ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Функція $F(x)$ *називається* **первісною функції** $f(x)$ **на проміжку** $(a;b)$**,** *якщо* $F(x)$ *диференційована на* $(a;b)$ *і* $F'(x)=f(x)$.

Якщо $F(x)$ *– первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$ *і* C *– довільна стала, то вираз* $F(x)+C$ *називається* **невизначеним інтегралом функції** $f(x)$ *на цьому проміжку і позначають* $\int f(x)dx$.

Інтегрування функції — *знаходження первісних функції.*

«Неінтегровні» інтеграли — *існують, але через основні елементарні функції не виражаються.*

Криволінійна трапеція — *плоска фігура, що обмежена лініями:* $y=f(x)\geq 0,\quad y=0, x=a, x=b$.

Інтегральна сума — *сума виду* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ *при* $\lambda \to 0$ $\left(\lambda=\lambda(\tau)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\Delta x_i\right)$, *яка не залежить ні від* τ *-розбиття, ні від вибору точок* ξ_i, *то ця границя називається* **визначеним інтегралом функції** $f(x)$ **на відрізку** $[a;b]$ *і позначається символом* $\int\limits_a^b f(x)dx$

Інтегровна функція — *функція, для якої існує визначений інтеграл.*

Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею інтегрування — *інтеграл виду* $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ *її називають* **невласним інтегралом першого роду** *(або невласним інтегралом на нескінченному проміжку інтегрування) і позначають* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Невласний інтеграл від розривної функції в точці $x=a$ — *це* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Збіжний невласний інтеграл — *це такий, для якого відповідна границя існує.*

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Зв'язна множина — *це множина точок, будь-які дві з котрих можна сполучити ламаною так, щоб усі точки ламаної належали цій множині.*

Обмежена множина — *це множина, яка лежить повністю всередині деякого кола скінченного радіуса.*

δ **-окіл точки** $M_0(x_0;y_0)$ — *це всі внутрішні точки круга з центром* M_0 *радіуса* δ *, тобто точки координати яких задовольняють нерівність* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$.

Внутрішня точка множини — *це така точка, для якої існує* δ *-окіл, усі точки якого належать множині.*

Зовнішня точка — *це така точка, для якої існує такий* δ *-окіл, усі точки якого не належать множині.*

Межова точка області — *це точка, будь-який окіл якої містить точки, які належать і не належать області.*

Межа — *це сукупність усіх межових точок.*

Замкнена область — *це множина, до якої приєднані всі її межові точки.*

Якщо кожній парі чисел $(x;y)\in D$ *за певним законом відповідає число* z *, то кажуть, що на множині* D *визначено* **функцію** z **від двох змінних** x **і** y *і записують* $z=f(x;y)$.

Областю визначення функції $z=f(x;y)$ *називають множину пар* $(x;y)$ *значень* x *та* y *, для яких функція* $z=f(x;y)$ *визначена.*

Число A *називається* **границею функції двох змінних** $z=f(x;y)$ **в точці** $M_0(x_0;y_0)$**,** *якщо для кожного числа* $\varepsilon>0$ *знайдеться число* $\delta>0$ *таке, що для всіх точок* $M(x;y)\in D$*, які задовольняють умову* $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$*, виконується нерівність* $|f(x;y)-A|<\varepsilon$.

Функція $z=f(x;y)$ *називається* **нескінченно малою в точці** $M_0(x_0;y_0)$**,** *якщо* $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=0$.

Функція $z=f(x;y)$ *називається* **неперервною в точці** $M_0(x_0;y_0)$**,** *якщо* $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=f(x_0;y_0)$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}$*, то вона називається* **частинною похідною функції** $z=f(x;y)$ **в точці** $M(x;y)$ **по змінній** x**.**

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}$*, то вона називається* **частинною похідною функції** $z=f(x;y)$ **в точці** $M(x;y)$ **по змінній** y**.**

Функція $z=f(x;y)$ *називається* **диференційованою в точці** M**,** *якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді* $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$*, де* A*,* B *— дійсні числа, які не залежать від* Δx *та* Δy*,* α*,* β *— нескінченно малі при* $\Delta x\to 0$ *і* $\Delta y\to 0$ *функції.*

Повний приріст — *це різниця* $f(x_0+\Delta x;\,y_0+\Delta y)-f(x_0;\,y_0)$*, де* Δx*,* Δy *— прирости, що надаються точці* $(x_0;y_0)$ *так, щоб точка* $(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ *не виходила за межі околу точки* $(x_0;y_0)$.

Повним диференціалом dz **диференційованої в точці** M **функції двох змінних** $z = f(x;y)$ *називається головна лінійна частина приросту функції, тобто* $A\Delta x + B\Delta y$ *або* $z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$.

Повний диференціал функції двох змінних $z = f(x;y)$ *обчислюється за формулою* $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ *при* $\Delta l \to 0$, *то цю границю називають* **похідною функції** $u(x;y;z)$ **в точці** $M(x;y;z)$ **за напрямом вектора** $\vec{l}$ *і позначають* $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$.

Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ *характеризує швидкість змінювання функції* $z = f(x;y)$ *у точці* $M_0(x_0;y_0)$ *за напрямом* $\vec{l} = (\cos\alpha;\ \cos\beta)$ *і обчислюється за формулою* $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta$.

Градієнт — *це вектор з координатами* $\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0};\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\right)$, *який характеризує напрям максимального зростання функції* $z = f(x;y)$ *у точці* $M_0(x_0;\ y_0)$: $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z\Big|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} \vec{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \vec{j}$.

Дотичною площиною до поверхні S **у точці** $M_0(x_0;y_0)$ *називають площину* P, *у якій розташовані дотичні до все можливих кривих, які проведені на* S *через* $M_0(x_0;y_0)$.

Нормаллю *називають пряму, що проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *перпендикулярно до дотичної площини.*

Дотична площина до поверхні $F(x;y;z)$ **у точці** $(x_0;y_0;z_0)$ — *це площина, що задана рівнянням* $F'_x(x_0;y_0;z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0;y_0;z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0;y_0;z_0)(z - z_0) = 0$.

Точка $M_0(x_0;y_0)$, *в якій частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю називаються* **стаціонарними точками.**

Безумовний екстремум — *це мінімум або максимум функції* $z = f(x,y)$.

Якщо для всіх точок (x,y) *околу точки* (x_0,y_0) *виконується нерівність* $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ $\left(f(x;y) \le f(x_0;y_0)\right)$, *тоді ця точка* (x_0,y_0) *називається* **точкою максимуму (мінімуму) функції** $z = f(x,y)$.

Умовний екстремум — *це екстремум функції* $z = f(x,y)$, *що досягається за умови, що змінні* x *і* y *пов'язані рівнянням* $\varphi(x,y) = 0$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальне рівняння першого порядку *називається рівняння виду* $F(x;y;y')=0$*, яке пов'язує незалежну змінну* x*, невідому функцію* $y=y(x)$ *та її похідну* y'.

Розв'язком диференціального рівняння $y'=f(x;y)$ *на деякому інтервалі* $(a;b)$ *називається диференційована на цьому інтервалі функція* $y=\varphi(x)$*, яка при підстановці в рівняння обертає його в тотожність по* x *на* $(a;b)$.

Графік розв'язку диференціального рівняння *називається інтегральною кривою рівняння.*

Функція $y=\varphi(x;C)$*, яка залежить від аргументу* x *і довільної сталої* C*, називається* **загальним розв'язком диференціального рівняння** $y'=f(x;y)$ **в області** G**,** *якщо вона задовольняє дві умови:*

1) *функція* $\varphi(x;C)$ *є розв'язком диференціального рівняння при будь-якому значенні сталої* C *з деякої множини;*
2) *для довільної точки* $(x_0,y_0)\in G$ *можна знайти таке значення* $C=C_0$*, що функція* $y=\varphi(x;C_0)$ *задовольняє початкову умову:* $\varphi(x_0;C_0)=y_0$.

Частинним розв'язком диференціального рівняння $y'=f(x;y)$ *називається функція* $y=\varphi(x;C_0)$*, яка утворюється із загального розв'язку* $y=\varphi(x;C)$ *при певному значенні сталої* $C=C_0$.

Задача знаходження розв'язку рівняння $y'=f(x;y)$*, який задовольняє початкову умову* $y(x_0)=y_0$*, називається* **задачею Коші.**

Рівняння виду $y'=f(x)\cdot\varphi(y)$*, де* $f(x)$ *і* $\varphi(y)$ *– задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається* **диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними**.

Диференціальне рівняння $y'=f(x;y)$ *називається* **однорідним***, якщо функція* $f(x;y)$ *є однорідною функцією нульового виміру.*

Функція $f(x;y)$ *називається* **однорідною функцією** n**-го виміру відносно змінних** x **та** y, *якщо для довільного числа* $t\neq 0$ *виконується тотожність* $f(tx;ty)=t^n f(x;y)$.

Рівняння виду $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$ *називається* **рівнянням у повних диференціалах**, *якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції* $u(x;y)$*, тобто* $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$.

Функція $\mu(x;y)$ *називається* **інтегрувальним множником рівняння** $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$**,** *якщо після домно жування на неї цього рівняння воно стає рівнянням у повних диференціалах.*

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку *називається рівняння виду* $y'+p(x)y'=q(x)$*, де* $p(x)$ *і* $q(x)$ *– задані і неперервні на деякому проміжку функції.*

Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається **порядком цього рівняння.**

Функції $y_1(x)$ $y_2(x)$ *називаються* **лінійно незалежними на проміжку** $(a;b)$**,** *якщо тотожність* $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)\equiv 0$*, де* α_1*,* α_2 *– дійсні числа, справджується тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Функції $y_1(x)$ $y_2(x)$ *називаються* **лінійно залежними на проміжку** $(a;b)$**,** *якщо хоча б одне з чисел* α_1 *чи* α_2 *відмінне від нуля і виконується тотожність* $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)\equiv 0$.

Якщо $y_1 = y_1(x)$ *та* $y_2 = y_2(x)$ *– функції від* x*, то визначник* $W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ *називається* **визначником Вронського**.