3.2 Інтегрування деяких функцій

Операція інтегрування значно складніша, ніж операція диференціювання. У диференціальному численні таблиця похідних і правила диференціювання функцій дають змогу знайти похідну довільної диференційованої функції. В інтегральному численні таких простих і універсальних правил інтегрування не існує. Відсутнє, наприклад, загальне правило інтегрування добутку двох функцій, навіть якщо первісні кожної з них відомі і ми це побачили в пункті 3.1. Те саме стосується частки двох функцій і складеної функції. Інтегрування вимагає, так би мовити, індивідуального підходу до кожної підінтегральної функції.

3.2.1 Інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен

Розглянемо інтеграли виду

1. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Спочатку розв'язання краще коефіцієнт a при x^2 винести за знак інтеграла, а потім виділити повний квадрат у знаменнику. Після виділення повного квадрата в квадратному тричлені інтеграл зводиться до одного з табличних інтегралів 17, або 20.

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$$

Введемо позначення

$$\left|\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right|=k^2\ \left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2\right),\qquad x+\frac{b}{2a}=t.$$

Тоді інтеграл набирає вигляду $I=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$.

Знак плюс чи мінус береться залежно від того, якими будуть корені знаменника: комплексними чи дійсними.

Якщо корені квадратного тричлена комплексні, то

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{ak}arctg\frac{t}{k}+C,$$

а якщо дійсні, то

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C.$$

Звідси випливає, що інтеграли виду $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ обчислюються підстановкою $x=t-\frac{b}{2a}$.

2. $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$.

Аналогічно до інтеграла виду **1** коефіцієнт a при x^2 виносимо за знак інтеграла, а потім виділяємо повний квадрат у знаменнику. Зробивши підстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, можна інтеграл записати у вигляді суми двох інтегралів, один з яких зводиться до інтеграла виду $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$, а другий є інтеграл виду **1**.

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\int\frac{Ax+B}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}dx=\frac{1}{a}\int\frac{Ax+B}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} t=x+\frac{b}{2a} \\ x=t-\frac{b}{2a} \\ dx=dt \\ k^2=\left|\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right| \end{array}\right|=\frac{1}{a}\int\frac{A\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{t^2\pm k^2}dt=\frac{1}{a}\int\frac{At-\frac{Ab}{2a}+B}{t^2\pm k^2}dt=\frac{A}{a}\int\frac{t\,dt}{t^2\pm k^2}+\frac{2aB-A\cdot b}{2a^2}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2t\,dt}{t^2\pm k^2}+\frac{2aB-Ab}{2a^2}\cdot I=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(t^2\pm k^2\right)}{t^2\pm k^2}+\frac{2ab-Ab}{2a^2}\cdot I=\frac{A}{2a}\ln\left|t^2\pm k^2\right|+\frac{2aB-A\cdot b}{2a^2}\cdot I+C=$$

$=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\frac{2aB-Ab}{2a^2}\cdot I+C$, де інтеграл I є інтеграл виду **1**.

Приклад 3.19.

$$\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx=\int\frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(3x-1)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}=\left|\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}=t \\ x=t+\frac{1}{2} \\ dx=dt \end{array}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{3\left(t+\frac{1}{2}\right)-1}{t^2+4}dt=\frac{1}{4}\int\frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+4}dt=\frac{1}{4}\int\frac{3t+\frac{1}{2}}{t^2+4}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3t}{t^2+4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+4}\right)dt=\frac{3}{4}\int\frac{t\,dt}{t^2+4}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{3}{8}\int\frac{2t\,dt}{t^2+4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\,\frac{t}{2}=\frac{3}{8}\int\frac{d\left(t^2+4\right)}{t^2+4}+$$

$$+\frac{1}{16}arctg\,\frac{t}{2}=\frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right)+\frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{3}{8}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\right)+\frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right)+\frac{1}{16}arctg\,\frac{2x-1}{4}+C.$$

Зауваження. Інтеграли таких видів обчислюються достатньо громіздко, але є один плюс: всі вони обчислюються взагалі однаково.

Аналогічно за допомогою підстановки $x+\frac{b}{2a}=t$ можна знаходити інтеграли виду

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Приклад 3.20.

$$\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}=\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-6)}}=\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=\begin{vmatrix}x-1=t\\ x=t+1\\ dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{(8(t+1)-11)}{\sqrt{6-t^2}}dt=$$

$$=\int\frac{8t+8-11}{\sqrt{6-t^2}}dt=\int\frac{8t-3}{\sqrt{6-t^2}}dt=\int\left(\frac{8t}{\sqrt{6-t^2}}-\frac{3}{\sqrt{6-t^2}}\right)dt=-4\int\frac{(-2t)dt}{\sqrt{6-t^2}}-3\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-t^2}}=$$

$$=-4\int\frac{d\left(6-t^2\right)}{\sqrt{6-t^2}}-3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}}+C=-8\sqrt{6-t^2}-3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}}+C=-8\sqrt{6-(x-1)^2}-$$

$$-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C=-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.$$

3.2.2 Інтегрування раціональних функцій

Означення. Відношення двох многочленів $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *раціональним дробом.*

Означення. Раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n<m$; якщо $n\geq m$, то дріб називається *неправильним*. Неправильний раціональний дріб можна перетворити на правильний , виділивши цілу частину:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M_k(x)+\frac{R_p(x)}{Q_m(x)}.$$

Теорема 5. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Означення. За домовленістю *найпростішими раціональними дробами* називаються такі дроби чотирьох типів:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; **II.** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$; **III.** $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; **IV.** $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$,

де A, a, B, p, q – дійсні числа; $k\geq 2, k\in N$, а тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто $p^2-4q<0$, *інтеграли* від яких мають вигляд:

I. $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

II. $\displaystyle\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$;

III. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$— розглянуто в попередньому пункті 3.2.1 інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен;

IV. $\int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ — інтегрується за допомогою рекурентних формул.

За допомогою підстановки $x = t - \frac{p}{2}$ інтеграл $\int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ зводиться до двох інтегралів:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = A\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Перший з цих інтегралів обчислюється безпосередньо, а другий – за рекурентною формулою:

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k=1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}.$$

Остання формула дає змогу знайти інтеграл I_k для будь-якого натурального числа $k > 1$. Враховуючи, що

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C,$$

послідовно знаходимо $I_2, I_3, \ldots$.

Теорема 6. Нехай знаменник правильного раціонального дробу розкладено на множники:

$$Q_n(x) = a_0(x-a)^\alpha \ldots (x-b)^\beta \left(x^2+px+q\right)^\mu \ldots \left(x^2+lx+s\right)^\nu,$$

тоді цей дріб можна подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_\mu x+N_\mu}{\left(x^2+px+q\right)^\mu} + \ldots +$$

$$+ \frac{L_1x+F_1}{x^2+lx+s} + \frac{L_2x+F_2}{\left(x^2+lx+s\right)^2} + \ldots + \frac{L_\nu x+F_\nu}{\left(x^2+lx+s\right)^\nu} \tag{3.7}$$

де $A_1, \ldots, A_\alpha; B_1, \ldots, B_\beta; M_1, N_1, \ldots, M_\mu, N_\mu; L_1, F_1, \ldots, L_\nu, F_\nu, a_0, a, \ldots, b, p, q, \ldots, l, s$ – деякі дійсні числа, причому $p^2 - 4q < 0, \ldots, l^2 - 4s < 0$.

Вираз (3.7) називається *розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дроби*.

Приклад. Даний правильний раціональний дріб $(n < 12)$ розкласти на суму найпростіших дробів.

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3\left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} +$$

$$+ \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2-x+2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Коефіцієнти $A_1, \ldots, F_\nu$ поки що невідомі (невизначені коефіцієнти); для їх знаходження треба праву частину рівності (3.7) звести до спільного знаменника (найменшого) і знайдений чисельник прирівняти до чисельника даного дробу (бо здобуті дроби тотожно рівні й у них рівні знаменники). Із тотожної рівності многочленів у чисельниках одержимо рівності коефіцієнтів при однакових степенях змінної x, що являють собою систему лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $A_1, ..., F_v$. Описаний вище метод називають *методом невизначених коефіцієнтів (або метод порівняння коефіцієнтів)*.

Крім, методу невизначених коефіцієнтів, користуються також *методом окремих значень аргументу*. Нехай після множення обох частин рівності (3.7) дістаємо два тотожно рівні многочлени, один з яких – відомий, а другий з невідомими коефіцієнтами. Надаючи змінній конкретні значення стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої і визначаємо шукані коефіцієнти. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$. Іноді зручно скористатись комбінованим методом, тобто деякі з невідомих коефіцієнтів визначити, надаючи x значення дійсних коренів знаменника, а інші – визначити методом невизначених коефіцієнтів.

Методика інтегрування раціональних функцій

1. Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.
2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.
3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

Приклад 3.21. Обчислити $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx$.

Розв'язання.

Дріб неправильний, бо степінь многочлена в чисельнику більший від степеня многочлена в знаменнику $(n=4>3=m)$. Виконаємо дію ділення чисельник на знаменник і виділимо цілу частину.

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x & x^3+8 \\ \underline{x^4+8x} & \overline{\quad x \quad} \\ -6x & \end{array}$$

Отже, $\frac{x^4+2x}{x^3+8} = x - \frac{6x}{x^3+8}$. Тоді $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx = \int\left(x - \frac{6x}{x^3+8}\right)dx$.

Розглянемо одержаний правильний дріб $\frac{6x}{x^3+8}$.

Знаменник запишемо у такому виді: $x^3+8=(x+2)\cdot(x^2-2x+4)$.

Маємо

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{6x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} = \frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8}.$$

$$6x \equiv A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2);$$

$$6x = x^2(A+B)+x(-2A+2B+C)+4A+2C.$$

Скористаємось комбінованим методом знаходження коефіцієнтів A, B, C. Один коефіцієнт знайдемо методом окремих значень аргументу, надаючи x значення дійсного кореня знаменника. Якщо $x=-2$, то $-12=12A$ або $A=-1$. Інші коефіцієнти знаходимо методом невизначених коефіцієнтів, прирівнюючи коефіцієнти при x^2, x^1.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & \quad 0 = A + B, \\ x^1 & 6 = -2A + 2B + C. \end{array}$$

Дістанемо з першої рівності $B = -A,\ B = 1$; з другої – $C = 6 + 2A - 2B,\ C = 6 + 2\cdot(-1) - 2\cdot 1 = 2$.

Отже,

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{6x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{-1}{x+2} + \frac{x+2}{x^2-2x+4}.$$

$$\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx = \int\left(x - \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)\right)dx = \int\left(x + \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| -$$

$$-\int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3} = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ dx = dt \\ x = t+1 \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{t+3}{t^2+3}dt = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{t\,dt}{t^2+3} - 3\int \frac{dt}{t^2+3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+3} - 3\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3} - \frac{3}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+3\right) - \sqrt{3}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right| - \sqrt{3}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

3.2.3 Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R — раціональна функція відносно $\sin x,\ \cos x$, тобто над $\sin x,\ \cos x$ виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня, наприклад:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{2\sin^2 x + \cos^3 x}{3\sin^4 x - 4\sin x\cos^2 x}.$$

Існують такі підстановки, що за їх допомогою інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ завжди може бути зведений до інтеграла від раціональної функції $\int R^*(t)dt$, загальну схему інтегрування якої розроблено.

I. Універсальна тригонометрична підстановка $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = t,\ \ x = 2\,\mathrm{arctg}\,t,\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R^*(t)dt.$$

Приклад 3.22. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sin x}; \qquad \text{б) } \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}.$$

$$\textit{а)} \int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\textit{б)} \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3\right)} = 2\int \frac{dt}{1-t^2+4t+3+3t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{2t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1} = \mathrm{arctg}(t+1) + C = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right) + C.$$

Зауваження. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо $\sin x$, $\cos x$ входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

II. Підінтегральна функція — непарна відносно $\sin x$, тоді роблять підстановку $\cos x = t$.

Приклад 3.23.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin x\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

III. Підінтегральна функція — непарна відносно $\cos x$ раціоналізується за допомогою підстановки $\sin x = t$.

Приклад 3.24.

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x} dx = = \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)\sin^2 x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos t\, dt \end{array} \right| = \int (1-t^2) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

IV. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ — парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ разом, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. У цьому випадку використовують підстановку $\mathrm{tg}\, x = t$ або $\mathrm{ctg}\, x = t$.

Приклад 3.25.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = t,\ x = \mathrm{arctg}\, t,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = = \int \frac{(1+t^2)^2 (1+t^2)\, dt}{t^4 (1+t^2)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt = \int t^{-4} dt - \frac{2}{t} + t = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{2}{t} + t = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3\mathrm{tg}^3 x} - 2\mathrm{ctg}\, x + tg\, x + C.$$

V. Підінтегральна функція $R(\mathrm{tg}\, x)$ раціоналізується підстановкою $\mathrm{tg}\, x = t$.

Приклад 3.26.

$$\int \mathrm{tg}^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = t \\ x = \mathrm{arctg}\, t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^3 dt}{t^2+1} = \left| \begin{array}{r|l} t^3 & t^2+1 \\ \underline{t^3+t} & t \\ -t & \end{array} \right| = \int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C =$$

$$= \frac{tg^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(tg^2 x + 1) + C = \frac{tg^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) + C.$$

Зауваження. В інтегралах $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$ рекомендується скористатись формулами зниження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Приклад3.27. Обчислити інтеграли:

а) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; б) $\int \cos^4 x dx$.

а) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \dfrac{1}{4} \int \sin^2 2x\, dx = \dfrac{1}{4} \int \dfrac{1-\cos 4x}{2} dx = \dfrac{1}{8}\left(x - \dfrac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$

б) $\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \dfrac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2\mathrm{x} + \cos^2 2x)\, dx =$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{8}\left(3x + 2\cos 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) + C =$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Зауваження. При інтегруванні інтегралів типу:

$$\int \sin(ax)\cdot\cos(bx)dx\,,\ \int \cos(ax)\cdot\cos(bx)dx\,,\ \int \sin(ax)\cdot\sin(bx)dx \quad a\neq b$$

треба скористатися формулами:

$$\sin(ax)\cdot\cos(bx)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)x+\ +\sin(a-b)x)\,,$$

$$\cos(ax)\cos(bx)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x),$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx)=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x).$$

Приклад 3.28.

$$\int\cos 2x\cdot\sin 5x\cdot dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x+\sin 3x)dx=-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C\,.$$

3.2.4 Інтегрування ірраціональних функцій

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів ірраціональних функцій, при цьому символ $R(x,\,y)$ означає раціональну залежність від змінних x та y.

I. $$\int R\left(x,\sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx=\left|\begin{array}{c} ax+b=t^n \\ x=\dfrac{1}{a}\left(t^n-b\right) \\ dx=\dfrac{n}{a}t^{n-1}dt\end{array}\right|=\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t^m\right)\frac{nt^{n-1}dt}{a}=\int R^*(t)dt.$$

Приклад 3.29.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\left|\begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt\end{array}\right|=\int\frac{\left(t^3-1\right)3t^2dt}{t^2}=3\int\left(t^3-1\right)dt=\frac{3}{4}t^4-3t+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{x+1}+C\,.$$

II. $$\int R\left(x,\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx=\left|\frac{ax+b}{cx+d}=t^n\right|=\int R^*(t)dt\,.$$

Приклад 3.30.

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x-1}=t^2, \\ x+1=t^2(x-1), \\ x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}; \\ dx=\dfrac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\end{array}\right|=\int\frac{\left(t^2-1\right)^2t(-4t)dt}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2-1\right)^2}=2\int\frac{t\cdot(-2t)\,dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\left|\begin{array}{ll} u=t & dv=\dfrac{-2t\,dt}{\left(t^2+1\right)^2} \\ du=dt & v=\dfrac{1}{t^2+1}\end{array}\right|=$$

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2t}{t^2+1} - 2\,\mathrm{arctg}\, t + C = 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{x+1}{x-1}} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

III. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx = \left| \frac{ax+b}{cx+d} = t^s,\ s = HCK(n_1, n_2, ..., n_k) \right| = \int R^*(t)\,dt$.

Приклад 3.31.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^{12}, \\ 12 = HCK(2,3,4) \\ dx = 12t^{11}dt; \\ t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}dt}{t^8 - t^3} = 12\int \frac{t^{17}\,dt}{t^3(t^5-1)} = 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5-1} = 12\int \frac{t^4(t^{10}-1+1)}{t^5-1}dt =$$

$$= 12\int \left(\frac{t^4(t^{10}-1)}{t^5-1} + \frac{t^4}{t^5-1} \right) dt = 12\int \left(\frac{t^4(t^5-1)\cdot(t^5+1)}{t^5-1} + \frac{t^4}{t^5-1} \right) dt = 12\int t^4(t^5+1)dt + \frac{12}{5}\int \frac{5t^4dt}{t^5-1} =$$

$$= 12\int (t^9 + t^4)\,dt + \frac{12}{5}\int \frac{d(t^5-1)}{t^5-1} = 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} \right) + \frac{12}{5}\ln\left|t^5-1\right| + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x} - 1\right| + C.$$

IV. Підінтегральна функція $R_1(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ після виділення повного квадрата і заміни $x + \frac{b}{2a} = t$ раціоналізується тригонометричними підстановками; при цьому, залежно від знака дискримінанта квадратного тричлена та знака коефіцієнта a можливі такі випадки:

1). $$\int R\left(t, \sqrt{k^2-t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\sin z \\ \text{або} \\ t = k\cos z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} t = k\sin z, \quad z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad z = \arcsin\frac{t}{k}, \\ dt = k\cos z dz; \\ \sqrt{k^2-t^2} = \sqrt{k^2 - k^2\sin^2 z} = k\sqrt{\cos^2 z} = k\left|\cos z\right| = k\cos z \end{array} \right| =$$

$$= \int R(k\sin z, k\cos z)k\cos z dz = \int R^*(\sin z, \cos z)dz.$$

2). $$\int R\left(t, \sqrt{t^2-k^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{k}{\sin z} \\ \text{або} \\ t = \frac{k}{\cos z} \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)dz.$$

3). $$\int R\left(t, \sqrt{k^2+t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\,\mathrm{tg}\,z \\ \text{або} \\ t = k\,\mathrm{ctg}\,z \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)dz.$$

Приклад 3.32.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}=\left|\begin{array}{l} x=5\operatorname{tg}z,\ \ z\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right),\ \ z\neq 0, \\ dx=\dfrac{5dz}{\cos^2 z};\ \ z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{5}; \\ \sqrt{x^2+25}=5\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}=\dfrac{5}{\cos z} \end{array}\right|=\int\frac{\cos z\cdot 5dz}{5\cdot 25\operatorname{tg}^2 z\cdot\cos^2 z}=\frac{1}{25}\int\frac{\cos z\,dz}{\sin^2 z}=-\frac{1}{25\sin x}+C=$$

$$=-\frac{1}{25\sin\operatorname{arctg}\dfrac{x}{5}}+C=\frac{\sqrt{x^2+25}}{25x}+C.$$

Зауваження. Інтеграли типу $\int R_1\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можуть бути проінтегровані за допомогою підстановок Ейлера:

1). $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$, при $a>0$;

2). $\sqrt{ax^2+bc+c}=tx\pm\sqrt{c}$, при $c>0$;

3). $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$, при $b^2-4ac>0$,

де $x_1,\ x_2$ — корені тричлена ax^2+bx+c.

Приклад 3.33.

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\left|\begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1}=t-x,\ \ a=1>0; \\ x+x+1=t^2-2tx+x^2, \\ x=\dfrac{t^2-1}{2t+1},\ \ dx=\dfrac{2\left(t^2+t+1\right)dt}{(2t+1)^2} \end{array}\right|=2\int\frac{\left(t^2+t+1\right)dt}{(x+t-x)(2t+1)^2}=2\int\frac{\left(t^2+t+1\right)dt}{t\cdot(2t+1)^2}=$$

$$=\left|\ \frac{t^2+t-1}{t(2t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{2t+1}+\frac{C}{(2t+1)^2}\ \Rightarrow\ t^2+t+1=A(2t+1)^2+Bt(2t+1)+C\cdot t\ \Rightarrow\ \begin{cases} A=1 \\ C=-\dfrac{3}{2} \\ B=-\dfrac{3}{2} \end{cases}\right|=$$

$$=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t+1)^2}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3}+\frac{3}{2(2t+1)}+C,\ \text{де}\ t=x+\sqrt{x^2+x+1}.$$

3.2.5 Інтегрування диференціального бінома

Інтеграл від диференціального бінома має вигляд

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$$

де $m,\ n,\ p$ — раціональні числа.

За теоремою Чебишова цей інтеграл може бути зведено до інтегрування раціональних функцій лише у таких випадках:

1. $p=1$, підстановка $x=t^s$, де s — найменше спільне кратне знаменників дробів m та n.

2. $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле, підстановка $a+bx^n=t^s$, де s — знаменник дробу p.

3. $\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле, підстановка $ax^{-n}+b=t^s$, де s — знаменник дробу p.

Приклад 3.34.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0\cdot\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx=\left|\begin{array}{l} m=0,\ n=4,\ p=-\dfrac{1}{4},\ a=b=1, \\ \dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{0+1}{4}-\dfrac{1}{4}=0\in Z\Rightarrow \\ \Rightarrow x^{-4}+1=t^4,\ \ x^4=\left(t^4-1\right)^{-1}, \\ x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}},\ \ dx=-t^3\cdot\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt, \\ \sqrt[4]{1+x^4}=t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}} \end{array}\right|=-\int\frac{t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{4}{5}}}{t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}}dt=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=$$

$$=\left|\ \frac{t^2}{t^4-1}=\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}=\frac{t^2}{(t-1)(t+1)\left(t^2+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow t^2=A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2=A\left(t^3+t^2+t+1\right)+B\left(t^3-t^2+t-1\right)+C\left(t^3-t\right)+D(t^2-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} A+B+C=0, \\ A-B+D=1, \\ A+B-C=0, \\ A-B-D=0. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2A+2B=0, \\ 2A-2B=1. \end{cases}\Rightarrow 4A=1,\Rightarrow\begin{cases} A=\dfrac{1}{4}, \\ B=-A=-\dfrac{1}{4}, \\ C=-A-B=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=0, \\ D=A-B=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}\Rightarrow\left.\begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=-\dfrac{1}{4} \\ C=0 \\ D=\dfrac{1}{2} \end{cases}\right|=$$

$$=-\int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\right)dt=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t_2+1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{2}arctgt+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C$$, де $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$.