3.1 Означення невизначеного інтеграла. Основні властивості. Методи інтегрування

Функція $F(x)$, диференційована на проміжку I, похідна якої в кожній точці проміжку дорівнює заданій функції $f(x)$, називається **первісною** функції $f(x)$ у цьому проміжку, тобто

$$F'(x) = f(x) \quad \text{або} \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad x \in I$$

Приклад. Знайти первісну для функції $f(x) = \cos x$.

$$F(x) = \sin x, \text{ бо } F'(x) = (\sin x)' = \cos x .$$

Однак первісною буде і функція $F(x) = \sin x + 2$, бо $F'(x) = (\sin x + 2)' = \cos x$, а також $F(x) = \sin x + C$, де $C = const$, оскільки $F'(x) = (\sin x + C)' = \cos x$.

Виходячи з прикладу, можна сказати, що у даної функції нескінченна множина первісних і всі вони відрізняються одна від одної на сталу величину.

Теорема 1 **(про множину первісних).** Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку I, то

1) $F(x) + C$ — також первісна для $f(x)$ на проміжку I;

2) будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$ на проміжку I. (Тут $C = const$ називається довільною сталою.)

Наслідок. Дві будь-які первісні для однієї й тієї самої функції на проміжку I відрізняються між собою на сталу величину.

Означення. Операція знаходження первісних для функції $f(x)$, або операція, обернена до диференціювання, називається *інтегруванням*.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку.

Для розв'язування задачі інтегрування функції достатньо знайти одну будь-яку первісну на розглядуваному проміжку, наприклад $F(x)$, тоді (за теоремою про множину первісних) $F(x) + C$ — загальний вигляд всієї множини первісних на цьому проміжку.

Означення. Функція $F(x) + C$, що являє собою загальний вигляд всієї множини первісних для функції $f(x)$ на проміжку I, називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на проміжку I і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (F'(x) = f(x)), \tag{3.1}$$

де $\int$ — знак невизначеного інтеграла;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що функція $y = F(x) + C$ є рівняння однопараметричної сім'ї кривих, які утворюються одна з одної паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 3.1).

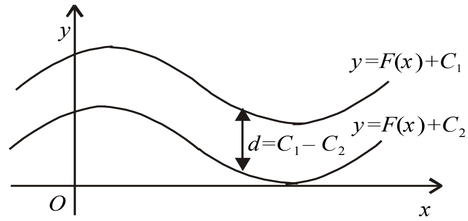

Рис. 3.1

Теорема 2 (Коші). Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

Властивості невизначеного інтеграла

I. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$.

II. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

III. $\int dF(x) = F(x)+C$.

IV. Сталий множник, що не дорівнює нулю, можна виносити з-під знака інтеграла, тобто $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx,\ \ k\neq 0$.

V. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто $\int\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0\cdot dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha\neq -1$;
4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$;
5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
6. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
7. $\int e^x dx = e^x + C$;
8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, a\neq 1$;
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
10. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

13. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;

14. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$;

15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$;

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$, зокрема $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

20. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$, зокрема $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

21. $\int shx\, dx = chx + C$;

22. $\int chx\, dx = shx + C$;

23. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -\operatorname{ct} hx + C$;

24. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = \operatorname{t} hx + C$.

Приклад 3.1. Обчислити $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \\ \frac{1}{x^n} = x^{-n} \end{array} \right| = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = 1{,}5\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Коментар. Скористаємось табличним інтегралом 3 ($\alpha = -\frac{1}{3}$).

Приклад 3.2. Обчислити $\int 3^x dx$.

Розв'язання.

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Коментар. Скористаємось табличним інтегралом 8 ($a = 3$).

Приклад 3.3. Обчислити $\int \frac{dx}{x^2 + 5}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C .$$

Коментар. Скористаємось табличним інтегралом 20 ($a=\sqrt{5}$).

Зауваження. Існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони не обчислюються в скінченному вигляді або ’’не беруться’’. Наприклад, доведено, що ’’не беруться’’ такі інтеграли:

$\int e^{-x^2} dx$ – інтеграл Пуассона;

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ – інтегральний синус;

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ – інтегральний косинус;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм;

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ – інтеграли Френеля

та ряд інших інтегралів.

Вказані інтеграли хоча й існують, але не є елементарними функціями. В подібних випадках первісна являє собою деяку нову, неелементарну функцію, тобто функцію, яка не виражається через скінченне число арифметичних операцій і суперпозицій над основними елементарними функціями.

Основні методи інтегрування функцій

Розглянемо основні методи інтегрування: 1) безпосереднє інтегрування; 2) метод підстановки; 3) інтегрування частинами.

Метод безпосереднє інтегрування

Цей метод ґрунтується на загальних властивостях невизначеного інтеграла і таблиці основних інтегралів. У окремих випадках використовують метод зображення у вигляді суми функцій.

Приклад 3.4. Обчислити інтеграл.

Розв’язання.

$$\int \left(e^x + \sin x - \frac{1}{x}\right) dx = \int e^x dx + \int \sin x dx - \int \frac{1}{x} dx = e^x - \cos x - \ln|x| + C .$$

Коментар. Скористаємось властивістю невизначеного інтеграла V , а потім табличними інтегралами відповідно 7, 9, 6.

Приклад 3.5. Обчислити інтеграл.

Розв’язання.

$$\int \left(1 + 7\cos x - \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx = \int 1 dx + 7\int \cos x dx - 2\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = x + 7\sin x + 2ctgx + C .$$

Коментар. Скористаємось властивостями невизначеного інтеграла IV і V , а потім табличними інтегралами відповідно 2, 10, 11.

Приклад 3.6. Обчислити інтеграл.

Розв’язання.

$$\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{5}{x^2-9}-\frac{3}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+5\int\frac{1}{x^2-3^2}dx-3\int\frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}}dx=tgx+$$
$$+5\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-3\cdot\arcsin\frac{x}{4}+C=tgx+\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-3\arcsin\frac{x}{4}+C\,.$$

Коментар. Скористаємось властивостями невизначеного інтеграла IV і V , а потім табличними інтегралами відповідно 12, 17, 19.

Приклад 3.7. Обчислити інтеграл.

Розв'язання.

$$\int\frac{1\cdot dx}{x^2\left(1+x^2\right)}=\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{1+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}-\frac{x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$
$$=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$$

Коментар. Чисельник запишемо у вигляді $1=\left(1+x^2\right)-x^2$ і почленно розділивши на знаменник, отримаємо різницю двох табличних інтегралів 4, 20.

Приклад 3.8. Обчислити інтеграл.

Розв'язання.

$$\int\frac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=$$
$$=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C.$$

Коментар. Використавши основну тригонометричну тотожність, чисельник запишемо у вигляді $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ і почленно розділивши на знаменник, отримаємо суму двох табличних інтегралів 11, 12.

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування)

Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема 3. **Якщо $f(x)$ — неперервна, а $x=\varphi(t)$ має неперервну похідну, то:**

$$\int f(x)dx=\left|\begin{array}{l}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt;\\ t=\varphi^{-1}(x)\end{array}\right|=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (3.2)$$

Наслідок.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\left|\varphi(x)=t\right|=\int f(t)dt. \qquad (3.3)$$

Приклад 3.9.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}=\left|\begin{array}{l}x=t^6,\\ dx=6t^5dt;\\ t=\sqrt[6]{x}\end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3\left(t^2+1\right)}=6\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$
$$=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\left(t-\operatorname{arctg}t\right)+C=6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Варіант заміни змінної інтегрування $\varphi(x)=t$ (3.3) зручний тоді, коли підінтегральний вираз можна розкласти на два множники: $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)\,dx$. Суть *методу заміни змінної під знаком інтеграла* полягає у введенні під знак інтеграла такої змінної, що після підстановки і заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної дістають табличний інтеграл.

Наведемо декілька прикладів. Якщо під знаком інтеграла є вираз

$$\frac{1}{x}dx \quad \left(\frac{1}{x}dx=d(\ln x)\Rightarrow \varphi'(x)dx=d\varphi(x)\right),$$

то потрібно робити підстановку $\ln x=t$.

Аналогічно:

$\dfrac{dx}{\cos^2 x}=d(tgx)$, підстановку $tgx=t$,

$dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)$, підстановку $ax+b=t$,

$\sin x dx=-d(\cos x)$, підстановку $\cos x=t$,

$x^2dx=\dfrac{1}{3}d\left(x^3\right)$, підстановку $x^3=t$,

$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d(\arcsin x)$, підстановку $\arcsin x=t$.

Приклад 3.10.

а) $$\int x^3\cdot\cos\left(x^4+2\right)dx=\int\cos\left(x^4+2\right)\cdot x^3dx=\left|\begin{array}{c} t=x^4+2\\ dt=4x^3dx\\ x^3dx=\dfrac{1}{4}dt\end{array}\right|=\int\cos t\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\int\cos tdt=$$

$$=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin\left(x^4+2\right)+C.$$

Коментар. Оскільки $x^3dx=\dfrac{1}{4}d\left(x^4+2\right)$, то робимо підстановку $x^4+2=t$.

б) $$\int\frac{arctgx}{x^2+1}dx=\int arctgx\cdot\frac{dx}{x^2+1}=\left|\begin{array}{l} t=arctgx\\ dt=\dfrac{dx}{x^2+1}\end{array}\right|=\int t\cdot dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{arctg^2x}{2}+C.$$

Коментар. Оскільки $\dfrac{dx}{x^2+1}=d(arctgx)$, то робимо підстановку $arctgx=t$.

в) $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}=\left|t=x^2+1\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2+1}+C.$$

Коментар. Оскільки $x\,dx=\dfrac{1}{2}d\left(x^2+1\right)$, то робимо підстановку $x^2+1=t$.

г) $$\int\frac{5x}{x^4+1}dx=\frac{5}{2}\int\frac{dx^2}{\left(x^2\right)^2+1}=\left|t=x^2\right|=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{5}{2}arctgt+C=\frac{5}{2}arctgx^2+C$$

Коментар. Оскільки $x\,dx=\dfrac{1}{2}d\left(x^2\right)$, то робимо підстановку $x^2=t$.

д) $$\int\sin(7x+5)dx=\left|\begin{array}{c} t=7x+5\\ dt=7dx\\ dx=\dfrac{dt}{7}\end{array}\right|=\int\sin t\cdot\frac{dt}{7}=\frac{1}{7}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{7}\cos t+C=-\frac{1}{7}\cos(7x+5)+C.$$

Зауваження. Коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x)=ax+b,$ дістаємо:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C. \qquad (3.4)$$

Аналогічно

$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}\int f(ax)\cdot d(ax)=\frac{1}{a}F(ax)+C.$$

$$\int f(x+b)dx=\int f(x+b)\cdot d(x+b)=F(x+b)+C.$$

Приклад 3.11.

а) $\int\cos 6x\,dx=\left|a=6\right|=\frac{1}{6}\sin 6x+C$.

б) $\int e^{-4x}\,dx=\left|a=-4\right|=-\frac{1}{4}e^{-4x}+C$.

в) $\int\frac{dx}{\cos^2(x+5)}=\left|a=1,\ b=5\right|=\int\frac{d(x+5)}{\cos^2(x+5)}=tg(x+5)+C$.

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

$$d\varphi(x)=d(\varphi(x)+C).$$

Приклад 3.12.

$$\int\frac{\sin xdx}{1+3\cos x}=\int\frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(3\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C.$$

Далі розглянемо формулу, яка в деяких випадках буде корисною при обчисленні інтегралів

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left|f(x)\right|+C. \qquad (3.5)$$

Приклад 3.13. Обчислити інтеграли за допомогою формули (3.5):

а). $\int\frac{dx}{x-5}$; б). $\int\frac{dx}{-3x+10}$; в). $\int\frac{x\cdot dx}{x^2-12}$; г). $\int\frac{dx}{x\cdot\ln x}$.

а) Якщо $f(x)=x-5$, то $f'(x)=1$, тому

$$\int\frac{dx}{x-5}=\int\frac{1}{x-5}dx=\ln\left|x-5\right|+C.$$

б) Якщо $f(x)=-3x+10$, то $f'(x)=-3$, тому

$$\int\frac{dx}{-3x+10}=-\frac{1}{3}\int\frac{-3}{-3x+10}dx=-\frac{1}{3}\ln\left|-3x+10\right|+C.$$

в) Якщо $f(x)=x^2-12$, то $f'(x)=2x$, тому

$$\int\frac{x\cdot dx}{x^2-12}=\int\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{x^2-12}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-12}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-12\right|+C.$$

г) Якщо $f(x)=\ln x$, то $f'(x)=\frac{1}{x}$, тому $\int\frac{dx}{x\cdot\ln x}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx=\ln\left|\ln x\right|+C$.

Зауваження. Специфіка інтегрування невизначеного інтеграла не залежить від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи сама є функцією (на підставі інваріантності форми запису першого диференціалу), тому, наприклад:

$$\left(\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right)\Rightarrow\left(\int (u(x))^{\alpha}du(x)=\frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int (tgx)^{\alpha}d(\mathrm{tg}\,x)=\frac{(\mathrm{tg}\,x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

У такому розумінні слід розглядати і всю таблицю інтегралів.

Приклад 3.14.

а) $\int\left(1+x^2\right)^{10}x\,dx=\left|\begin{array}{l}1+x^2=t\\ dt=2xdx\\ xdx=\dfrac{dt}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int t^{10}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{10+1}}{10+1}+C=\frac{t^{11}}{22}+C=\frac{\left(1+x^2\right)^{11}}{22}+C.$

б) $\int \sin^5 x\cos xdx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{array}\right|=\int t^5dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{6}\sin^6 x+C.$

Метод інтегрування частинами

Теорема 4. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні, то:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int vdu. \qquad (3.6)$$

Метод інтегрування частинами доцільно застосовувати, коли інтеграл, який знаходиться праворуч у формулі (3.6) буде простіше, ніж заданий. На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати за таким правилом: при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u\cdot dv$, тобто $f(x)dx=u\cdot dv$; при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx, інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Цей метод використовують до таких інтегралів:

– $\int P_n(x)\cdot\sin x\,dx$, $\int P_n(x)\cdot\cos x\,dx$, $\int P_n(x)\cdot a^x\,dx$, $\int P_n(x)\cdot e^x\,dx$, $\int P_n(x)\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}$, $\int P_n(x)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня. У цих інтегралах $u=P_n(x)$, а за беремо dv – вираз, який залишився;

– $\int P_n(x)\cdot\ln x\,dx$, $\int P_n(x)\cdot\arcsin x\,dx$, $\int P_n(x)\cdot\arccos x\,dx$, $\int P_n(x)\cdot arctgx\,dx$, $\int P_n(x)\cdot arcctgx\,dx$. У цих інтегралах $dv=P_n(x)dx$, а за беремо u – вираз, який залишився;

– у інтегралах $\int e^x\cdot\sin x\,dx$, $\int e^x\cdot\cos x\,dx$ після інтегрування частинами одержується рівняння, із якого знаходять шуканий інтеграл.

Приклад 3.15. Обчислити інтеграли:

а) $\int x\sin x\,dx$; б) $\int (3x+7)\cos 2xdx$.

Розв'язання.

а) $\int x\sin xdx=\left|\begin{array}{ll}u=x & dv=\sin x\,dx\\ du=dx & v=-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C.$

б) $\int (3x+7)\cdot\cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = 3x+7 & dv = \cos 2x\,dx \\ du = 3dx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3x+7)\sin 2x - \frac{3}{2}\int \sin 2x\,dx =$

$= \frac{1}{2}(3x+7)\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C$.

Приклад 3.16. Обчислити інтеграли:

а) $\int x^3 \cdot \ln x\,dx$; б) $\int x \,\mathrm{arctg}\, x dx$.

Розв'язання.

а) $\int x^3\cdot \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = x^3\,dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{x^4\cdot\ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}x^4\cdot\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$

$= \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$.

б) $\int x\,\mathrm{arctg}\, x dx = \begin{vmatrix} u = \mathrm{arctg}\, x & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x^2+1} & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx =$

$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}(x - acrtgx) + C$.

Інколи доводиться метод інтегрування частинами застосовувати кілька разів, що ілюструє даний приклад.

Приклад 3.17.

Розв'язання.

$\int x^2 e^{3x}dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = e^{3x}dx \\ du = 2x\,dx & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{3x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{3}e^{3x} -$

$-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) = e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C.$

Приклад 3.18.

Розв'язання.

$I = \int e^x\cdot\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x\,dx & v = e^x \end{vmatrix} = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx =$

$= \begin{vmatrix} u = \sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos xdx & v = e^x \end{vmatrix} = e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x) - I$.

Коментар. Застосувавши формулу (3.6) двічі, отримали рівняння $I = e^x(\cos x + \sin x) - I$, із якого знаходимо $I = \int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C$.