колом:

$$2y = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

19.4. Зінтегрувати диференціальне рівняння

$$(x+y)dx+(x+2y)dy=0.$$

Розв'язання. [11.2.9.]

Маємо диференціальне рівняння в повних диференціалах:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Справді:

$$P(x,y)=x+y, Q(x,y)=x+2y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

[*Знаходимо загальний інтеграл диференціального рівняння за формулою [11.2.9]*.**]**

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt=C.$$

$$\int_{0}^{x} tdt+\int_{0}^{y}(x+2t)dt=C;$$

$$\frac{x^2}{2}+xy+y^2=C.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

19.5. Зінтегруйте рівняння:

1) $y'=e^{y/x}+\dfrac{y}{x}$; 2) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$;

3) $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}, x\ge 0$; 4) $xy'=y(\ln y-\ln x)$;

5) $(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy$;

6) $(4x^2+3xy+y^2)dx=(4y^2+3xy+x^2)dy$;

7) $y'=\dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$; 8) $y'=\dfrac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$;

9) $(x+y+1)dx=(2x+2y-1)dy$;

10) $(x-2y-1)dx+(3x-6y+2)dy=0$.

19.6. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x, y(1) = 0;$

2) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1;$

3) $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0, y(1) = 1;$

4) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0, y(1) = 0.$

19.7. 1) Знайдіть лінію, у якої квадрат довжини відрізка, який відтинає будь-яка дотична від осі ординат, дорівнює добуткові координат точок дотику.

2) Знайдіть лінію, у якої початкова ордината будь-якої дотичної дорівнює відповідній піднормалі.

19.8. Зінтегруйте рівняння в повних диференціалах:

1) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0;$

2) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0;$

3) $\left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx - \dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = 0;$ 4) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}.$

Відповіді

19.5. 1) $\ln|Cx| = -e^{-y/x}$; 2) $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$; 3) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2, y = x$;

4) $y = xe^{1+Cx}$; 5) $(x + y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}$; 6) $(x^2 + y^2)^3(x + y)^2 = C$;

7) $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$; 8) $(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = C$;

9) $x - 2y + \ln|x + y| = C$; 10) $x + 3y - \ln|x - 2y| = C$.

19.6. 1) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; 2) $y^3 = y^2 - x^2$; 3) $\ln|y| + 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2$; 4) $y = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$.

19.7. 1) $x = Ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}$; 2) $x = y\ln|Cy|$.

19.8. 1) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$; 2) $x^y = C$; 3) $x + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$; 4) $\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} = C$.

20. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі

Навчальні задачі

20.1.1. Розв'язати задачу Коші $y' - \dfrac{y}{x} = x, y(1) = 0.$

Розв'язання. [11.2.7.]

Маємо задачу Коші для лінійного ДР щодо $y(x)$.

[*1-й метод.* ***Метод Бернуллі.*****]**

[*Шукаємо розв'язок ДР $y(x)$ як добуток двох функцій $u(x)v(x)$, одну з яких можна вибрати довільно.***]**

$$\boxed{y = u(x)v(x), y' = u'v + uv';}$$

$$u'v + \underbrace{uv' - \frac{uv}{x}}_{\text{групуємо}} = x; \qquad \underbrace{u\left(v' - \frac{v}{x}\right)}_{\substack{\text{вибираємо функцію} \\ v(x) \text{ так, щоб в дужках} \\ \text{був нульовий вираз}}} + vu' = x;$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0,^{①} \\ vu' = x.^{②} \end{cases}$$

За $v(x)$ беремо частинний розв'язок рівняння $\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{v}{x} = 0:$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow v = x.$$

$$x\frac{du}{dx} = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow u(x) = x + C.$$

[*Записуємо загальний розв'язок ДР.***]**

$$y = x(x + C) = x^2 + Cx.$$

[*Визначаємо сталу з початкової умови.***]**

$$y(1) = 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1.$$

[*2-й метод.* ***Метод Лаґранжа (варіації довільної сталої).*****]**

[*Записуємо однорідне рівняння і розв'язуємо його як ДР з відокремлюваними змінними.*]

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \ \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}; \ \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\ln\left|y\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|;$$

$$y = Cx.$$

Розв'язок задачі Коші $y = x^2 - x$.

[*Варіюємо сталу — шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді*]

$$\boxed{y = C(x)x, \quad y' = C'(x)x + C(x).}$$

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x;$$

$$C'(x)x = x;\ C'(x) = 1;\ C(x) = \int dx = x + A.$$

[*Підставляємо знайдену функцію* $C(x)$.]

$$y(x) = (x + A)x = x^2 + Ax.$$

[*Визначаємо сталу з початкової умови.*]

$$y(1) = 1 + A = 0 \Leftrightarrow A = -1.$$

Розв'язок задачі Коші $y = x^2 - x$.

Коментар. ① Функцію $v(x)$ вибираємо з метою найбільшого спрощення диференціального рівняння. Вона є частинним розв'язком ДР з відокремлюваними змінними $(C = 0)$.

② Функцію $u(x)$ знаходимо з умови, щоб функція $u(x)v(x)$ була розв'язком вихідного ДР. Функція $u(x)$ є загальним розв'язком ДР з відокремлюваними змінними.

20.1.2. Розв'язати задачу Коші $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}, y(2) = 1$.

Розв'язання. [11.2.7.]

Це задача Коші для лінійного ДР щодо $x(y)$:

$$x' + \frac{x}{y} = 2\ln y + 1, x(1) = 2.$$

[*Розв'язуємо ДР методом Лагранжа, користуючись формулою для розв'язку однорідного ДР.*]

$$p(y) = \frac{1}{y}; \quad u(y) = e^{-\int\frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}.$$

$$\boxed{x(y) = \frac{v(y)}{y}, \quad x'(y) = \frac{v'}{y} - \frac{v}{y^2}.}$$

$$\frac{v'}{y} - \frac{v}{y^2} + \frac{v}{y^2} = 2\ln y + 1;$$

$$dv = (2\ln y + 1)ydy;\ v = y^2\ln y + C,$$

$$x(y) = y\ln y + \frac{C}{y}.$$

[*Справджуємо початкову умову.*]

$$2 = x(1) = C \Rightarrow 2 = C.$$

Розв'язок задачі Коші $x = y\ln y + \dfrac{2}{y}$.

20.2. Знайти силу струму в електричному колі з опором $R = \text{const}$, самоіндукцією $L = \text{const}$ і ЕРС $E = E_0 = \text{const}$, якщо $i(0) = I_0$. Сила струму $i(t)$ справджує рівняння $\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{R}{L} i(t) = \dfrac{E_0}{L}$.

Розв'язання.

Загальний розв'язок заданого рівняння ①

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + Ce^{-Rt/L}.$$

Використовуючи початкову умову, маємо:

$$C = I_0 - \frac{E_0}{R}.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші $i(t) = \dfrac{E_0}{R} + \left(I_0 - \dfrac{E_0}{R}\right)e^{-Rt/L}$. ①

Коментар. ① Це лінійне ДР щодо невідомої $i = i(t)$. Його можна розв'язати за методом Бернуллі або Лаґранжа.

② Бачимо, що із плином часу t $(t \to +\infty)$ сила струму $i(t)$ наближається до сталого значення $\dfrac{E_0}{R}$.

20.3. Зінтегрувати ДР $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Розв'язання. [11.2.8.]

Це рівняння Бернуллі, яке розв'язуємо методом Бернуллі:

$$\boxed{y = u(x)v(x), y' = u'v + uv'.}$$

$$u(v' + 2vx) + vu' = 2x^3u^3v^3 \Rightarrow \begin{cases} v' + 2vx = 0, \\ vu' = 2x^3u^3v^3. \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = 0 \Rightarrow v = e^{-x^2};$$

$$\frac{du}{dx} = 2x^3u^3e^{-2x^2}, \frac{du}{u^3} = 2x^3e^{-2x^2}dx;$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}\int x^2 de^{-2x^2} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} - \frac{1}{4}e^{-2x^2} + C,$$

$$\frac{1}{u^2} = x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C_1,$$

$$\frac{1}{y^2} = C_1e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}.$$

Розв'язок $y = 0$ можна одержати, коли $C_1 = \infty$.

Загальний інтеграл ДР:

$$\left(Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}\right)y^2 - 1 = 0.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

20.4. Зінтегруйте рівняння:

1) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

2) $y' + 2xy = e^{-x^2} x \sin x$;

3) $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$;

4)* $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{e^x(x-2)}{x}$;

5) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$;

6) $y' = \dfrac{1}{x\cos y + a\sin 2y}$;

7) $y' = \dfrac{1}{\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y}$;

8) $(e^{-y^2/2} - xy)dy - dx = 0$.

20.5. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}, y(0) = 0$;

2) $y' + y\cos x = \cos x, y(0) = 1$;

3) $t(1+t^2)dx = (x + xt^2 - t^2)dt, x(1) = -\dfrac{\pi}{4}$;

4) $yx' + x = 4y^3 + 3y^2, y(2) = 1$.

20.6. 1) Знайдіть лінію, у якої початкова ордината будь-якої дотичної на дві одиниці менше за абсцису точки дотику.

2) Знайдіть силу струму $i(t)$ в електричному колі з опором R і самоіндукцією L, за умови, що $E(t) = E_0 \sin 2\pi nt, i(0) = I_0$, де $I_0, E_0 = \mathrm{const}$.

3) Знайдіть лінію, у якої будь-яка дотична перетинає вісь ординат у точці, однаково віддаленій від точки дотику і від початку координат.

4) Знайдіть лінію, у якої площа трапеції, утвореної осями координат, ординатою довільної точки і дотичною в цій точці, дорівнює половині квадрата абсциси.

5) Знайдіть лінію, для якої площа фігури, обмеженої віссю абсцис, двома ординатами і дугою MM' цієї лінії, пропорційна дузі MM'.

6) Точка масою $m = 6$ г рухається прямолінійно. На неї діє сила, пропорційна часові (коефіцієнт пропорційності $k_1 = 4$). Крім того, на точку діє опір середовища, пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності $k_2 = 2$). Знайдіть залежність швидкості від часу, вважаючи, що в початковий момент швидкість дорівнює нулеві.

20.7. Зінтегруйте рівняння:

1) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -y^2$; 2) $y' - y\operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$;

3) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; 4) $y' - \dfrac{4y}{x} = x\sqrt{y}$;

5) $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$; 6) $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}$.

20.8. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2)y^{2/3}, y(0) = 0$;

2) $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1$.

Відповіді

20.4. 1) $y = e^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$; 2) $y = (x + C)(1 + x^2)$; 3) $y = C(x^2 + 1) + x^3 + x$;

4) $y = Cx^2 + e^x$; 5) $x = Ce^{2y} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4}$; 6) $x = -2a(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}$;

7) $x = (C - \cos y)\sin y$; 8) $x = (C + y)e^{-y^2/2}$.

20.5. 1) $y = \dfrac{x}{\cos x}$; 2) $y = 1$; 3) $x = -t \operatorname{arctg} t$; 4) $x = y^2 + y^3$.

20.6. 1) $y = Cx - x\ln|x| - 2$; 3) $x^2 + y^2 = Cx$; 4) $y = x + Cx^2$; 5) ланцюгова лінія;

6) $m\dfrac{dv}{dt} = k_1 t - k_2 v, v(0) = 0, v(t) = 2\left(t - 3 + 3e^{-t/3}\right)$.

20.7. 1) $\dfrac{1}{y} = (x+1)(C + \ln(x+1))$; 2) $\dfrac{1}{y} = (x + C)\cos x$; 3) $\sqrt{y} = \operatorname{tg} x + \dfrac{\ln|\cos x| + C}{x}$;

4) $2\sqrt{y} = x^2 \ln x + Cx^2$; 5) $x^3 e^{-y} = C + y$; 6) $x^2 = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)$.

20.8. 1) $y = \left(\dfrac{2}{9}e^{x^3} - \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{2}{9}\right)^3, y = 0$; 2) $y = \dfrac{1}{\ln x + 1}$.

21. Рівняння, що дозволяють пониження порядку

Навчальні задачі

21.1. Розв'язати задачу Коші $y''' = \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0.$

Розв'язання. [11.3.1.]

Маємо ДР вигляду $y''' = f(x)$.

[*Розв'яжемо ДР безпосереднім інтегруванням, поступово визначаючи значення сталих.***]**

$$y'' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1;$$
$$y''(0) = 0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$
$$y'' = \frac{1}{2}\sin 2x;\ y' = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2;$$
$$y'(0) = 0 = -\frac{1}{4} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{4}.$$
$$y' = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4};\ y = -\frac{1}{4}\int (\cos 2x - 1)dx = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + C_3;$$
$$y(0) = 0 + C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = 1.$$

Розв'язок задачі Коші $y = -\dfrac{1}{8}\sin 2x + \dfrac{1}{4}x + 1.$

21.2. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' = \dfrac{y'}{x} + x.$

Розв'язання. [11.3.2.]

Це ДР, яке не містить невідомої функції в явному вигляді $F(x, y', y'') = 0.$

Позначаємо **[***запроваджуючи нову функцію***]**

$$\boxed{y' = p(x), y'' = p'(x).}$$
$$p' = \frac{p}{x} + x.$$

Одержали лінійне ДР 1-го порядку, яке розв'яжемо методом Бернуллі [3.2.8]:

$$\boxed{p = u(x)v(x), p' = u'v + uv';}$$
$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + uv' = x \Rightarrow \begin{cases} u' - \dfrac{u}{x} = 0, \\ uv' = x. \end{cases}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}; \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}; u(x) = x.$$
$$xv' = x; v' = 1; v(x) = x + C_1;$$
$$y' = p(x) = x(C_1 + x) = C_1 x + x^2;$$

$$y = \int (C_1 x + x^2) dx = \frac{C_1}{2} x^2 + \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Загальний розв'язок рівняння $y = \frac{C_1}{2} x^2 + \frac{x^3}{3} + C_2$.

21.3. Розв'язати задачу Коші: $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Розв'язання. [11.3.3.]

Це задача Коші для ДР, яке не містить аргументу функції в явному вигляді $F(y, y', y'') = 0$. Позначаємо **[***запроваджуючи нову функцію***]**

$$\boxed{y' = p(y);\ y''_{xx} = p\frac{dp}{dy}.}$$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^2 \ln y;$$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = \frac{y \ln y}{p}.$$

Одержане рівняння Бернуллі розв'яжемо методом Бернуллі:

$$\boxed{p = uv, p' = u'v + uv'.}$$

$$v\left[u' - \frac{u}{y}\right] + uv' = \frac{y \ln y}{uv} \Rightarrow \begin{cases} u' - \dfrac{u}{y} = 0, \\ uv' = \dfrac{y \ln y}{uv}. \end{cases}$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0; \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}; u = y.$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\ln y}{yv}; vdv = \frac{\ln y dy}{y}; \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 y + \frac{1}{2}C_1.$$

$$p(y) = \pm y\sqrt{\ln^2 y + C_1}.$$

Визначимо сталу C_1 з початкової умови: $p(y(0)) = 1 \Rightarrow p(1) = 1$.

$$p(1) = \pm\sqrt{C_1} = 1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = +y\sqrt{\ln^2 y + 1}; \frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y + 1}} = dx;$$

$$x = \int \frac{d \ln y}{\sqrt{\ln^2 y + 1}} = \ln\left|\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1}\right| + C_2.$$

Визначимо сталу C_2 з умови $y(0) = 1$.

$$0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Розв'язок задачі Коші $x = \ln\left|\ln y + \sqrt{1 + \ln^2 y}\right|$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

21.4. Зінтегруйте рівняння:

1) $y'' = x + \sin x$; 2) $y'' = \operatorname{arctg} x$;

3) $y^{\mathrm{IV}} = x$; 4) $y''' = \cos 2x$;

5) $xy'' = y'$; 6) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$;

7) $y'' - 2\operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$; 8) $xy''' + y'' = 1 + x$;

9) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$; 10) $y'''^2 + y''^2 = 1$.

21.5. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y'' = xe^x, y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y''(x+2)^5 = 1, y(-1) = \dfrac{1}{12}, y'(-1) = -\dfrac{1}{4}$;

3) $y''(x^2+1) = 2xy',\ y(0) = 1, y'(0) = 3$;

4) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ y(2) = 0, y'(2) = 4$;

5) $2y'' = 3y^2, y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$;

6) $y^3y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

Відповіді

21.4. 1) $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$; 2) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2}(x^2-1) - \dfrac{x}{2}\ln(1+x^2) + C_1x + C_2$;

3) $y = \dfrac{x^5}{120} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$; 4) $y = -\dfrac{1}{8}\sin 2x + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

5) $y = C_1x^2 + C_2$; 6) $y = \dfrac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$; 7) $y = -\dfrac{\sin^3 x}{3} + C_1\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}\right) + C_2$;

8) $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{2} + C_1x\ln|x| + C_2x + C_3$; 9) $y\cos^2(x + C_1) = C_2$;

10) $y = \sin(C_1 + x) + C_2x + C_3$.

21.5. 1) $y = (x-2)e^x + x + 2$; 2) $y = \dfrac{1}{12(x+2)^3}$; 3) $y = x^3 + 3x + 1$;

4) $y = \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \dfrac{16}{5}$; 5) $y = \dfrac{4}{(x+4)^2}$; 6) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

22. Лінійні однорідні диференціальні рівняння. Метод Ейлера

Навчальні задачі

22.1.1. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок ДР $y'' + y' - 2y = 0$.

Розв'язання. [11.5.]

Маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

[*Складаємо характеристичне рівняння.***]** ①

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

[*Розв'язуємо рівняння і виписуємо відповідні кореням характеристичного рівняння лінійно незалежні розв'язки ЛНДР.***]**

$$\lambda_1 = 1 \leftrightarrow y_1 = e^x,$$
$$\lambda_2 = -2 \leftrightarrow y_2 = e^{-2x}.$$

ФСР диференціального рівняння [1.5.8]: $\{e^x, e^{-2x}\}$.

Загальний розв'язок ДР [11.5.9]: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Коментар. ① Замінюємо $y \leftrightarrow 1, y' \leftrightarrow \lambda, y'' \leftrightarrow \lambda^2$.

22.1.2. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок ДР $y'' + 2y' + 26y = 0$.

Розв'язання. [11.5.]

Маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 26 = 0;$$
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 5i \leftrightarrow y_{1,2} = e^{-x}\begin{Bmatrix}\cos 5x \\ \sin 5x\end{Bmatrix}.$$

ФСР рівняння [1.5.8]: $\{e^{-x}\cos 5x, e^{-x}\sin 5x\}$.

Загальний розв'язок [1.5.9]: $y = C_1e^{-x}\cos 5x + C_2e^{-x}\sin 5x$.

22.1.3. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок ДР $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. [3.5.]

Маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0;$$
$$\lambda_{1,2} = 3 \leftrightarrow y_1 = e^{3x}, y_2 = xe^{3x}.$$

ФСР рівняння [1.5.8]: $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$.

Загальний розв'язок [1.5.9]: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$.

22.2. Розв'язати задачу Коші:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 4.$$

Розв'язання. [11.5.]

Маємо задачу Коші для ЛОДР 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1 \leftrightarrow e^x;\ \lambda_2 = 2 \leftrightarrow e^{2x};\ \lambda_3 = 3 \leftrightarrow e^{3x}.$$

ФСР рівняння [11.5.8]: $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$.

Загальний розв'язок рівняння [11.5.9]:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

[*Враховуємо початкові умови.***]**

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x};$$

$$y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x}.$$

Використовуючи початкові умови, одержуємо систему щодо C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0, \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -4, \\ C_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші $y = 2e^x - 4e^{2x} + 2e^{3x}$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

22.3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

1) $y'' + y' - 2y = 0$;
2) $y'' - 9y = 0$;
3) $y'' - 4y' = 0$;
4) $y'' + 9y' = 0$;
5) $y'' - 2y' + y = 0$;
6) $4\dfrac{d^2x}{dt^2} - 20\dfrac{dx}{dt} + 25x = 0$;
7) $y'' + 4y = 0$;
8) $y'' + y = 0$;
9) $y'' + 6y' + 13y = 0$;
10) $4y'' - 8y' + 5y = 0$;
11) $y''' + 9y' = 0$;
12) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$;
13) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$;
14) $y^{(4)} - 16y = 0$.

22.4. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10$;

2) $y'' + 4y' = 0, y(0) = 7, y'(0) = 8$;

3) $4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$;

4) $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$;

5) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$;

6) $y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15$.

22.5. Складіть ЛОДР, знаючи їхні характеристичні рівняння:

1) $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$; 2) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$;

3) $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$; 4) $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$;

5) $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$.

22.6. Складіть ЛОДР, якщо відомі корені характеристичних рівнянь, і запишіть їхні загальні розв'язки:

1) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$; 2) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$;

3) $\lambda_1 = 3 - 2i, \lambda_2 = 3 + 2i$; 4) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$.

Відповіді

22.3. 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$; 2) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$; 3) $y = C_1 e^{4x} + C_2$; 4) $y = C_1 e^{-9x} + C_2$; 5) $y = e^x(C_1 + C_2 x)$; 6) $x = (C_1 + C_2 t)e^{5t/2}$; 7) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$; 8) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; 9) $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; 10) $y = e^x\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right)$; 11) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3$; 12) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$; 13) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + (C_3 + C_4 x)e^{-2x}$; 14) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

22.4. 1) $y = 4e^x + 2e^{3x}$; 2) $y = 9 - 2e^{-4x}$; 3) $y = e^{-x/2}(2 + x)$; 4) $y = 2e^{3x}x$; 5) $y = \sin 2x$; 6) $y = 3e^{-2x}\sin 5x$.

22.5. 1) $9y'' - 6y' + y = 0$; 2) $y'' + 3y' + 2y = 0$; 3) $2y'' - 3y' - 5y = 0$; 4) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$; 5) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

22.6. 1) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$;

2) $y'' - 2y' + y = 0,\ y = (C_1 x + C_2)e^x$;

3) $y'' - 6y' + 13y = 0,\ y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;

4) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\ y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$.

23. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

Навчальні задачі

23.1. Знайти загальний розв'язок ЛНДР $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Розв'язання. [11.6.1, 11.6.2.]
[*Оскільки права частина ЛНДР має загальний вигляд, то загальний розв'язок рівняння знайдемо методом Лаґранжа.***]**
[*Крок 1.* *Розв'язуємо відповідне однорідне рівняння.***]**

$$y'' + y = 0;$$

$$\lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm i \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \cos x, \\ y_2 = \sin x. \end{array}\right.$$

[*Крок 2.* *Записуємо вигляд, у якому шукатимемо загальний розв'язок ЛНДР.***]**

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

[*Крок 3.* *Функції $C_1(x), C_2(x)$ знаходимо з алгебричної системи*

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

*яку можна розв'язати за методом Крамера.***]**

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos^3 x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos^3 x} \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}; \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

[*Крок 4.* *Знаходимо $C_1(x), C_2(x)$.***]**

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = -\frac{1}{2\cos^2 x} + A_1;$$

$$C_2 = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + A_2.$$

Загальний розв'язок ЛНДР

$$y = \left(A_1 - \frac{1}{2\cos^2 x}\right)\cos x + \left(\operatorname{tg} x + A_2\right)\sin x.$$

23.2. Записати вигляд частинного розв'язку ДР $y''' - 5y'' = x^2 - 1$ (з невизначеними коефіцієнтами).

Розв'язання. [11.7.]

Маємо ЛНДР 2-го порядку зі спеціальною правою частиною.

[*Розв'язуємо характеристичне рівняння для однорідного рівняння.*]

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 5.$$

[*Аналізуємо праву частину диференціального рівняння.*]

Функція $f(x) = x^2 - 1$ є правою частиною спеціального вигляду — «многочлен 2-го порядку»; йому відповідає число $k = 0$ [11.7.1].

[*Перевіряємо чи відбувається збіг числа k з розв'язками характеристичного рівняння.*]

Є «резонанс» 2-го порядку, оскільки $\lambda_1 = \lambda_2 = k$.

[*Записуємо шаблон для частинного розв'язку ЛНДР.*]

$$y_{\text{част. неодн.}} = x^2(Ax^2 + Bx + C).$$

23.3.1. Знайти загальний розв'язок ДР $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$.

Розв'язання. [11.6.3, 11.7.]

Маємо ЛНДР 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

[***Крок 1.*** *Записуємо теорему про структуру розв'язку ЛНДР.*]

$$\boxed{y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}}$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо загальний розв'язок відповідного ЛОДР методом Ейлера).*]

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0;$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0;$$

$$\lambda_1 = 0 \leftrightarrow y_1 = 1;\ \lambda_2 = 2 \leftrightarrow y_2 = e^{2x};\ \lambda_3 = 3 \leftrightarrow y_3 = e^{3x}.$$

ФСР рівняння: $\{1, e^{2x}, e^{3x}\}$.

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

[***Крок 3.*** *Записують частинний розв'язок ЛНДР з невизначеними коефіцієнтами.*]

Оскільки права частина

$$f(x) = 6x^2 + 2x - 5$$

є многочленом 2-го степеня, а число $k = 0$ є коренем кратності $s = 1$ характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\boxed{y_* = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.}$$

[*Крок 4.* Визначаємо коефіцієнти, підставляючи частинний розв'язок у ЛНДР.**]**

$$y_*' = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$
$$y_*'' = 6Ax + 2B;$$
$$y_*''' = 6A.$$
$$6A - 5\Big(6Ax + 2B\Big) + 6\Big(3Ax^2 + 2Bx + C\Big) = 6x^2 + 2x - 5.$$
$$18Ax^2 + (12B - 30A)x + (6A - 10B + 6C) \equiv 6x^2 + 2x - 5.$$

[*Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях.***]**

$$\begin{cases} 18A = 6, \\ 12B - 30A = 2, \\ 6A - 10B + 6C = -5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \\ B = 1, \\ C = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{\text{част. неодн.}} = y_* = x\left(\frac{x^2}{3} + x + \frac{1}{2}\right).$$

[*Крок 5.* *Записуємо загальний розв'язок ЛНДР.***]**

$$y_{\text{заг. неодн.}} = \underbrace{C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}}_{\text{заг. одн.}} + \underbrace{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x}_{\text{част. неодн.}}.$$

23.3.2. Знайти загальний розв'язок ДР $y''' + y'' - 6y' = (6x + 7)e^{-x}$.

Розв'язання. [11.6.3, 11.7.]

Маємо ЛНДР 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами зі спеціальною правою частиною.

$$\boxed{y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}}$$
$$y''' + y'' - 6y' = 0;$$
$$\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = 0;$$
$$\lambda_1 = 0 \leftrightarrow y_1 = 1;\ \lambda_2 = 2 \leftrightarrow y_2 = e^{2x};\ \lambda_3 = -3 \leftrightarrow y_3 = e^{-3x}.$$
$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-3x}.$$

Оскільки права частина ДР має вигляд [11.7.2]:

$$f(x) = (6x + 7)e^{-x},$$

число $k = -1$ не є коренем характеристичного рівняння, а $f(x) = 6x + 7$ — многочлен 1-го степеня, то частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді:

$$\boxed{y_* = (Ax + B)e^{-x}.}$$
$$y_*' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = e^{-x}(A - B - Ax);$$

$$y_*'' = -e^{-x}\Big(A - B - Ax\Big) - Ae^{-x} = e^{-x}(Ax + B - 2A);$$
$$y_*''' = -e^{-x}(Ax + B - 2A) + Ae^{-x} = e^{-x}\Big(3A - B - Ax\Big).$$

[*Підставимо ці вирази в рівняння та скоротимо на* e^{-x}.**]**

$$6Ax - 5A + 6B \equiv 6x + 7.$$

$$\begin{cases} 6A = 6, \\ 6B - 5A = 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 2. \end{cases}$$

$$y_{\text{част. неодн.}} = y_* = (2x + 4)e^{-x}.$$

$$y_{\text{заг. неодн.}} = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-3x} + (x + 2)e^{-x}.$$

23.4. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = \sin 2x, y(0) = 1, y'(0) = -2.$$

Розв'язання. [11.6.3, 11.7.]

Маємо задачу Коші для ЛНДР 2-го порядку зі спеціальною правою частиною.

$$y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}$$

$$y'' + 4y = 0;$$

$$\lambda^2 + 4 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i \leftrightarrow \left[\begin{aligned} y_1 &= \cos 2x, \\ y_2 &= \sin 2x. \end{aligned}\right.$$

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Оскільки права частина ДР має вигляд [11.7.5]

$$f(x) = \sin 2x = 0\cos 2x + 1\sin 2x,$$

числа $k = 2i$ є коренями кратності $s = 1$ характеристичного рівняння, то частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді:

$$\boxed{y_* = x\Big(A\cos 2x + B\sin 2x\Big).}$$

Звідси:

$$y_*' = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x);$$
$$y_*'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 4x(-A\cos 2x - B\sin 2x).$$

Підставимо ці вирази в рівняння

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) +$$
$$+4x(A\cos 2x + B\sin 2x) \equiv \sin 2x;$$

$$-4A = 1, 4B = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, B = 0.$$

$$y_{\text{чн. неодн.}} = y_* = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Загальний розв'язок ЛНДР

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x.$$

[*Визначаємо значення довільних сталих, тобто частинний розв'язок ЛНДР, який справджує початкові умови.*]

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x.$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1, \\ y'(0) = 2C_2 - \dfrac{1}{4} = -2 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -\dfrac{7}{8}. \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші:

$$y = \cos 2x - \frac{7}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

23.5. Складіть загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 12e^{-x}$;
2) $f(x) = 3e^{2x}$;
3) $f(x) = 2x + 1$;
4) $f(x) = 4x^2 - 2x - 1$;
5) $f(x) = -2xe^{x}$;
6) $f(x) = e^{3x}(2x + 1)$;
7) $f(x) = 10 \sin x$;
8) $f(x) = 20 \cos 2x - 40 \sin 2x$;
9) $f(x) = 4x - 12e^{-2x} + 4$;
10) $f(x) = 12 \operatorname{sh} x$.

23.6. Складіть загальний розв'язок рівняння $2y'' + 5y' = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 15x^2 + 2x + 1$;
2) $f(x) = 29 \cos x$;
3) $f(x) = 5e^{-2,5x} - 25 \sin \dfrac{5x}{2}$;
4) $f(x) = 50 \operatorname{ch} \dfrac{5x}{2}$.

23.7. Складіть загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 4$;
2) $f(x) = 9e^{-x}$;
3) $f(x) = 6e^{2x}$;
4) $f(x) = 32 \operatorname{sh} 2x$.

23.8. Складіть загальний розв'язок рівняння $y'' + y = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 2x^3 - x + 2$;
2) $f(x) = -8\cos 3x$;
3) $f(x) = \cos x$;
4) $f(x) = 2\sin x - 2e^{-x}$.

23.9. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2},\ y(0) = 3, y'(0) = -5,5$;
2) $y'' - y' = 2(1-x),\ y(0) = 1, y'(0) = 1$;
3) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),\ y(0) = 2, y'(0) = 2$;
4) $y'' + y = -\sin 2x,\ y(\pi) = y'(\pi) = 1$;
5) $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x),\ y(0) = -4, y'(0) = 5$;
6) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x,\ y(\pi) = \pi e^{\pi}, y'(\pi) = e^{\pi}$;
7) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x},\ y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 1$;
8) $y''' - y' = 3(2 - x^2),\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;
9) $y^{(4)} - y = 8e^x, y(0) = 0,\ y'(0) = 2, y''(0) = 4, y'''(0) = 6$.

23.10. Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

1) $y'' + 4y = -\operatorname{ctg}^2 2x$;
2) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$;
3) $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$;
4) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$;
5) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$;
6) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{4 - x^2}}$;
7) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$;
8) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$.

Відповіді

23.5. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y_*$, 1) $y_* = 2e^{-x}$; 2) $y_* = 3xe^{2x}$; 3) $y_* = x + 2$; 4) $y_* = 2x^2 + 5x + 5$; 5) $y_* = e^x(x^2 + 2x)$; 6) $y_* = e^{3x}(x - 1)$; 7) $y_* = \sin x + 3\cos x$; 8) $y_* = -\sin 2x - 7\cos 2x$; 9) $y_* = 2x + 5 - e^{-2x}$; 10) $y_* = -e^{-x} - 6xe^x$.

23.6. $y = C_1 + C_2 e^{-5x/2} + y_*$, 1) $y_* = x^3 - x^2 + x$; 2) $y_* = 5\sin x - 2\cos x$;

3) $y_* = \cos\dfrac{5x}{2} + \sin\dfrac{5x}{2} - xe^{-5x/2}$; 4) $y_* = e^{5x/2} - 5xe^{-5x/2}$.

23.7. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + y_*$, 1) $y_* = 1$; 2) $y_* = e^{-x}$; 3) $y_* = 3x^2 e^{2x}$; 4) $y_* = 8x^2 e^{2x} - e^{-2x}$.

23.8. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y_*$, 1) $y_* = 2x^3 - 13x + 2$; 2) $y_* = \cos 3x$; 3) $y_* = \dfrac{x}{2}\sin x$;

4) $y_* = -x\cos x - e^{-x}$.

23.9. 1) $y = (1 + x)e^{-3x/2} + 2e^{-5x/2}$; 2) $y = e^x + x^2$; 3) $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1)$;

4) $y = \dfrac{1}{3}\sin 2x - \dfrac{1}{3}\sin x - \cos x$; 5) $y = 2e^x + (\sin x - 2\cos x)e^{-x} - 4$;

6) $y = -[\pi\cos x + (\pi + 1 - 2x)\sin x]e^x$; 7) $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$; 8) $y = e^x + x^3$;

9) $y = 2xe^x$.

23.10. 1) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\cos 2x \cdot \ln\left|\operatorname{tg} x\right|$;

2) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{4}{3}\cos x\sqrt{\operatorname{ctg} x}$;

3) $y = e^x(x + C_1) - (e^x + 1)\ln(e^x + 1) + C_2$;

4) $y = \dfrac{1}{2}e^x\left(\arcsin e^x + e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + C_1\right) + \dfrac{1}{3}\sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2$;

5) $y = e^x(C_1 + C_2 x - \ln\sqrt{x^2 + 1} + x\operatorname{arctg} x)$;

6) $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x\arcsin\dfrac{x}{2}\right)$; 7) $y = C_1 e^x - \cos e^x + C_2$;

8) $y = (C_1 - x)e^{-x}\cos x + \left(C_2 + \ln\left|\sin x\right|\right)e^{-x}\sin x$.

24. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Навчальні задачі

24.1.1. Розв’язати систему ДР $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$ методом виключення і матричним методом.

Розв’язання. [111.8.]

Це однорідна система ЛДР. ①

Метод виключення. [*Виражаємо з 2-го рівняння* x *і підставляємо його в 1-ше рівняння. Дістанемо ЛОДР 2-го порядку щодо функції* $y(t)$.]

$$\begin{cases} x = \dfrac{y' - 3y}{3}, \\ x' = 5x + 8y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{y''}{3} - y', \\ \dfrac{y''}{3} - y' = 5\left(\dfrac{y' - 3y}{3}\right) + 8y. \end{cases}$$

$$y'' - 8y' - 9y = 0;$$
$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0;$$
$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 9;$$
$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}.$$

[*Знаходимо функцію* $x(t)$.]

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t};$$
$$x(t) = \frac{y' - 3y}{3} = \frac{-C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t} - 3C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{9t}}{3} =$$
$$= -\frac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}.$$

Відповідь. $x = -\frac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}, y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Матричний метод.

[***Крок 1.*** *Записуємо систему в матричному вигляді.*]

$$\vec{x}' = A\vec{x},$$

де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, A = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}.$

[***Крок 2.*** *Записуємо характеристичне рівняння.*]

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

[***Крок 3.*** *Розв'язуємо характеристичне рівняння.*]

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 9. \end{array}\right.$$

[***Крок 4.*** *Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні і різні, то знаходимо власні вектори, які відповідають власним числам.*]

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{4}{3} C_1 \\ \alpha_2 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 9$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2C_1 \\ \alpha_2 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[***Крок 4.*** *Записуємо загальний розв'язок системи.*]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}, \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \end{cases} C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Коментар. ① У системі x та y є функціями змінної $t: x = x(t), y = y(t)$.
Із 1-го рівняння, яке містить x', можна виключити змінну y (або з 2-го рівняння, яке містить y', — змінну x).

24.1.2. Розв'язати систему ДР $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y + e^t. \end{cases}$

Розв'язання.
Це лінійна неоднорідна система ДР.
[*Розв'яжемо її методом виключення змінних. Виражаємо з 1-го рівняння функцію y.***]**

$$\begin{cases} y = x - x', \\ y' = x + y + e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = x' - x'', \\ y' = x + y + e^t. \end{cases}$$

$$x' - x'' = x + (x - x') + e^t;$$

$$x'' - 2x' + 2x = -e^t.$$

[*Для функції $x(t)$ маємо ЛНДР 2-го порядку зі спеціальною правою частиною.***]**

$$\boxed{x(t) = x_{\text{заг. одн.}}(t) + x_{\text{част. неодн.}}(t).}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0;\ \lambda_{1,2} = 1 \pm i;$$

$$x_{\text{заг. одн.}} = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t.$$

$$f(t) = e^t, k = 1 \neq \lambda_{1,2}.$$

$$\boxed{x_* = Ae^t.}$$

$$x_*' = Ae^t; x_*'' = Ae^t.$$

$$Ae^t - 2Ae^t + 2Ae^t = -e^t;$$

$$A = -1.$$

$$x_{\text{част. неод.}} = -e^t.$$

$$x = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t - e^t.$$

[*Знаходимо функцію $y(t)$.***]**

$$x' = C_1 e^t (\cos t - \sin t) + C_2 e^t (\sin t + \cos t) - e^t;$$

$$y = x(t) - x'(t) = C_1 e^t \sin t - C_2 e^t \cos t.$$

Відповідь. $x = C_1 e^t \cos t + C_2 \sin t - e^t, y = C_1 e^t \sin t - C_2 e^t \cos t.$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

24.2. Знайдіть загальний розв'язок системи:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + 40e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + 10e^{-2t}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

24.3. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 4;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = -2, y(0) = 1.$

Відповіді

24.2. 1) $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = (2C_1t + 2C_2 + C_1)e^{-t}, \\ y = (C_1t + C_2)e^{-t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \\ y = e^t(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = e^{-2t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \\ y = \dfrac{1}{5}e^{-2t}((4C_1 - 3C_2)\cos 3t + (3C_1 + 4C_2)\sin 3t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + 7e^t + 2e^{-2t}, \\ y = \dfrac{1}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} + e^t + 3e^{-2t}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}, \\ y = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$

24.3. 1) $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = (\sin t - 2\cos t)e^{-t}, \\ y = e^{-t}\cos t. \end{cases}$

Додаток

Д1. Тригонометричні формули

❶ ***Основні тригонометричні тотожності.***

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

② $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$;

③ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

④ $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

❷ ***Формули додавання.***

① $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$;

② $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$;

③ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$;

④ $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$

❸ ***Формули кратних аргументів.***

① $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

❹ ***Формули зниження степеня.***

① $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$;

② $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

❺ ***Формули половинного аргументу***

① $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$;

② $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$;

③ $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1 - t^2}, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

❻ ***Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.***

① $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$;

② $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$;

③ $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$

❼ ***Перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.***

① $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cos \dfrac{x \mp y}{2}$;

② $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x - y}{2} \cos \dfrac{x + y}{2}$;

③ $\cos x - \cos y = 2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{y - x}{2}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

Д2. Основні правила і формули диференціювання

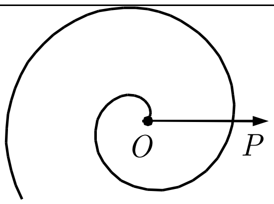
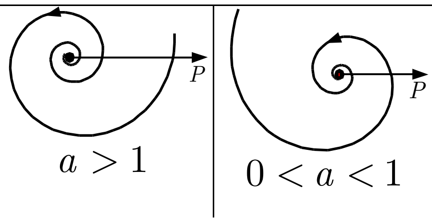
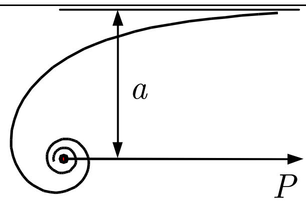
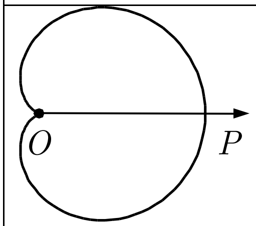
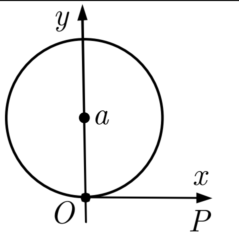
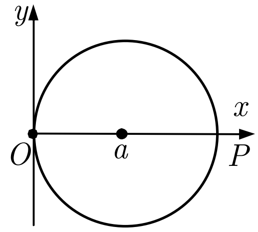
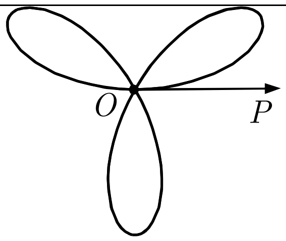
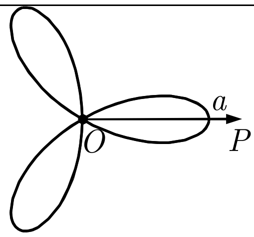
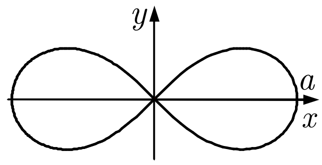
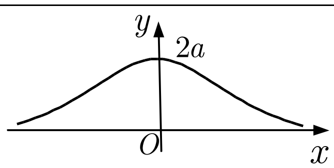
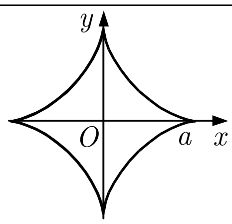
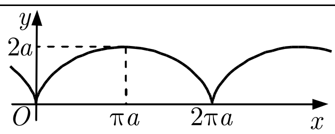
$(Cu)' = Cu', C = \mathrm{const}$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$\big(f(u)\big)'_x = f'_u \cdot u'_x$	$y' = y(\ln y)'$

$(C)' = 0, C = \mathrm{const}$	$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a > 0$	$(e^u)' = e^u u'$
$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
$(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$	$(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$
$(\mathrm{th}\, u)' = \dfrac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$	$(\mathrm{cth}\, u)' = -\dfrac{u'}{\mathrm{sh}^2 u}$

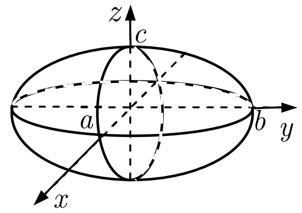
Д3. Основні формули інтегрування

$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ $(\alpha \neq -1)$
$\int e^{u} du = e^{u} + C$	$\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$
$\int \sin u du = C - \cos u$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = C - \operatorname{ctg} u$
$\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$	$\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$
$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$	$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = C - \operatorname{cth} u$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a}\right\rvert + C,$ $a \neq 0$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C,$ $a \neq 0$
$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C,$ $a \neq 0$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C,$ $a \neq 0$
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\int \operatorname{tg} u du = C - \ln\lvert\cos u\rvert$	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$

Д4. Деякі визначні криві

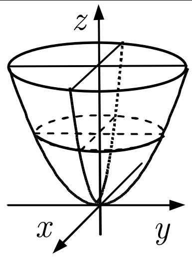
 ***Спіраль Архімеда*** $\rho = a\varphi$	 ***Логарифмічна спіраль*** $\rho = a^{\varphi}$	 ***Гіперболічна спіраль*** $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$
 ***Кардіоїда*** $\rho = 2a(\cos\varphi + 1)$	 ***Коло*** $x^2 + y^2 = 2ay$, $\rho = 2a\sin\varphi, a > 0$	 ***Коло*** $x^2 + y^2 = 2ax$, $\rho = 2a\cos\varphi, a > 0$
 ***Трипелюсткова роза*** $\rho = a\sin 3\varphi$	 ***Трипелюсткова роза*** $\rho = a\cos 3\varphi$	 ***Лемніската Бернуллі*** $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$
 ***Кучер Аньєзі*** $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$	 ***Астроїда*** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} t \in [0; 2\pi]$	 ***Циклоїда*** $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

Д5. Визначні поверхні і просторові криві



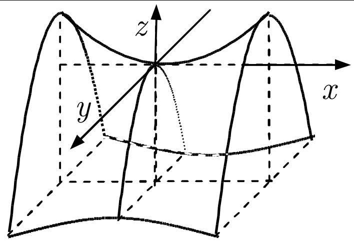
Еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



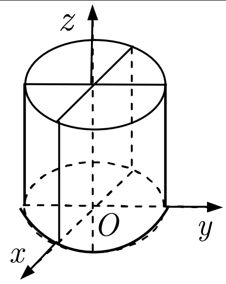
Еліптичний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



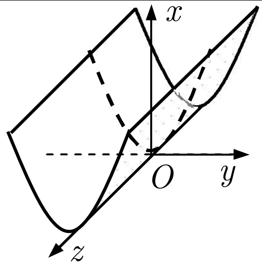
Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$



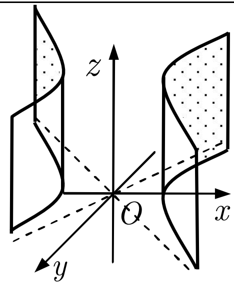
Еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



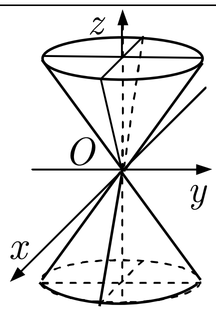
Параболічний циліндр

$$y^2=2px$$



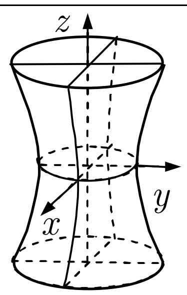
Гіперболічний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



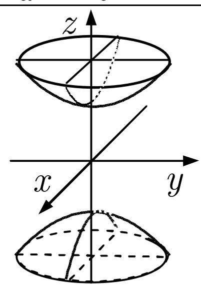
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



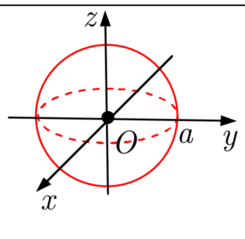
Однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



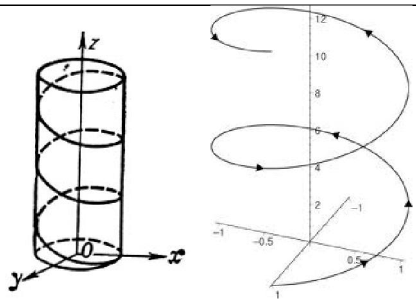
Двопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



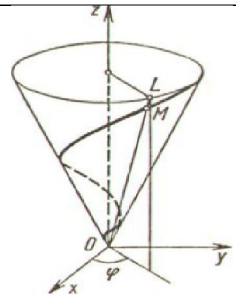
Сфера

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$



Циліндрична гвинтова лінія

$$\begin{cases} x=a\cos t, y=a\sin t, z=\frac{ht}{2\pi} \end{cases}$$



Конічна гвинтова лінія

$$\begin{cases} x=at\cos t, y=at\sin t, \\ z=bt \end{cases}$$

Список літератури

1. *Диференціальне* та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Теорія поля. Диференціальні рівняння: Зб. завдань до типової розрахункової роботи для студ. I курсу техн. ф-тів / Уклад.: С. В. Горленко, Л. Б. Федорова, В. О. Гайдей. — К.: ІВЦ «Політехніка», 2002. — 65 с.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1989. — 464 с.
3. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука, 1967. — 608 с.
4. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика: Навч. посіб. — К.: А.С.К., 2001. — 648 с.
5. *Краснов М. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Высш. шк., 1983. — 128 с.
6. *Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.* Вища математика: У 2 ч. — К.: Техніка, 2000. — Ч. 1. — 591 с.; Ч. 2. — 791 с.
7. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 3 т. — М.: Наука, 1985.
8. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: В 2 ч. — М.: Рольф, 2000. — Ч. 2. — 256 с.
9. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980. — 350 с.
10. *Шипачев В. С.* Высшая математика. — М.: Высш. шк., 2001. — 479 с.
11. *Бутузов В. Ф., Крутицкая И. И.* Математический анализ в вопросах и задачах. Функции многих переменных. — М.: Высш. шк., 1988. — 288 с.
12. *Гусак А. А.* Ряды и кратные интегралы. — Минск: БГУ, 1970. — 384 с.
13. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. — М.: Высш. шк., 2001. — Ч. 2. — 410 с.
14. *Жевняк Р. М., Карпук А. А.* Высшая математика: В 5 ч. — Минск.: Вышэйш. шк., 1984—1988. — Ч. 3. — 1985. — 208 с.; Ч. 4. — 1987. — 240 с.
15. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике: В 5 ч. — Харьков: ХГУ, 1973. — Ч. 2. — 367 с.; Ч. 3 — 374 с.; Ч. 4. — 436 с.
16. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985. — 446 с.
17. *Вища* математика: Зб. задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. — К.: Вища шк., 1999. — 480 с.
18. *Сборник* задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др. — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.
19. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: В 3 ч. / В. А. Болгов, А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин и др. — М.: Наука, 1986. — Ч. 2. — 368 с.
20. *Сборник* задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — СПб.: Наука, 1994. — 496 с.
21. *Сборник* задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М.: Высш. шк., 1978. — 288 с.